慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	内生的景気循環とカオスの非線形マクロ経済モデル
Sub Title	A nonlinear macroeconomic model of endogenous cycles and chaos
Author	福岡, 正夫(Fukuoka, Masao) 須田, 伸一(Suda, Shinichi)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2011
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.104, No.2 (2011. 7) ,p.153(1)- 178(26)
JaLC DOI	10.14991/001.20110701-0001
Abstract	本稿は, 標準的なケインズ流マクロ経済モデルに非線形要因をとり込むことによって, 内生的に景気循環ならびにカオス運動が生じる可能性を明らかにしたものである。デイ＝シェイファーに準じたモデル設定にもとづき, 任意の周期を持つ周期解の存在を保証する十分条件（定理1）とカオス解の存在を保証する十分条件（定理2）が示されている。証明はリー＝ヨークの定理を援用して行われるが, 併せて同定理の証明自体にも立ち入って補足的説明が加えられている。 Introducing non-linear factors in a standard Keynesian macroeconomic model, this study reveals the possibility of the occurrence of endogenous business cycles and chaotic movements. Based on a model set à la Day and Shafer, we show a sufficient condition to guarantee the existence of a periodic solution with any period (Theorem 1) and a sufficient condition to guarantee the existence of a chaotic solution (Theorem 2). Although we refer to Lee-York's theorem to perform the proof, we add a complementary explanation to the proof of theorem itself.
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20110701-0001

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

内生的景気循環とカオスの非線形マクロ経済モデル

A Nonlinear Macroeconomic Model of Endogenous Cycles and Chaos

福岡 正夫(Masao Fukuoka)
須田 伸一(Shinichi Suda)

本稿は，標準的なケインズ流マクロ経済モデルに非線形要因をとり込むことによって，内生的に景気循環ならびにカオス運動が生じる可能性を明らかにしたものである。デイ＝シェイファーに準じたモデル設定にもとづき，任意の周期を持つ周期解の存在を保証する十分条件（定理 1）とカオス解の存在を保証する十分条件（定理 2）が示されている。証明はリー＝ヨークの定理を援用して行われるが，併せて同定理の証明自体にも立ち入って補足的説明が加えられている。

Abstract

Introducing non-linear factors in a standard Keynesian macroeconomic model, this study reveals the possibility of the occurrence of endogenous business cycles and chaotic movements. Based on a model set à la Day and Shafer, we show a sufficient condition to guarantee the existence of a periodic solution with any period (Theorem 1) and a sufficient condition to guarantee the existence of a chaotic solution (Theorem 2). Although we refer to Lee-York's theorem to perform the proof, we add a complementary explanation to the proof of theorem itself.

「三田学会雑誌」104 巻 2 号（2011 年 7 月）

内生的景気循環とカオスの非線形マクロ経済モデル

福　岡　正　夫
須　田　伸　一

要　　旨

本稿は，標準的なケインズ流マクロ経済モデルに非線形要因をとり込むことによって，内生的に景気循環ならびにカオス運動が生じる可能性を明らかにしたものである。デイ＝シェイファーに準じたモデル設定にもとづき，任意の周期を持つ周期解の存在を保証する十分条件（定理 1）とカオス解の存在を保証する十分条件（定理 2）が示されている。証明はリー＝ヨークの定理を援用して行われるが，併せて同定理の証明自体にも立ち入って補足的説明が加えられている。

キーワード

内生的景気循環，非線形マクロ経済モデル，周期解，カオス，リー＝ヨークの定理

1

景気変動という現象をモデル化する現代の理論的アプローチには，大別して二つのものがあるように思われる。その説明を外生的（exogenous）な要因に求めるものと，内生的（endogenous）な要因に求めるものの二つがそれである。前者は元来安定的な，そして通常は線形構造を持つと仮定される経済に外から繰り返し不規則衝撃が加えられると考えることによって景気変動の発生持続を説明する立場をとり，これに対して後者は経済システムが内在的に不安定であり，かつ非線形の構造を持つがゆえに，外部からの衝撃がなくてもなお景気変動が生じ持続しうるとする考え方をとる。

ケインズ革命に起因するマクロ経済学のルネサンス以降優位を占めてきたカルドア，ヒックス，グッドウィンらの主要な景気理論モデルはすべて後者の非線形タイプの理論，数学的にはポアンカレ＝ベンディクソン流の極限循環（limit cycle）の理論にもとづくものであったが，やがてマクロ経済学の世界に合理的期待派などニュー・クラシカルの流れが台頭するに及んで，景気理論の局面においても風向きが変わり，ふたたびフリッシュ＝スルーツキー流の不規則衝撃理論の立場が甦って，その枠組みに依拠したルーカス，サージェント＝ワレス，キドランド＝プレスコットらの貨幣的ないしは実物的ビジネス・サイクルの理論がもてはやされるにいたった。石油危機によるケインズ経済学の一時的退潮，また経験的な検証には線形モデルのほうがはるかに便利といったような事情の

ほかに，こうした外生的理論が人気を博した理由の一つとしては，思うにこの立場にもとづくエコノメトリック・モデルのシミュレーションが現実の集計時系列に見られるカオス的なジグザグ変動に近似したデータを生み出しえたという実情が挙げられよう。極限循環として捉えられた内生的モデルの周期解は，集計時系列のスペクトラムが示す一見イレギュラーな動きを説明するには不適格であるという意見が力を得たのである。

だがこの種の言明は，今日ではもはやその説得力の大半を失ったのではないかと思われる。というのは，その後の非線形数学とりわけ非線形定差方程式の開発とその成果の応用をつうじて，現状では内生的景気理論もまた目覚しい飛躍を遂げ，周期解しかも任意の周期を持つ周期解ばかりか，非周期的なカオス運動をもカバーしうる，はるかに一般的な多様性を具えた段階に到達しているからである。1980 年代以降次々に生み出されてきたベンハビブ，デイ，ダナ，マルグランジュ，グランモンたちの業績が，何よりもこの刮目すべき進展の証左となるであろう。

こうした情勢に鑑み，筆者たちもまた本稿ではもっぱら内生的な非線形景気理論の立場に視座を置き，標準的なケインズ流のマクロ経済モデルに若干の非線形要因をとり込むことによって，任意の周期を持つ周期解の存在なおかつカオス解の存在を厳密に基礎づけることを試みた。

内生的な景気理論への近時の貢献としてはグランモンの 1985 年の論文が著名であるが，彼が重複世代モデルにもとづき，現在・将来の 2 期間にわたる価格比の周期的変動をとり扱ったのに対して，本稿ではマクロ経済の景気指標としてもっとも代表的な国内総生産ないしは国民総所得の変動を考察の対象とする。なおまたグランモン・モデルでは完全予見の想定下において次期の価格に対して今期の価格が定まることになっており，時間を逆に遡る backward な軌道が導かれるので，カオス運動をとり扱うことができないが，本稿のモデルはストレートに forward な軌道を考えるから，そうした限定からは免れえている。

一方，そのように国内総生産の変動に焦点を合わせる点で，本稿の所論は前記カルドアやグッドウィンなど 1940–50 年代の非線形景気理論と軌を一にするが，財市場ばかりではなく，貨幣市場をも重要な構成要素として連立させる点では顕著に異なっている。等しくケインズ流の景気理論と言っても，本稿の基本モデルはいわゆる IS・LM モデルを準拠枠としたもので，たとえばデイ，シェイファーらの研究[(1)]と舞台を共有しており，彼らの所論に負うところが大きい。その辺の事情を具体的にイメージしていただくためには，前おきはこのくらいにして，早速モデル構成の説明に移るのが望ましいであろう。

---

(1)　Richard H. Day and Wayne Shafer, “Keynesian Chaos”, *Journal of Macroeconomics*, Summer 1985 (reprinted in Jess Benhabib ed., *Cycles and Chaos in Economic Equilibrium*, 1992). また R. H. Day, *Complex Economic Dynamics*, Vol. II, 1999, pp. 19–26 をも参照。

議論を明快にするため，さしあたって政府の経済活動と国際経済関係は捨象することとし，国内総生産に対する総需要は民間消費需要と民間投資需要のみから構成されることとしよう。慣例に倣って t 期の国内総生産を Y_t，消費を C_t，投資を I_t，また貨幣需要を L_t とし，所与と仮定されるマネーサプライを M で記す。これらはすべてやはり所与の物価 $P \equiv 1$ で測られているものとする。すると財市場と貨幣市場の需給均衡方程式は，通例どおり

$$Y_t = C_t + I_t \tag{2.1}$$

$$L_t = M \tag{2.2}$$

の 2 式であらわされる。ここで C_t と I_t についてはロバートソン流に 1 期の支出ラッグを導入して

$$C_t = \bar{C} + cY_{t-1} \tag{2.3}$$

$$I_t = \bar{I} + I(r_{t-1}, Y_{t-1}) \tag{2.4}$$

とする。すなわち消費関数は線形で，$\bar{C}$ は自発消費，c，$0 < c < 1$ は限界消費性向である。投資関数は自発投資 $\bar{I}$ と誘発投資 $I(r_{t-1}, Y_{t-1})$ の 2 部分から成り，後者に含まれる r は実質利子率で，$\partial I/\partial r_{t-1} \leq 0$，$\partial I/\partial Y_{t-1} \geq 0$ とされる。誘発投資関数は本稿の所論にとって重要な含意を持つ非線形の形をとるものと想定されるが，その点についてはまたのちに詳しい説明が与えられるであろう。

一方貨幣需要 L_t は，これまた簡単化のため

$$L_t = kY_t + L(r_t) \tag{2.5}$$

という加法的な形をとるものとし，ここで k はいわゆるマーシャルの k，また $L(r_t)$ は流動性選好関数である。後者については $L'(r_t) < 0$，$L''(r_t) > 0$ と仮定され，その非線形性が誘発投資関数の持つ非線形性と相俟って，本稿の議論に重要な帰結をもたらすことになるのである。(2)

さて以上の設定にもとづき，(2.3)，(2.4) を (2.1) に代入し，(2.5) を (2.2) に代入して $\bar{C} + \bar{I} \equiv \bar{A}$ とおけば，

$$Y_t = \bar{A} + cY_{t-1} + I(r_{t-1}, Y_{t-1}) \tag{2.6}$$

$$kY_t + L(r_t) = M \tag{2.7}$$

という 2 式が得られ，(2.6) が IS・LM モデルの IS 式に，(2.7) が LM 式に対応するわけである。(3)

