Title	経済分析の歴史における経済数量の認識と表現形式について : Debreu コンジェクチャーの視点から
Sub Title	Preception and representation of economic quantity in the history of economic analysis from the point of view of the debreu conjecture
Author	山崎, 昭(Yamazaki, Akira)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2010
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.103, No.1 (2010. 4) ,p.25- 51
JaLC DOI	10.14991/001.20100401-0025
Abstract	経済分析の理論的枠組みを形成する一般均衡理論はWalrasによって創始されたが, 理論的· 数学的な観点からは, その基本的枠組みは一連の均衡解の存在証明の中で確立を見たと言える。本稿では, この現代経済理論の基本的枠組みにおける経済の数量および変量に関する認識, およびその代表的表現形式である需要概念を中心に, 「Debreu コンジェクチャー」の視点から考察する。 Although the general equilibrium theory that forms the theoretical framework of economic analysis has been the created by Walras, from the theoretical and mathematical perspectives, the basic framework was established through the proof of existence in a series of equilibrium solutions. This study examines the perception related to economic quantities and variables in the basic framework of modern economic theory, as well as the concept of demand as its typical representation form, from the perspective of the Debreu Conjecture.
Notes	特集 : 経済学のエピメーテウス
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20100401-0025

経済分析の歴史における経済数量の認識と表現形式について―Debreu コンジェクチャーの視点から―

Perception and Representation of Economic Quantity in the History of Economic Analysis from the Point of View of the Debreu Conjecture

山崎 昭(Akira Yamazaki)

経済分析の理論的枠組みを形成する一般均衡理論は Walras によって創始されたが，理論的・数学的な観点からは，その基本的枠組みは一連の均衡解の存在証明の中で確立を見たと言える。本稿では，この現代経済理論の基本的枠組みにおける経済の数量および変量に関する認識，およびその代表的表現形式である需要概念を中心に，「Debreu コンジェクチャー」の視点から考察する。

Abstract

Although the general equilibrium theory that forms the theoretical framework of economic analysis has been the created by Walras, from the theoretical and mathematical perspectives, the basic framework was established through the proof of existence in a series of equilibrium solutions. This study examines the perception related to economic quantities and variables in the basic framework of modern economic theory, as well as the concept of demand as its typical representation form, from the perspective of the Debreu Conjecture.

「三田学会雑誌」103 巻 1 号（2010 年 4 月）

経済分析の歴史における経済数量の認識と表現形式について

——Debreu コンジェクチャーの視点から——*

山　崎　　　昭

要　　旨

経済分析の理論的枠組みを形成する一般均衡理論は Walras によって創始されたが，理論的・数学的な観点からは，その基本的枠組みは一連の均衡解の存在証明の中で確立を見たと言える。本稿では，この現代経済理論の基本的枠組みにおける経済の数量および変量に関する認識，およびその代表的表現形式である需要概念を中心に，「Debreu コンジェクチャー」の視点から考察する。

キーワード

経済分析の歴史，経済数量，一般均衡理論，需要概念，Debreu コンジェクチャー

1　イントロダクション

経済分析の理論的枠組みを形成する一般均衡理論は Walras [15] によって創始されたが，理論的・数学的な観点からは，その基本的枠組みは 1950–60 年代の一連の均衡解の存在証明の中で確立を見たと言えるであろう。Debreu [6] はその中で一つの代表的な理論構造を示すものである。本稿では，この現代経済理論の基本的枠組みにおける経済の数量および変量に関する認識，およびその代表的表現形式である需要概念を中心に，経済分析の歴史におけるそうした経済数量や変量に対する認識の現代経済理論からの解釈を，「Debreu コンジェクチャー」の視点から考察することを目的としている。

1.1　Debreu コンジェクチャー

Gerard Debreu は Econometric Society における会長講演において，経済理論におけるつぎのよ

＊　本稿は科学研究費補助金基盤研究（C）課題番号 19530160 による支援を受けた研究の一部としてまとめられたものである。

うなコンジェクチャーを表明した。

> One expects that if the measure ν is suitably diffused over the space A (of economic agents' characterisitics), integration over A of the demand *correspondences* of the agents will yield a total *demand function*, possibly even a total demand function of class C^1.

このコンジェクチャーが表明された講演におけるDebreuの論文は「Smooth Preferences」であり（Debreu [7, p.614]），消費者の選好関係への微分可能な構造の導入を図ることによって，消費者の行動を表現する需要関数が微分可能となる条件を明らかにした。Debreuのコンジェクチャーは，経済を構成する人々を特徴付ける選好関係や財の初期保有量等の分布を考えたとき，それが何らかの意味で拡散（diffuse）していれば，個々の構成員の需要が対応であっても，全体の総需要は需要関数，さらには，C^1級の需要関数になる場合があるのではないか，ということを研究者に問い掛けたものである。

Debreuコンジェクチャーは，1970–80年代のBerkelyを研究拠点とした一般均衡理論の研究に影響を与えた。このコンジェクチャーの意義は，経済分析の歴史における経済数量の認識と表現形式に深く関わるものであることから，本稿はこのような視点から経済分析の歴史を振り返ることを目的としている。

まず，コンジェクチャーの背景を形成する理論的枠組みを確認しておきたい。

1.2　関連する理論的枠組み

前提となる理論的枠組みは，1950–60年代を通して確立された一般均衡理論における基礎的表現形式である。基本的な表現形式の構成要素は，

（1）経済構成員の集団
（2）財の集合
（3）財の価格
（4）市場均衡

である。これら構成諸要素の数学的表現はつぎのように与えられる。経済構成員の集団は，有限集合もしくはアトムレス測度空間で与えられ，財の集合（財空間）について，有限種類の財の場合は財の数ℓに対応しℓ次元のユークリッド空間$\mathbb{R}^\ell$，無限種類の財の場合は線形位相空間Lで与えられる。財の価格は財空間の双対空間となる。また，市場均衡を形成する経済変数は需要対応（もしくは需要関数）や供給対応を用いて表現される。

ここで基本となるのは財空間を形成する財の種類とその数量的な表現形式である。財をどのように識別するかに関し最も明示的に記しているのがDebreu [6]である。そこでは財を（1）物質的な

性質（physical characterisitics），（2）利用可能となる日（date），（3）利用可能な場所（location），（4）