---

(2)　本稿で用いられる関数はすべて任意の回数微分可能と仮定される。

ここで（2.7）を r_t について解き

$$r_t = f(Y_t) \tag{2.8}$$

を導けば，$k>0$，$L'(r)<0$ であるところから

$$f'(Y) = -\frac{k}{L'(r)} > 0$$

また $L''(r)>0$ であるところから

$$f''(Y) = k\frac{L''(r)}{L'(r)^2}f'(Y) > 0$$

となり，よって以上の想定の下では，右上がりで Y の増加とともに勾配が急になる LM 曲線が得られることになる。さらに仮定

$$\begin{aligned}&\text{(a)}\quad \lim_{r\to r^0} L(r) = \infty \qquad \text{for some } r^0 > 0\\ &\text{(b)}\quad \lim_{r\to\infty} L(r) = L^0\end{aligned}$$

を付加してその形を限定することにすれば，まず仮定 (a) から r が r^0 までいかないうちに $L(r)=M$ となるような r の値 r' があることになるから，（2.7）から

$$Y = \frac{M-L(r)}{k}$$

であることを考慮すれば，r^0 より大きい r' のところで $Y=0$ となる。一方仮定（b）の L^0 について

$$Y^0 = \frac{M-L^0}{k}$$

とおけば，$Y \to Y^0$ のとき $L(r)=L(f(Y)) \to L^0$ となるから，仮定（b）から $r\to\infty$ となり，これは $f(Y)$ の値が無限大に近づくことを意味している。以上のところから，前記の仮定の下では $f(0)=r'$，$\lim_{Y\to Y^0} f(Y)=\infty$ となり，LM 曲線は第 1 図のように r' から出発して，最初のうちはゆるやかな勾配を持つが，Y の増加につれて次第に急勾配となり，$Y\to Y^0$ のときには垂直に近い勾配を持つにいたる。このような LM 曲線の形が，つぎに述べる誘発投資関数の形に対しても重要な関連を持つことになるのである。

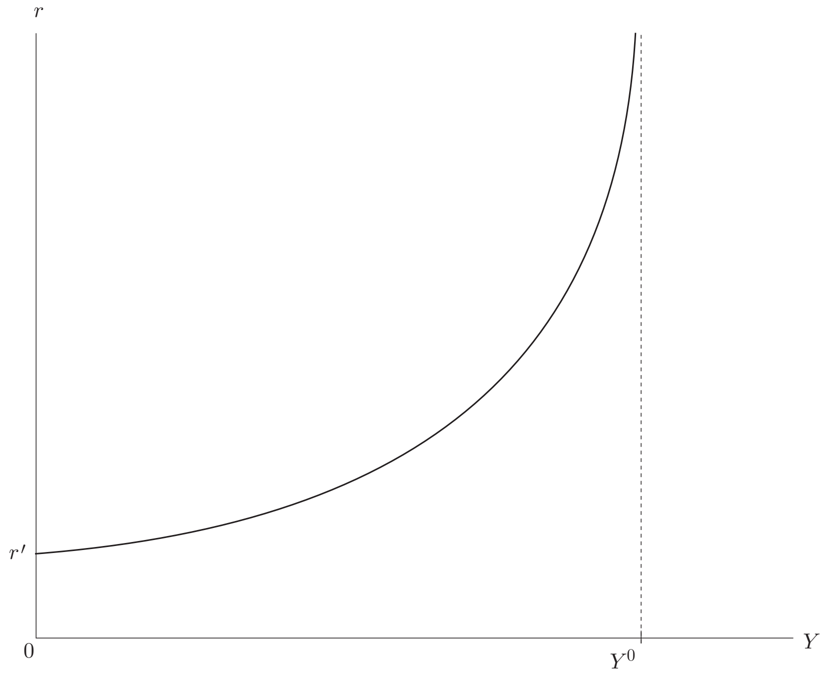
この点で誘発投資関数の形を特定化する運びとなるが，いま

$$I(r,Y) = I(f(Y),Y) \equiv h(Y) \tag{2.9}$$

---

(3)　ただし支出ラッグを導入している目下のモデルでは，$Y_t = C_t + I_t$ は $I_t = S_t$ と等値ではなく，$I_t = S_t + (Y_t - Y_{t-1})$ となることに注意されたい。これは貯蓄の S_t が，ここでは $Y_{t-1} - C_t$ と定義されなければならないからである。

第 1 図



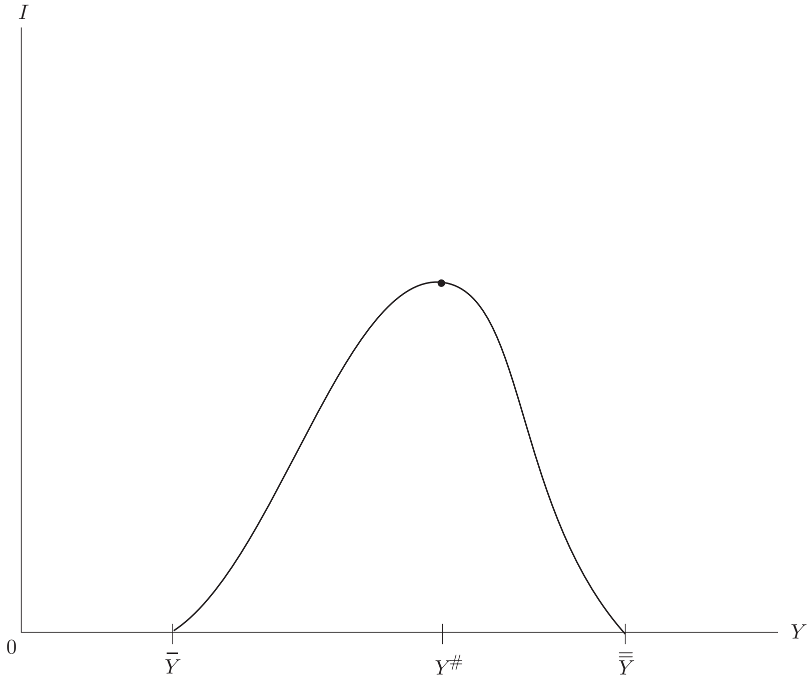
として関数 h の Y に関する勾配を計算してみると，

$$h'(Y) = \frac{\partial I}{\partial r} f'(Y) + \frac{\partial I}{\partial Y} \tag{2.10}$$

ここで $\partial I/\partial r \leq 0$，$f'(Y) > 0$，$\partial I/\partial Y \geq 0$ であるから，右辺第 1 項は非正，第 2 項は非負となる。これは r と Y が誘発投資に影響を与える領域すなわち $\partial I/\partial r < 0$，$\partial I/\partial Y > 0$ の領域を考えるかぎり，第 1 項は負で，総生産 Y が増加すると金利が上昇して誘発投資に不利な影響を与えること，また第 2 項は正で，総生産 Y の増加が直接には誘発投資に有利な影響を与えることを意味している。よってそのような範囲で，もしも第 1 項の影響が弱く，第 2 項のもたらす効果のほうがそれを上回れば，総生産の増加は誘発投資を増加させ，逆に第 1 項の影響のほうが第 2 項のそれに優越すれば，総生産の増加は貨幣的な影響をつうじてかえって誘発投資を減少させることになる。

ゆえに前述した LM 曲線の形状を考慮に入れれば，誘発投資関数の形としては第 2 図に図示したような形を想定するのがもっとも適切であろうと考えられる。すなわち Y が十分に小さいときには，Y の増加が r に及ぼす影響はきわめて小さくほとんど無視しうるか，あるいは I そのものが r に反応しないために，さらにまた過剰設備の存在などのゆえに Y の増加の直接投資刺激効果もほとんどないために，Y が増えても誘発投資はしばらくのあいだ端的にゼロにとどまると仮定して差し支えない。しかし Y がある閾値を越えると，誘発投資は Y の増加から，r への不利な間接的影響を上回る直接的影響を受け，プラスとなって，しかも次第に大きくなっていく。が，さらに Y が増加し

第 2 図



つづければ，やがて r 上昇の不利な間接的影響のほうが Y 増加の直接的影響を上回るようになり，誘発投資は逆に Y の増加とともに減少する。そして r が禁止的に高くなれば，誘発投資はふたたびゼロとなり，いかなる Y の増加を以ってしても刺激されることはないようになる。そうした事情を単純化して描いたのが第 2 図であり，そこでは $\bar{Y}$ が誘発投資のゼロからプラスへの転換点，$Y^{\#}$ が上昇から下降への転換点，$\bar{\bar{Y}}$ がプラスからゼロへの転換点とされている。すなわち $0 < Y \leq \bar{Y}$ の Y については $h(Y) = 0$，$\bar{Y} < Y < \bar{\bar{Y}}$ の Y については $h(Y) > 0$，$\bar{\bar{Y}} \leq Y$ の Y についてはふたたび $h(Y) = 0$ とされ，また $\bar{Y} < Y < Y^{\#}$ の Y については $h'(Y) > 0$，$Y = Y^{\#}$ の Y については $h'(Y) = 0$，$Y^{\#} < Y < \bar{\bar{Y}}$ の Y については $h'(Y) < 0$ とされているのである。

以上に述べてきたところを総合し，(2.6)，(2.7) および (2.9) を併せて考えれば，上記の基本方程式は

$$Y_t = \bar{A} + cY_{t-1} + h(Y_{t-1}) \tag{2.11}$$

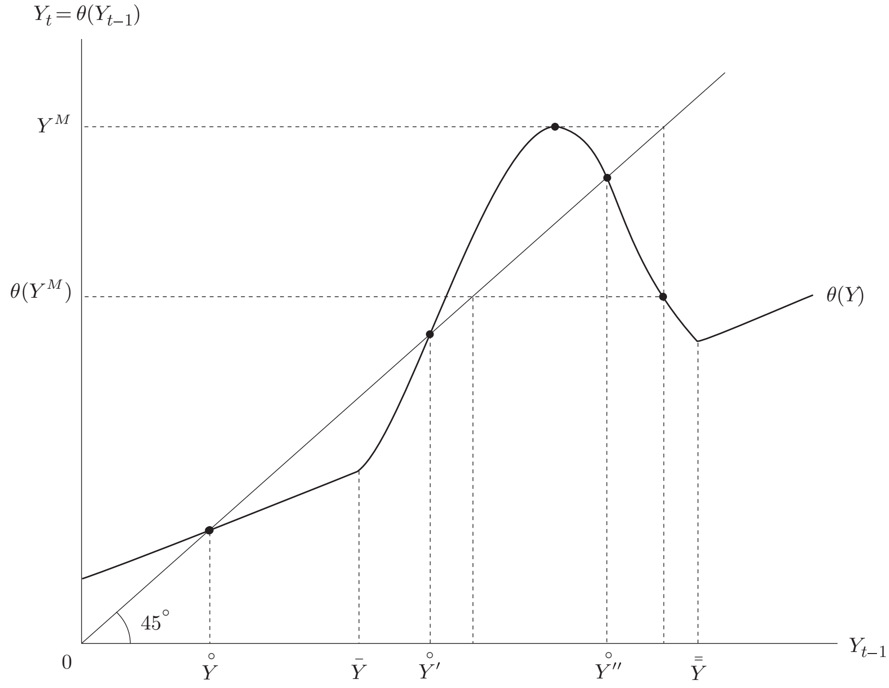
と一本化され，よって右辺を $\bar{A} + cY_{t-1} + h(Y_{t-1}) \equiv \theta(Y_{t-1})$ と略記することにより，

$$Y_t = \theta(Y_{t-1}) \tag{2.12}$$

という非線形の基本定差方程式を得る。前述の想定から，θ のグラフは典型的には第 3 図のごとくに描かれることになるであろう。

図では $\theta(Y)$ が 45° 線と 3 度交わり，したがって不動点すなわち定常均衡点が $\mathring{Y}$，$\mathring{Y}'$，$\mathring{Y}''$ と 3

第 3 図



個あることになっているが，言うまでもなく誘発投資の強度あるいは自発支出水準の高さなどの事情によっては，均衡点が $\overset{\circ}{Y}$ タイプのもの 1 個になったり，$\overset{\circ}{Y}{}''$ タイプのもの 1 個になったりする場合もあり，さまざまな事態が可能である。以下本稿ではかつてカルドアが設けた想定に倣い，第 3 図のように $\theta(Y)$ と 45° 線との交点が 3 個ある場合を仮定して議論を進めていくことにしたい。また有意義な帰結を得るための十分条件として，さらに $\theta(Y)$ の最大値を Y^M とするとき，Y^M が $\bar{\bar{Y}}$ を越えず，θ が Y^M において右下がりであること，そして $\theta(Y^M)$ が $\overset{\circ}{Y}{}'$ を下回らないこと，をも仮定したい。これらの仮定が設けられる理由は，以下推論の展開とともにおのずから明らかになるはずである。

3

本節では上記のような設定にもとづき，それに 1975 年のリー＝ヨークの定理[(4)]を適用することによって，まずはこのマクロ経済モデルにいかなる周期の周期解もが存在しうることを証明したい。

---

(4)　Tien-Yien Li and James A. Yorke, “Period Three Implies Chaos”, *American Mathematical Monthly*, December 1975, p. 987, Theorem 1.

ここで $Y_t = \theta(Y_{t-1})$ の周期 k の周期解とは，精確には，θ を n 回反復する写像を θ^n と書くとき，

$$Y = \theta^k(Y)$$
$$Y \neq \theta^i(Y) \qquad \text{for all } i = 1, 2, \ldots, k-1$$

を満たすような Y と定義される。すなわち Y を出発点としてそこから始まる Y_t の軌道が以降 $k-1$ 個の期のあいだは Y に等しい値をとらず，k 期にいたって初めて元の Y に復帰するとき，そのような Y を周期 k の周期解もしくは k 周期解というのである。もし Y が k 周期解であれば，それを若干ズラした $\theta^i(Y)$，i =1, 2, . . . , $k-1$ もまた明らかに k 周期解となる。それから $Y = \theta(Y)$ を満たす Y すなわち θ の不動点も，周期 1 の周期解という意味で，やはり周期解のスペシャル・ケースと考えられよう。

さて前記のように $\theta(Y)$ の最大値（maximum）を Y^M とし，さらに $\theta(Y)$ にその最大値をとらしめる Y の値（maximizer）を Y^* とするとき，われわれが本節で考察する基本定理はつぎのような主張から成るものである。

定理 1　前節の末尾に述べた四つの仮定すなわち $\theta(Y)$ が 3 個の不動点 $\mathring{Y}$，$\mathring{Y}'$，$\mathring{Y}''$ を持つこと，$Y^M \leq \bar{\bar{Y}}$ であること，$\theta'(Y^M) < 0$ であること，そして $\theta(Y^M) \geq \mathring{Y}'$ であること，にさらに加えて

$$\theta(Y^M) \leq \theta^{-1}(Y^*) < Y^* < Y^M$$

という条件が満たされるならば，すべての自然数 $k = 1,\ 2,\ \cdots$ について周期 k の周期解が存在する。(5)

いま分かりやすく，上記の仮定がすべて満たされている状況を図示したのが第 4 図である。定理は，θ のグラフがそこに描かれているような形をしていれば，どんな周期の周期解もがかならず存在することを主張しているのである。

証　明

数理の詳細に関してはリー＝ヨークの論文そのものを読まれるにしくはないから，(6) ここではそれが目下の経済モデルに適用された形で，補足的な説明をもまじえつつ，論旨を辿るにとどめよう。

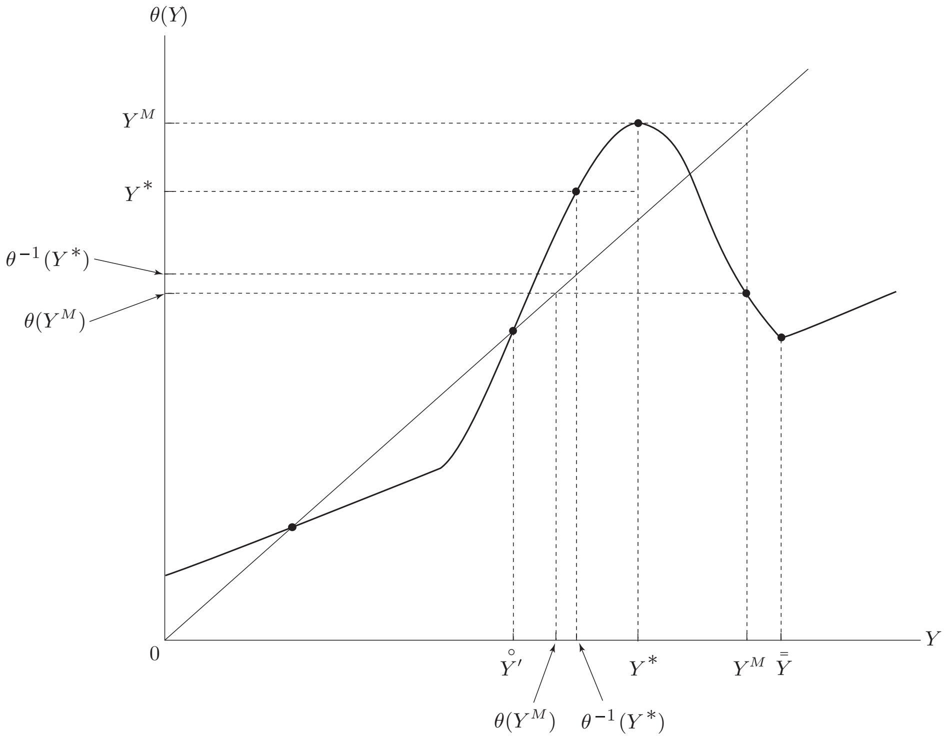
前述の $Y^M \leq \bar{\bar{Y}}$，$\theta'(Y^M) < 0$，$\theta(Y^M) \geq \mathring{Y}'$ という想定から，われわれは考察の舞台を $[\mathring{Y}', Y^M]$ という区間に限定し，それをリー＝ヨークの区間 I とみなして，θ をその I から I への連続関数と

---

(5)　もとになるリー＝ヨークの定理そのものについては，Li and Yorke, *op.cit.*, p. 987, Theorem 1 の前半部分，T1 を参照されたい。目下の議論ではリー＝ヨークの $a = \theta^{-1}(Y^*)$，$b = Y^*$，$c = Y^M$，$d = \theta(Y^M)$ として，この定理が応用されている。$\theta^{-1}(Y^*)$，Y^*，Y^M，$\theta(Y^M)$ がそこでの $d \leq a < b < c$，$f(a) = b$，$f(b) = c$，$f(c) = d$ の条件をすべて満たしていることを読者みずからチェックされたい。なお当該の条件中の $\theta^{-1}(Y^*)$ は，$Y^* = \theta(Y)$ となる Y の値が 2 個あるうち小さいほうを指す記号である。

(6)　Li and Yorke, *op.cit.*, pp. 987–988. また須田伸一『内生的景気循環理論と金融政策』，三菱経済研究所，1988，pp. 3–9 をも参照されたい。

第 4 図



いう範囲で考えていけばよい。すなわち第 5 図として描かれたところがわれわれの考察範囲である。またその範囲の中でも θ は $\mathring{Y}'$，$\mathring{Y}''$ という 2 個の不動点を持つと想定されているから，周期 $k=1$ の場合については周期解の存在は自明である。よって以下では $k>1$ として，そのような k を自然数の集合 N から任意に選び，その k を所与として推論を進めることにしよう。まず始めに θ^k が不動点 $\mathring{Y}_k = \theta^k(\mathring{Y}_k)$ を持つことを示す。そのことが示されれば，$\mathring{Y}_k$ から出発した軌道は k 期目に $\mathring{Y}_k$ そのものに等しい値をとることが示されたことになる。よってその不動点 $\mathring{Y}_k$ が k 期解になっていることを示すには，あとそれが $k-1$ 以下の周期を持たないこと，すなわち k 期よりも前には $\mathring{Y}_k$ に等しい値をとりえないことを示せば足りるのである。

前段の不動点 $\mathring{Y}_k$ の存在は，つぎのような推論をつうじて証明される。

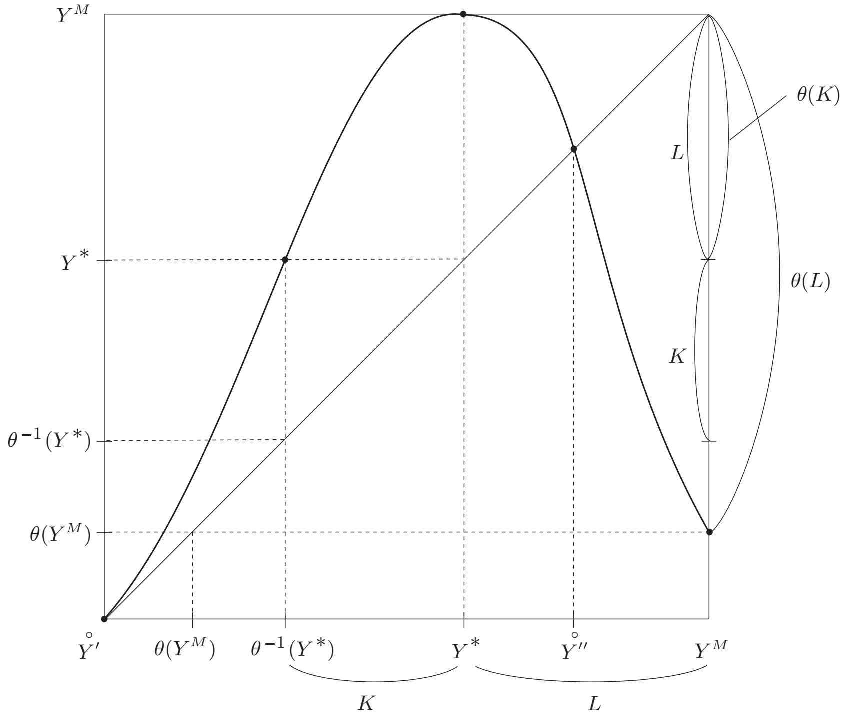
いま第 5 図の横軸上で区間 K，L を

$$K = [\theta^{-1}(Y^*), Y^*]$$
$$L = [Y^*, Y^M]$$

と定義すれば，$\theta(\theta^{-1}(Y^*)) = Y^*$，$\theta(Y^*) = Y^M$ であるから，明らかに

$$L \subset \theta(K) \ (\text{実は} L = \theta(K)) \tag{3.1}$$

第 5 図



また $\theta(Y^*) = Y^M$，$\theta(Y^M) \leq \theta^{-1}(Y^*)$ であるところから，やはり明らかに

$$K \cup L \subset \theta(L) \tag{3.2}$$

である。

ここでさきに任意に定めた k について

$$\begin{aligned} I_n &= L \qquad \text{for } n = 0, 1, \ldots, k-2 \\ I_{k-1} &= K \\ I_{mk+n} &= I_n \qquad \text{for } m \in N, n = 0, 1, \ldots, k-1 \end{aligned}$$

となるように区間列 $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ を定義する。つまりこれは最初 I_0 から I_{k-2} までは $k-1$ 回 L という区間が続き，I_{k-1} でそれが K に変わり，さらに I_k 以降は I_0 から I_{k-1} までと同じ構成が繰り返されるような区間列である。(3.1) と (3.2) から，そのような区間列は当然

$$I_n \subset I,\ I_{n+1} \subset \theta(I_n) \qquad \text{for all } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

という条件を満たしている。するとその条件下では，さらに

$$Q_{n+1} \subset Q_n \subset Q_0 = I_0,\ \theta^n(Q_n) = I_n \qquad \text{for all } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.4}$$

となるようなコンパクトな区間列 $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ のとれることが，つぎのような数学的帰納法による推論を用いて示される[(7)]。

事実 $Q_0 = I_0$ と定義すれば，明らかに $\theta^0(Q_0) = Q_0 = I_0$。そこで $\theta^{n-1}(Q_{n-1}) = I_{n-1}$ であるような $Q_{n-1} \subset I_0$ の存在を仮定して，

$$Q_n \subset Q_{n-1} \subset I_0\ ,\ \theta^n(Q_n) = I_n$$

となる Q_n の存在を示す。まず前記の（3.1），（3.2）と区間列 $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ のつくり方，そして数学的帰納法の仮定から

$$I_n \subset \theta(I_{n-1}) = \theta(\theta^{n-1}(Q_{n-1})) = \theta^n(Q_{n-1})$$

となるが，$I_n \subset \theta^n(Q_{n-1})$ であれば，$I_n = [\theta^n(p), \theta^n(q)]$ となるような点 p，q が Q_{n-1} の中にあり，$p < q$ なら

$$r = \max\{y \in [p,q] \mid \theta^n(y) = \theta^n(p)\}$$
$$s = \min\{y \in [p,q] \mid y \geq r, \theta^n(y) = \theta^n(q)\}$$

とすることによって，r，s が決まって $\theta^n([r,s]) = I_n$ となる。そこで $Q_n = [r,s]$ とすれば，それが存在を主張されている Q_n となるのである。$q < p$ のときも同じように考えればよい（第 6 図参照）。

これで Q_n というコンパクト区間が存在して $Q_n \subset Q_{n-1} \subset I_0$，$\theta^n(Q_n) = I_n$ となること，すなわち前記（3.4）の成立することが示せたわけである。以上のところから，とくに n がここで固定された k である場合を考えれば

$$Q_k \subset I_0 = L = I_k$$

となるから，

$$Q_k \subset \theta^k(Q_k)$$

となることが言え，θ^k は Q_k 上に不動点を持つことが分かる。すなわち $Q_k = [\beta_0, \beta_1]$ とすれば $Q_k \subset \theta^k(Q_k)$ から $\theta^k(\alpha_0) = \beta_0$，$\theta^k(\alpha_1) = \beta_1$ となる α_0，$\alpha_1 \in Q_k$ がかならずあり，$\alpha_0 \geq \beta_0 = \theta^k(\alpha_0)$，よって

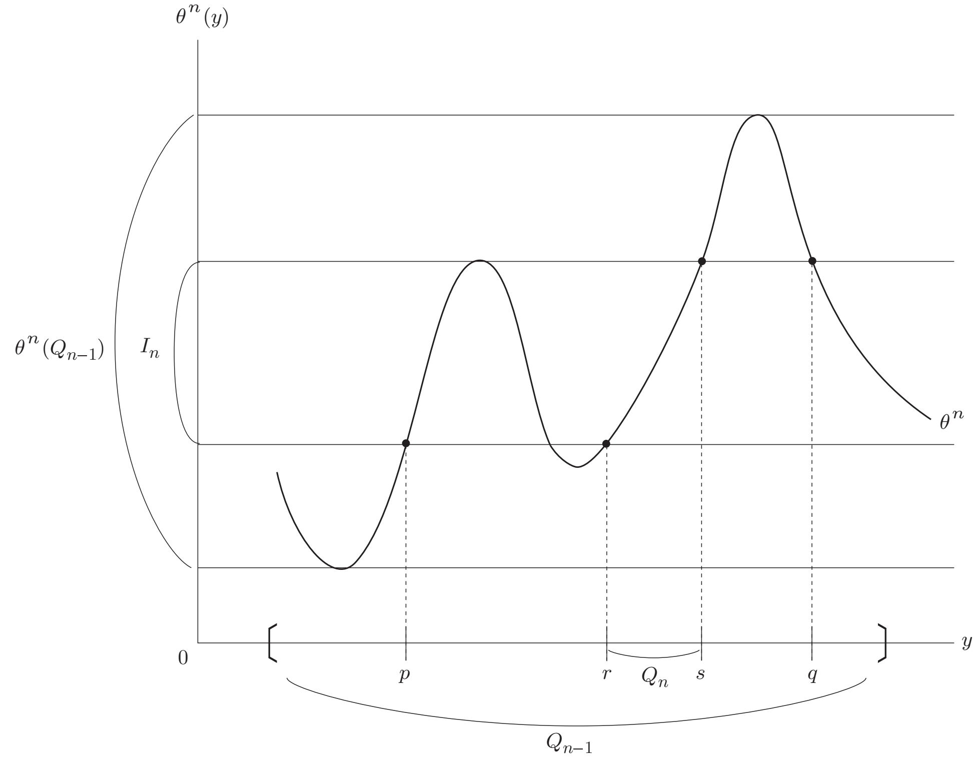
$$\alpha_0 - \theta^k(\alpha_0) \geq 0,$$

同様に

$$\alpha_1 - \theta^k(\alpha_1) \leq 0$$

（7）　この主張の証明については Li and Yorke, *op.cit.*, pp. 987–988 の Lemma 1，また須田，前掲書 pp. 5–6，補助定理 1.3 参照。

第 6 図



となるから，$x - \theta^k(x)$ という関数を考えれば，その連続性から

$$y = \theta^k(y)$$

となるような $y \in Q_k$ がかならず存在するのである。

ここまでの議論で θ^k が Q_k 上に不動点を持つことが知られたので，ここでそれが k 周期解になっていることを示す後段の手順に移る。前にも記したように，そのためには当該の不動点が k より小さい周期を持ちえないことを示せば十分である。

そこでその不動点を $\mathring{Y}_k$ で記し，背理法の仮定として $1 \leq s < k$ のような $s \in N$ に対して

$$\theta^s(\mathring{Y}_k) = \mathring{Y}_k$$

という事態が生じたとしてみよう。すると

$$\theta^{k-1}(\mathring{Y}_k) = \theta^{k-1-s}(\theta^s(\mathring{Y}_k)) = \theta^{k-1-s}(\mathring{Y}_k)$$

となるが，前に示したところから

$$\mathring{Y}_k \in Q_k \subset Q_{k-1-s}$$

となっているから

$$\theta^{k-1-s}(\mathring{Y}_k) \in \theta^{k-1-s}(Q_{k-1-s}) = I_{k-1-s} = L$$

したがって

$$\theta^{k-1}(\mathring{Y}_k) \in L \tag{3.5}$$

となるのでなくてはならない。ところが一方

$$\mathring{Y}_k \in Q_k \subset Q_{k-1}$$

であるところから

$$\theta^{k-1}(\mathring{Y}_k) \in \theta^{k-1}(Q_k) = I_{k-1} = K \tag{3.6}$$

とならねばならず，こうして（3.5）と（3.6）が両立するということは前の K と L の定義から

$$\theta^{k-1}(\mathring{Y}_k) = Y^*$$

となることを意味せざるをえない。すると

$$\theta^{k-1+2}(\mathring{Y}_k) = \theta^{k+1}(\mathring{Y}_k) = \theta^2(Y^*) = \theta(Y^M)$$

ということになり，矛盾が生ぜざるをえない。なぜなら，いまたとえば $k=2$ の場合を考えると，$\mathring{Y}_k$ が不動点であるところから

$$\theta^{k-1}(\mathring{Y}_k) = \theta^{k+1}(\mathring{Y}_k)$$

が成り立つのでなければならないが，$\theta^{k-1}(\mathring{Y}_k) = Y^*$，$\theta^{k+1}(\mathring{Y}_k) = \theta(Y^M)$ という前記の帰結からこれは

$$\theta(Y^M) = Y^*$$

を意味し，$\theta(Y^M) < Y^*$ という目下の仮定と相容れないことになる。また $k \geq 3$ の場合を考えても，

$$\theta^{k+1}(\mathring{Y}_k) = \theta(\theta^k(\mathring{Y}_k)) = \theta(\mathring{Y}_k) \in \theta(Q_k) \subset \theta(Q_1) = I_1 = L$$

となり，この帰結と前に示した $\theta^{k+1}(\mathring{Y}_k) = \theta(Y^M)$ は相容れない。というのは $\theta(Y^M)$ は仮定により $L = [Y^*, Y^M]$ には含まれないからである。

以上の推論によって前段で存在することの示された θ^k の不動点 $\mathring{Y}_k$ は周期 k の周期解であることが示された。そして $k > 1$ は自然数の集合 N から任意に選んだ数であるから，このことと，$k=1$ の場合には周期解の存在が自明に言えたこととによって，すべての自然数 k について周期 k の周期解の存在が示されたことになる。定理 1 証了。

なお定理 1 の仮定 $\theta(Y^M) \leq \theta^{-1}(Y^*) < Y^* < Y^M$ において，もし左の $\leq$ が等号＝で満たされる

とすれば，それは周期 3 の周期解そのものの存在を含意する仮定となる。そうした意味合いにおいてリー＝ヨークたちの定理はまた「周期 3 の周期解が存在するとすれば，すべての k について周期 k の周期解が存在する」という主張を表明したものとも解することができよう。よく知られているように，彼らの定理に先立って，シャルコフスキーは「周期 n の周期解があるとすれば，シャルコフスキーの順序で n のあとにくるすべての k について周期 k の周期解が存在する」という定理を提唱した[(8)]。ここでシャルコフスキーの順序とは

$$
\begin{aligned}
&3 \succ 5 \succ 7 \succ \cdots \\
&\succ 2\cdot 3 \succ 2\cdot 5 \succ 2\cdot 7 \succ \cdots \\
&\cdots\cdots \\
&\succ 2^n\cdot 3 \succ 2^n\cdot 5 \succ 2^n\cdot 7 \succ \cdots \\
&\cdots\cdots \\
&\succ \cdots \succ 2^m \succ 2^{m-1} \succ \cdots \succ 8 \succ 4 \succ 2 \succ 1
\end{aligned}
$$

のように示される順序をいい，まず 3 から始まる奇数を小さい順に並べて，つぎにそれにそれぞれ 2 の巾乗を掛けたものを並べ，最後には 2 の巾乗を大きい順に並べたものである。奇数に 2 の巾乗を掛けた部分で 2 の巾乗以外の自然数をすべて尽くすことになるから，それに 2 の巾乗の部分をつけ足すことによって明らかに自然数のすべてを尽くすことになる。そしてこの順序にあっては 3 が先頭に来ているから，上記のシャルコフスキーの定理は「周期 3 の周期解の存在が，すべての k について周期 k の周期解の存在を保証する」という主張を意味することにもなる。その点で，ここに適用したリー＝ヨークの定理はまたシャルコフスキーの定理の一部を述べ直したものと解することもできるのである。後者は 1964 年，リー＝ヨークの定理より 11 年早く発表されたものであるが，リー，ヨークたちは彼らの論文を書いたときにはシャルコフスキーの論文の存在をまったく知らず，後になってから自分たちの主題に似た主題を扱った論文があることを知らされたとのことである。

読者の理解に資するため，一つの簡単な例として，周期 3 の周期解を持つ θ のグラフと，その同じグラフに周期 5 の周期解をも書き込むことができる事態を図示しておくことにしよう。第 7 図，第 8 図がそれである。

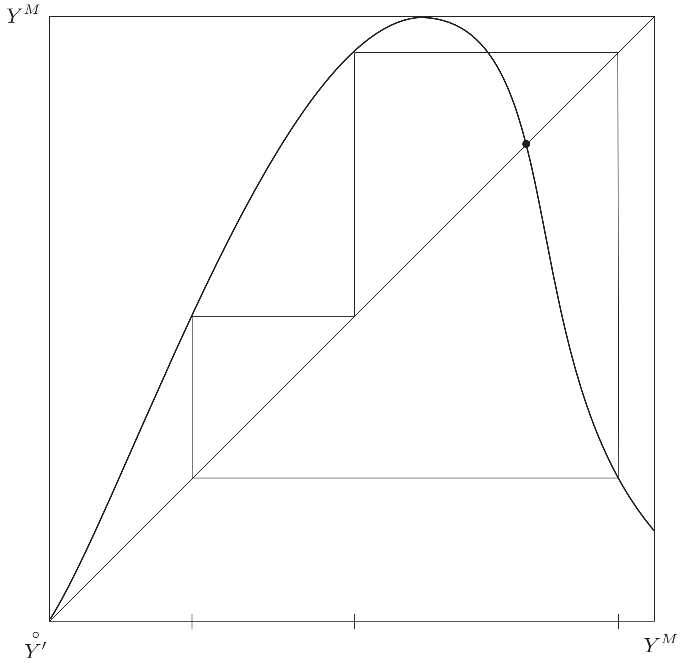
ただしここで注意しなければならないのは，逆に周期 5 の周期解があるからといって周期 3 の周期解がかならずあるとはかぎらないということである。この点については読者みずから事例を思案されるか，あるいはリー＝ヨーク論文の付録 1[(9)] を参照されるかしていただきたい。

---

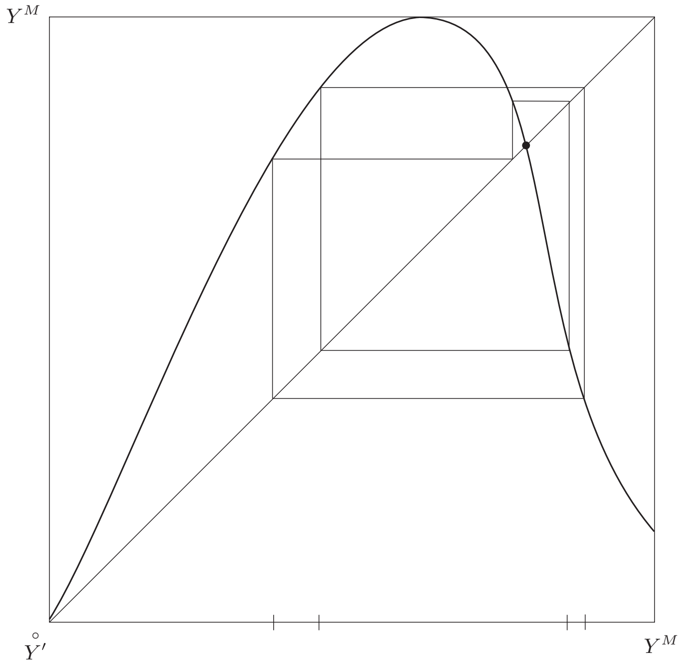
(8)　A. N. Sărkovskii, “Coexistence of Cycles of a Continuous Map of the Line into Itself”, *Ukrainskii Mathematicheskii Zhurnal*, Vol. 16, 1964, pp. 61–71.

(9)　Li and Yorke, *op.cit.*, p. 990.

第 7 図



第 8 図



4

リー＝ヨークの論文で特筆すべき重要な点は，彼らの定理がたんにあらゆる周期の周期解の存在ばかりではなく，併せてまた非周期的なカオス解の存在をも，同じ条件の下で証明している点である。彼らの論文の標題 “Period Three Implies Chaos” はまさにその成果を含意しているのである。

そこでわれわれもまた本節では，当該の主張をとり扱った彼らの定理の後半部分を適用することにより，目下のマクロ経済モデルにも同様にカオス解が存在しうることを基礎づけたいと思う。

このモデルの解がカオスとみなされるために満たされるべき条件としては，まず（1）それが周期解そのものではなく，またその軌道がいかなる周期軌道にも収束しないこと，さらに加えて（2）ある点から出発した軌道とその近傍から出発した軌道がまったく相異なる別個の動きを示すこと，が挙げられよう。いまリー＝ヨークに倣って，これらの条件に精確な数学的表現を与えるとすれば，それはつぎのように述べられるであろう。

Y_p をカオス解，$\mathring{Y}_k$ を任意の周期解とするとき

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\theta^n(Y_p)-\theta^n(\mathring{Y}_k)\right|>0 \tag{4.1}$$

Y_p，Y_q を二つのカオス解とするとき

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\theta^n(Y_p)-\theta^n(Y_q)\right|>0 \tag{4.2}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\theta^n(Y_p)-\theta^n(Y_q)\right|=0 \tag{4.3}$$

（4.1）は，どんな周期解を持ってきても Y_p から出発する軌道とその周期軌道との距離が極限において 0 になることはないということであるから，この条件が，Y_p が周期解ではないこと，また Y_p からの軌道がどんな周期解にも収束しないこと，をいずれながら意味するのは明らかであろう。一方（4.2）と（4.3）は，Y_p からの軌道と Y_q からの軌道の距離が極限において 0 となることがないだけでなく，同時に，どの n をとってもそれより先のどこかでそれら二つの軌道の距離がいくらでも小さくなりうるということであり，これは両者が大きくかけ離れても，また接近することもあって，その差が一方的に発散することはないということを意味している。発散するという事態はある意味では予測可能な出来事であるから，予測できないのがカオスの特性ということで，この条件が要請されているのである。[10]

定理 2　定理 1 と同じ仮定の下で，つぎの諸条件を満たす Y の非可算集合 $S\subset I\equiv[\mathring{Y}', Y^M]$ が存在する。

（A）すべての $Y_p\in S$，すべての周期解 $\mathring{Y}_k\in I$ に対して（4.1）が成立する。

（B）すべての Y_p，$Y_q\in S$，$Y_p\neq Y_q$ に対して（4.2）および（4.3）が成立する。[11]

証　明

このたびも前定理の証明の場合に準じ，なるべく論旨の大筋が直観的に辿れるような形で推論を進めていきたい。

まずは目的に沿う非可算集合 S を具体的に構成することを目指す。そのための手順として，前に定義した $K=[\theta^{-1}(Y^*), Y^*]$，$L=[Y^*, Y^M]$ を用い，無限閉区間列 $M=\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ をつぎの 3 条件を満たすように構成する。

（イ）　すべての n について $M_n=K$ または $M_n\subset L$

（ロ）　すべての n について $\theta(M_n)\supset M_{n+1}$

（ハ）　もし $M_n=K$ ならば，n は平方数，かつ M_{n+1}，$M_{n+2}\subset L$

（イ），（ロ）については説明は不要であろう。（ハ）は分かりやすく言えば $m=1,2,3,4,5,6,7,\cdots$ に対して $M_n=K$ となるのは $n=m^2=1,4,9,16,25,36,49,\cdots$ というように m の 2 乗のところに限られ，さらにその先の二つの M_{n+1}，M_{n+2} については L の部分集合になるということである。たとえば

$$
\begin{array}{ccccccc}
M_1, & M_2, & M_3, & M_4, & M_5, & M_6, & M_7, \cdots \\
\| & \| & \| & \| & \| & \| & \| \\
K & L & L & K & L & L & L
\end{array}
$$

のように M をつくったとすれば,（イ),（ハ）が満たされていることは自明。また $\theta(Y^M)\leq\theta^{-1}(Y^*)<Y^*<Y^M$ という仮定から $\theta(K)\supset L$，$\theta(L)\supset L$，$\theta(L)\supset K$ となっているから（前掲第 5 図参照），（ロ）が満たされていることも容易に分かる。よって所与の仮定の下では，上記の 3 条件を満たすような $M=\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ が少なくとも存在することは明らかである。

そこでつぎにはそのような M の全体から成る集合を $\mathscr{M}$ であらわし，それぞれの $M\in\mathscr{M}$ に対して最初の n 番目までのところで，すなわち $\{M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_n\}$ の中で $M_i=K$ になっているような i の個数を $P(M,n)$ であらわす。たとえば前掲の例で言えば $P(M,1)=1$，$P(M,4)=2$，$P(M,7)=2$，$\cdots$である。そして続く手順として $r\in(\frac{3}{4},\ 1)$ のようなそれぞれの r に対し

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(M^r,n^2)}{n}=r \tag{4.4}$$

となるような $M^r=\{M_n^r\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathscr{M}$ から選ぶことにする。

（10）（4.1）および（4.2),（4.3）のような条件によるカオスの定義は位相的カオス（topological chaos）と呼ばれるものに当っており，また別のカオスの定義にはエルゴード・カオス（ergodic chaos）と呼ばれるものもある。これらについては西村和雄・矢野誠『マクロ経済動学』，岩波書店，2007，p. 210 および pp. 216–217 を参照されたい。

位相的カオスの概念が含む問題点については Michele Boldrin and Michael Woodford, “Equilibrium Models Displaying Endogenous Fluctuations and Chaos”, *Journal of Monetary Economics*, March 1990, p. 196 参照。

（11） Li and Yorke, *op.cit.*, p. 987, Theorem 1 の後半部，T2 参照。

そのような M^r が選べる事情については，つぎのように考えてみればよい。たとえばいまある M が

$$\begin{array}{l} K\ \ L\ \ L\ \ K\ \ L\ \ L\ \ L\ \ L\ K\ L\ \ L\ \ L\ \ L\ \ L\ \ L\ K\ L\ \ L\ \cdots \\ 1\ \ \ 2\ \ \ 3\ \ \ 4\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ 9\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 16\cdots\cdots \end{array}$$

のような構成をとっているとすれば，$P(M,\ 1) = 1^*$, $P(M,\ 2) = 1$, $P(M,\ 3) = 1$, $P(M,\ 4) = 2^*$, $P(M,\ 5) = 2, \cdots, P(M,\ 9) = 3^*, \cdots, P(M,\ 16) = 4^*$，のようになっているから，ここで＊をつけたところだけを抜き出してみれば，$P(M, n^2) = n$ すなわち

$$\frac{P(M, n^2)}{n} = 1$$

となっている。そこでつぎに上記の M の最初の $M_1 = K$ の部分を L に置き換えたものを M' とすれば，$P(M', n^2) < n$ すなわち

$$\frac{P(M', n^2)}{n} < 1$$

となり，同様にして他のいくつかの K を L に置き換えていくほど $P(M'', n^2)/n$ はいっそう 1 より小さくなっていく。したがって，そのような操作を適当に行えば，r を 3/4 と 1 のあいだに任意に決めたとき，その r に対して（4.4）を満たすような M^r を見出すことができるのである。

よってそのような M^r が選べるものとして，それらの M^r の集合を

$$\mathscr{M}_0 = \left\{ M^r \,\middle|\, r \in \left(\frac{3}{4}, 1\right) \right\} \subset \mathscr{M}$$

と定義する。すると $r_1 \neq r_2$ であれば明らかに $M^{r_1} \neq M^{r_2}$ であるから，$\mathscr{M}_0$ は非加算集合であるほかはない。

さて，前記（イ）によって M_n^r は K であるか L に含まれるかのいずれかであり，（ロ）によって $\theta(M_n^r) \supset M_{n+1}^r$ となっているから，$\{M_n^r\}_{n=1}^{\infty}$ は前定理の証明中 $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ が満たしていた条件すなわち

$$I_n \subset I,\ \theta(I_n) \supset I_{n+1} \qquad \text{for all } n = 0, 1, 2, ...$$

という条件をすべて満たしている。ゆえに同定理の該当箇所で数学的帰納法を用いて導いた帰結が $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ に入れ替えてもあてはまり，

$$Q_{n+1} \subset Q_n \subset Q_1 = M_1^r,\ \theta^n(Q_n) = M_n^r \text{ for all } n = 1, 2, \ldots$$

したがって

$$\theta^n(Y) = M_n^r \text{ for all } Y \in Q \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n \text{ and for all } n \in N$$

となるようなコンパクトな区間列 $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ がとれることになる。よって当然 $\theta^n(Y^r) \in M_n^r$ for all $n = 1, 2, \ldots$ を満たすある Y^r が I の中に存在するという帰結を得る。

目指された S の構成は，ここで

$$S = \left\{ Y^r \;\middle|\; r \in \left(\frac{3}{4}, 1 \right) \right\}$$

とすることによって達成されるのである。それが非加算集合となることは，つぎのような推論から明らかとなる。いま $r_1 \neq r_2$ であるにもかかわらず，$Y^{r_1} = Y^{r_2}$ であったと仮定してみよう。すると $r_1 \neq r_2$ なら $M^{r_1} \neq M^{r_2}$ であるから，ある自然数の 2 乗の番のところすなわち m^2 番目のところで $M^{r_1}_{m^2} = K$，$M^{r_2}_{m^2} = L$ となっている。ところが $\theta^{m^2}(Y^{r_1}) \in M^{r_1}_{m^2}$，$\theta^{m^2}(Y^{r_2}) \in M^{r_2}_{m^2}$ であるから，$Y^{r_1} = Y^{r_2}$ すなわち $\theta^{m^2}(Y^{r_1}) = \theta^{m^2}(Y^{r_2})$ であれば，同じものが $M^{r_1}_{m^2}$ すなわち K にも $M^{r_2}_{m^2}$ すなわち L にも含まれていなければならないということで，これは $K = [\theta^{-1}(Y^*), Y^*]$，$L = [Y^*, Y^M]$ という定義から

$$\theta^{m^2}(Y^{r_1}) = \theta^{m^2}(Y^{r_2}) = Y^*$$

であることを意味せざるをえない。すると設定により $\theta(Y^*) = Y^M$，$\theta(Y^M) \leq \theta^{-1}(Y^*)$ であるところから

$$\theta^{m^2+1}(Y^{r_1}) = Y^M,\ \theta^{m^2+2}(Y^{r_1}) \leq \theta^{-1}(Y^*) \notin L \tag{4.5}$$

という帰結が成立するほかはない。ところが一方，$M^{r_1}_{m^2} = K$ から $M^{r_1}_{m^2+1} \subset L$，$M^{r_1}_{m^2+2} \subset L$ であるから，

$$\theta^{m^2+2}(Y^{r_1}) \in M^{r_1}_{m^2+2} \subset L \tag{4.6}$$

ということになって，これは明らかに（4.5）と矛盾する。ゆえに $r_1 \neq r_2$ なら $Y^{r_1} \neq Y^{r_2}$ となるのでなくてはならない。

これで S は非可算集合となることが示されたが，つぎにこの S に含まれる Y について前の記号に準じて $\theta^i(Y) \in K$，$i \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ となるような i の個数を $P(Y, n)$ とすると，すべての n に対して

$$P(Y^r, n) = P(M^r, n)$$

となることを示す。

そのことを示すために，まず目下の仮定の下では決して $\theta^i(Y^r) = Y^*$ とはならないことを示すとしよう。事実もし $\theta^i(Y^r) = Y^*$ であったとすれば，$\theta^{i+1}(Y^r) = Y^M$，$\theta^{i+2}(Y^r) = \theta(Y^M)$ となり，$\theta(Y^M)$ は L に含まれないから，$\theta^{i+2}(Y^r) \notin L$ すなわち $\theta^{i+2}(Y^r) \in K$ ということにならざるをえない。これは $\theta(Y^M) \geq \theta^{-1}(Y^*)$ を意味するが，一方仮定により $\theta(Y^M) \leq \theta^{-1}(Y^*)$ であるから，結局 $\theta(Y^M) = \theta^{-1}(Y^*)$ すなわち $\theta^{i+3}(Y^r) = Y^*$ ということで，Y^r は 3 周期解となるほかはないのである。すると Y^r の軌道は Y^*，Y^M，$\theta(Y^M)$ という動きを繰り返していることになり，ここで $\theta(Y^M)$ のところはかならず K に含まれることになっている。ところが前記（ハ）の条件から

$M_n = K$ になるところは n がある整数 m の 2 乗 m^2 になっていなければならないはずであるから，これは矛盾である。なぜなら 3 周期解の場合は，ある $\theta(Y^M)$ がある整数の 2 乗のところ，たとえば $4 = 2^2$ のところ，にくれば，つぎの $\theta(Y^M)$ は $n = 7$ のところにくるわけで，決してある整数の 2 乗のところにはこないからである。

したがって $\theta^i(Y^r) \neq Y^*$ となることが言えたので，$\theta^i(Y^r) \in K$ なら $\theta^i(Y^r) \notin L$，よって $M_i^r = K$ となるのでなくてはならず，また逆に $M_i^r = K$ なら $\theta^i(Y^r) \in K$ となるのでなくてはならない。ゆえに $P(M^r, n)$ は $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ の中で $M_i^r = K$ となる i の個数，一方 $P(Y^r, n)$ は $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ の中で $\theta^i(Y^r) \in K$ となる i の個数という定義に照らして，すべての n について $P(Y^r, n) = P(M^r, n)$ となることが示されたわけである。そしてこの帰結から当然 $P(Y^r, n^2) = P(M^r, n^2)$ と考えてもよく，ここで

$$\rho(Y^r) = \lim_{n\to\infty} \frac{P(Y^r, n^2)}{n}$$

と定義すれば，上記の帰結と（4.4）により

$$\rho(Y^r) = r$$

ということになるのである。

さて以上のところを基礎工事として，ここからストレートに定理の帰結を導く推論に入る。便宜上まず（4.2）の成立を示すことから始めよう。

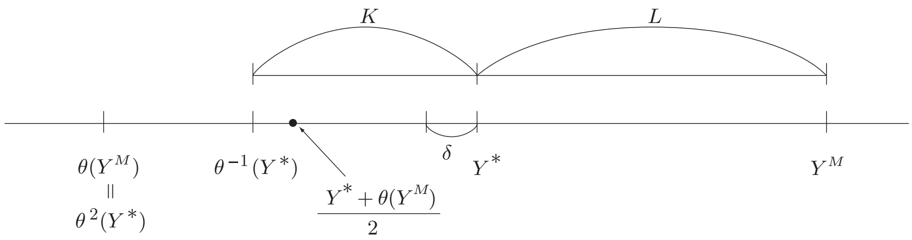
最初にすべての Y_p，$Y_q \in S$，$Y_p \neq Y_q$ に対して $\theta^n(Y_p) \in K$ かつ $\theta^n(Y_q) \in L$ となる n が無限個あるか，または $\theta^n(Y_p) \in L$ かつ $\theta^n(Y_q) \in K$ となる n が無限個あるという主張が成り立つことを示す。$Y_p \neq Y_q$ なら当然 $\rho(Y_p) \neq \rho(Y_q)$ であるが，さしあたり $\rho(Y_p) > \rho(Y_q)$ として推論を進める。$n \to \infty$ に応じて

$$\frac{P(Y_p, n^2) - P(Y_q, n^2)}{n} \ \to\ \rho(Y_p) - \rho(Y_q)$$

となるわけであるから，$\rho(Y_p) - \rho(Y_q) > 0$ である以上，分母の $n \to \infty$ となるときには，分子の $P(Y_p, n^2) - P(Y_q, n^2)$ もまた $\to \infty$ となるのでなくてはならない。ところで $P(Y_p, n^2)$ は $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n^2\}$ の中で $\theta^i(Y_p) \in K$ となる i の個数であり，同様に $P(Y_q, n^2)$ は $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n^2\}$ の中で $\theta^i(Y_q) \in K$ となる i の個数であるから，$P(Y_p, n^2) - P(Y_q, n^2) \to \infty$ ということは，$n \to \infty$ のとき $\theta^i(Y_p) \in K$ となる i の個数のほうが $\theta^i(Y_q) \in K$ となる i の個数よりも ∞ 個多くなくてはならないということであり，そのことから明らかに $\theta^i(Y_p) \in K$ で $\theta^i(Y_q) \in L$ となるような i が無限個あることが知られるのである。一方，$\rho(Y_p) < \rho(Y_q)$ とするならば，同様の推論をつうじて $\theta^i(Y_p) \in L$ で $\theta^i(Y_q) \in K$ となるような i が無限個あることが示されうるであろう。

つぎにある $\delta > 0$ が存在して，もし $Y_p \in S$ かつ $\theta^n(Y_p) \in K$ であるならば，$\theta^n(Y_p) < Y^* - \delta$ となることを示したい。いま仮定から $\theta^2(Y^*) = \theta(Y^M) \leq \theta^{-1}(Y^*)$ であることを考えれば，ある

第 9 図



$\delta > 0$ に対して $Y \in [Y^* - \delta, Y^*]$ であるような Y^* の近傍の点 Y すべてについて θ^2 の連続性から $\theta^2(Y)$ もまた $\theta^2(Y^*)$ すなわち $\theta(Y^M)$ の近傍に含まれることになり，したがって

$$\theta^2(Y) < \frac{Y^* + \theta(Y^M)}{2}$$

と考えてよいことになる。つまり $\theta^2(Y)$ は $\theta(Y^M)$ と Y^* の中央点よりも左にくると考えてよいのである。するとそのことから当然 $\theta^2(Y) \notin L$ という帰結が導かれる（第 9 図参照）。

さて推論のこの段階で，示したい主張の仮定となっていた $Y_p \in S$ かつ $\theta^n(Y_p) \in K$ のような Y_p を考えるとしよう。そのような Y_p については

$$\theta^{n+2}(Y_p) \in L$$

となっているのでなくてはならない。なぜなら $\theta^n(Y_p) \in K$ ということは，そこでの n が 1，4，9，16，25，$\cdots$ のように平方数になっていることを意味し，そのとき $n+2$ は平方数にはなりえないからである。するとこのことから，$\theta^{n+2}(Y_p)$ の二つ前の $\theta^n(Y_p)$ については

$$\theta^n(Y_p) \notin [Y^* - \delta, Y^*]$$

が成り立たねばならないことになる。その理由を知るには，前に得た帰結

$$Y \in [Y^* - \delta, Y^*] \ \Rightarrow \ \theta^2(Y) < \frac{Y^* + \theta(Y^M)}{2} \ \Rightarrow \ \theta^2(Y) \notin L$$

の対偶

$$\theta^2(Y) \in L \ \Rightarrow \ Y \notin [Y^* - \delta, Y^*]$$

をとってみればよい。この Y に $\theta^n(Y_p)$ をあてはめれば，$\theta^2(\theta^n(Y_p)) = \theta^{n+2}(Y_p) \in L$ となることはすでに示したとおりであるから，ただちに $\theta^n(Y_p) \notin [Y^* - \delta, Y^*]$ という結果を得るのである。こうして $\theta^n(Y_p)$ は $[Y^* - \delta, Y^*]$ には含まれず，しかも仮定から K に含まれているのであるから，$Y^* - \delta$ の左側に含まれるほかはない。よって以上の推論から，$Y_p \in S$，$\theta^n(Y_p) \in K$ なら $\theta^n(Y_p) < Y^* - \delta$ となることが示された。

ここまでのところで，すべての Y_p，$Y_q \in S$，$Y_p \neq Y_q$ に対して（4.2）が成り立つことを示す根拠は大方整ったことになる。前に示したように $\theta^n(Y_p) \in K$ かつ $\theta^n(Y_q) \in L$ となるような n が無限個あるなら，そのどれについても $\theta^n(Y_p) \in K$ であるところから上記の帰結

$$\theta^n(Y_p) < Y^* - \delta$$

が成り立っており，また $\theta^n(Y_q) \in L$ であるところから

$$\theta^n(Y_q) \geq Y^*$$

である。つまり $\theta^n(Y_p)$ は $Y^* - \delta$ の左にあり，$\theta^n(Y_q)$ は Y^* そのものかあるいはその右にあるわけであるから，明らかに

$$\left|\theta^n(Y_p) - \theta^n(Y_q)\right| > \delta > 0$$

となっている。しかも無限個あるどの n についてもこの関係が成り立ち, どこまでいっても $\left|\theta^n(Y_p) - \theta^n(Y_q)\right|$ が δ より大きいということは，結局

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\theta^n(Y_p) - \theta^n(Y_q)\right| \geq \delta > 0$$

が成り立つということにほかならないのである。$\theta^n(Y_p) \in L$ かつ $\theta^n(Y_q) \in K$ となるような i が無限個あるときも，同様にすればよい。

つぎに（4.1）が成り立つことの証明に移ろう。この場合の推論も大略前の（4.2）の場合に準ずるが，以下区間 $I \equiv [\mathring{Y}', Y^M]$ から任意に選ばれる周期解 $\mathring{Y}_k$ について $\theta^i(\mathring{Y}_k) < Y^*$ となるような i があるときと，すべての i について $\theta^i(\mathring{Y}_k) \geq Y^*$ となるときの二つのケースに分けて述べていくことにする。

まず第一のケースでは，当該の i について $\theta^i(\mathring{Y}_k) < Y^*$ であるところから，$\theta^i(\mathring{Y}_k) \leq Y^* - \varepsilon$ となるような $\varepsilon > 0$ があり，したがって

$$\theta^i(\mathring{Y}_k) = \theta^{i+k}(\mathring{Y}_k) = \theta^{i+2k}(\mathring{Y}_k) = \cdots \leq Y^* - \varepsilon$$

となっている。一方 S から任意に選ばれる Y_p については $\theta^i(Y_p)$, $\theta^{i+k}(Y_p)$, $\theta^{i+2k}(Y_p)$, のうち i, $i+k$, $i+2k$, が平方数になるものには K に含まれるものもあるが, 平方数にならないものも無限個あり, したがって無限回 L に含まれることになる。それらの $\theta^i(Y_p)$, $\theta^{i+k}(Y_p)$, $\theta^{i+2k}(Y_p)$, は当然 $\geq Y^*$ ということになるから, 以上のところから $\left|\theta^i(Y_p) - \theta^i(\mathring{Y}_k)\right|$, $\left|\theta^{i+k}(Y_p) - \theta^{i+k}(\mathring{Y}_k)\right|$, $\left|\theta^{i+2k}(Y_p) - \theta^{i+2k}(\mathring{Y}_k)\right|$, は無限回 ε 以上になる。よって

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\theta^n(Y_p) - \theta^n(\mathring{Y}_k)\right| > 0$$

が成立することになる。

つぎに第二のケースにおいては，まずすべての i について $\theta^i(\overset{\circ}{Y}_k) \geq Y^*$ である。一方 Y_p については，前に示したように $\theta^n(Y_p) \in K$ なら $\theta^n(Y_p) < Y^* - \delta$ となるような $\delta > 0$ がかならず存在する。しかも $\theta^n(Y_p) \in K$ となるような n は無限個ある。なぜなら Y_p は S から選ばれたのであるから，S の定義により $r \in (\frac{3}{4},\ 1)$ でなければならず，したがって $\lim_{n\to\infty} P(Y_p, n^2)/n = r$ となるためには $P(Y_p, n^2)$ すなわち $\theta^i(Y_p) \in K$ となる i の個数もまた無限個なければならないからである。よって以上の推論をまとめて $\left|\theta^n(Y_p) - \theta^n(\overset{\circ}{Y}_k)\right| \geq \delta > 0$ となる n が無限個あることになり，

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\theta^n(Y_p) - \theta^n(\overset{\circ}{Y}_k)\right| > 0$$

となることが知られる。

最後に（4.3）が成立することを示す。ここでは記号の煩雑化を避けるため，以下 $\theta^{-1}(Y^*) = a$, $Y^* = b$, $Y^M = c$, $\theta(Y^M) = d$ と略記することを許されたい。仮定から $\theta(b) = c$, $\theta(c) = d \leq a$ であるが，まずは $b = b^0$, $c = c^0$ として，$[b^0,\ c^0]$ から始まりつぎの 3 条件を満たすような区間列 $[b^n,\ c^n]$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ を考える。

（i） $[b^0, c^0] \supset [b^1, c^1] \supset \cdots \supset [b^n, c^n] \supset \cdots$

（ii） $\theta(Y) \in (b^n, c^n) \qquad \text{for all } Y \in (b^{n+1}, c^{n+1})$

（iii） $\theta(b^{n+1}) = c^n,\ \theta(c^{n+1}) = b^n$

ここで $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} [b^n, c^n]$ とするとき $A \neq \varnothing$ であるから，$b^* = \inf A$, $c^* = \sup A$ と定義すれば $\lim_{n\to\infty} b^n = b^*$, $\lim_{n\to\infty} c^n = c^*$, よって

$$\begin{aligned} c^* &= \lim_{n\to\infty} \theta(b^{n+1}) = \theta\left(\lim_{n\to\infty} b^{n+1}\right) = \theta(b^*) \\ b^* &= \lim_{n\to\infty} \theta(c^{n+1}) = \theta\left(\lim_{n\to\infty} c^{n+1}\right) = \theta(c^*) \end{aligned}$$

である。

さて（4.3）の成立を証明するためには，ここで無限区間列 M の選び方をさらに特定化するのでなくてはならない。これまで $M_i = K$ となっているような i は平方数としてきたが，以下ではさらに加えて，もし $i = n^2$ および $i = (n+1)^2$ のいずれについても $M_i = K$ となっているならば，$i = n^2 + (2j-1)$, $j = 1, 2, \cdots, n$ については $M_i = [b^{2n-(2j-1)}, b^*]$, $i = n^2 + 2j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ については $M_i = [c^*, c^{2n-2j}]$ になっているとし，平方数ではない残りの i についてはすべて $M_i = L$ になっているとする。これを分かりやすく再述すれば，$i = n^2 + (2j-1)$, $j = 1, 2, \cdots, n$ というのは $j = 1$ なら $i = n^2 + 1$, $j = 2$ なら $i = n^2 + 3, \cdots, j = n$ なら $i = n^2 + (2n-1) = (n+1)^2 - 2$, ということであり，また $i = n^2 + 2j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ というのは $j = 1$ なら $i = n^2 + 2$, $j = 2$ なら

$i=n^2+4,\cdots,j=n$ なら $i=n^2+2n=(n+1)^2-1$，ということである。つまりそれらを交互に入れれば $i=n^2$ と $(n+1)^2$ のあいだが $n^2+1,\ n^2+2,\ n^2+3,\ n^2+4,\cdots,(n+1)^2-2,\ (n+1)^2-1$ のようにすべて埋まるということなのである。そして $b^{2n-(2j-1)}$ というのは $j=1$ なら b^{2n-1}，$j=2$ なら $b^{2n-3},\cdots,j=n$ なら b であり，c^{2n-2j} というのは $j=1$ なら c^{2n-2}，$j=2$ なら $c^{2n-4},\cdots,j=n$ なら c^0 であるから，$M_{n^2}=K$ と $M_{(n+1)^2}=K$ のあいだには $M_{n^2+1}=[b^{2n-1},b^*]$，$M_{n^2+2}=[c^*,c^{2n-2}]$，$M_{n^2+3}=[b^{2n-3},b^*]$，$M_{n^2+4}=[c^*,c^{2n-4}],\cdots,M_{(n+1)^2-2}=[b^0,b^*]$，$M_{(n+1)^2-1}=[c^*,c^0]$ のように，$M_i=[b^{2n-(2j-1)},b^*]$ と $M_i=[c^*,c^{2n-2j}]$ が交互に現れることになっている。たとえば $n=2$ のとき $M_4=M_9=K$ であれば，そのあいだは $M_5=[b^3,b^*]\subset L$，$M_6=[c^*,c^2]\subset L$，$M_7=[b^1,b^*]\subset L$，$M_8=[c^*,c^0]\subset L$ となり，$M_{16}=K$ であれば，M_9 に続く M_{10}，$M_{11},\cdots,M_{15}$ もまた $M_5,\cdots,M_8$ と同じようにつくられる。

このようにして前掲の条件（イ），（ロ），（ハ）を満たす M に修正を加えても，その結果として得られる $\{M_i\}$ は（イ），（ロ），（ハ）をすべて満たしている。事実 $M_{n^2}=K$，$M_{(n+1)^2}=K$ ならば，つくり方からあいだの M_i はすべて $\subset L$，よって（イ）と（ハ）が満たされることは自明。そして（ロ）もまた満たされることは，つぎのような推論から容易に分かる。まず M_{n^2}，M_{n^2+1} については $\theta(K)\supset L$，$M_{n^2}=K$，$M_{n^2+1}\subset L$ であるところから $\theta(M_{n^2})\supset M_{n^2+1}$ は明らか。つぎに M_{n^2+1}，M_{n^2+2} について見ると，$M_{n^2+1}=[b^{2n-1},b^*]$，$M_{n^2+2}=[c^*,c^{2n-2}]$ で，前に掲げた条件（iii）から $\theta(b^{2n-1})=c^{2n-2}$，また $\theta(b^*)=c^*<c^{2n-2}$ であるから，$\theta([b^{2n-1},b^*])$ は 2 点 c^{2n-2}，c^* を含み，よって $\theta([b^{2n-1},b^*])\supset[c^*,c^{2n-2}]$ となって，$\theta(M_{n^2+1})\supset M_{n^2+2}$。以下 $M_{(n+1)^2-2}$，$M_{(n+1)^2-1}$ のところまでは同様に考えていけばよい。最後に $M_{(n+1)^2-1}\subset L$，$M_{(n+1)^2}=K$ について $\theta(M_{(n+1)^2-1})\supset M_{(n+1)^2}$ となることは，$\theta(c^*)=b^*$，$\theta(c^0)=\theta(c)=d\leq a$ であることから $\theta(M_{(n+1)^2-1})=\theta([c^*,c^0])\supset[d,b^*]\supset K$ となることを考えれば，当然明らかである。よって目下の $\{M_i\}$ は（イ），（ロ），（ハ）の条件をすべて満たすことが判明した。

そこで r を $r\in(\frac{3}{4},\ 1)$ として任意に選び，その r に対して M^r を上記の条件にさらに加えて（4.4）をも満たすように決めるならば，それで（4.3）の成立を証明する準備は全部揃ったことになる。[12]

証明の最後のステップはつぎのように進行する。いま前のように $S=\{Y_r\mid r\in(\frac{3}{4},\ 1)\}$ と定義し，Y_r，$Y_{r^*}\in S$，$r\neq r^*$ とすれば，$n\to\infty$ とするとき $b^n\to b^*$，$c^n\to c^*$ となるところから，すべての $\varepsilon>0$ に対して

$$|b^n-b^*|<\frac{\varepsilon}{2},\ |c^n-c^*|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad\text{for all } n>\bar{n}$$

となるような $\bar{n}$ が存在する。ここで $i=n^2$ ならびに $(n+1)^2$ のいずれについても $M_i^r=M_i^{r^*}=K$

（12） 実際には，（4.1），（4.2）を示すときに用いた M^r も，ここでの追加的条件を満たすように決められていたと考えるべきである。それによって初めて，（4.1），（4.2），（4.3）に共通の S の存在が言えることになるからである。

となる n に対して，M^r のつくり方から

$$\theta^{n^2+1}(Y_r) \in M^r_{n^2+1} = [b^{2n-1}, b^*]$$

が成り立ち，また同様に

$$\theta^{n^2+1}(Y_{r^*}) \in M^{r^*}_{n^2+1} = [b^{2n-1}, b^*]$$

が成り立つ。ゆえにもし $2n-1 > \bar{n}$ なら上記の命題から

$$\left| b^{2n-1} - b^* \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となり，当然

$$\left| \theta^{n^2+1}(Y_r) - \theta^{n^2+1}(Y_{r^*}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

という帰結を得る。ところがすべての r, $r^* \in (\frac{3}{4},\ 1)$ に対して $i = n^2$ ならびに $(n+1)^2$ のいずれについても $M^r_i = M^{r^*}_i = K$ となる n は無限個あるから，$2n-1 > \bar{n}$ という条件を満たす n も無限個あり，したがって上記の不等式を成り立たしめる n も無限個あると考えてよい。よって

$$\lim_{n\to\infty} \left| \theta^{n^2+1}(Y_r) - \theta^{n^2+1}(Y_{r^*}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ということになり，しかも ε はすべての $\varepsilon > 0$ から任意に選んだのであるから，結局

$$\liminf_{n\to\infty} \left| \theta^{n^2+1}(Y_r) - \theta^{n^2+1}(Y_{r^*}) \right| = 0$$

が成り立たねばならないことになる。定理 2 証了。

5

以上を総括するに，本稿ではまずわれわれのマクロ経済モデルに内生的な周期解が存在すること，しかもいかなる周期の周期解もが存在することを立証し，ついでさらに加えて，非周期的なカオス解から成る Y の非可算集合もまた存在することを併せて立証した。これらの帰結に照らして言えば，当該のモデルはことのほか多様な経済の変動形態を包含することができ，とりわけ後者の帰結は，カオス現象の解明が外生的モデルのパテントであるかのごとくに説く一部の論者の主張を反証するに足りるであろう。

しかし，ここで顧みて反面，あらゆる周期の周期解もカオス解もすべてが押しなべて存在可能という帰結は，十分に一般的ではあるものの「何でもあり」と言うに近く，ある意味では開放的でありすぎて，いささか具体性，限定性に欠ける憾みがあるようにも思われる。なかんずく本稿のモデルは，非線形の内生的モデルという点では前書きでも触れたカルドアやグッドウィンの極限循環モ

デルの同類であり，したがってそれらと通底するいくつかの特性をも含んでいるはずである。そこで筆者たちとしては，さらにそのような視点から仮定をいっそう限定化することにより，本稿のモデルがまた多数の周期解の中に安定な周期解を持ち，そしてそのような安定周期解は高々 1 個に限られることをも，つぎに示すことを企図したい。

（名誉教授）

（経済学部教授）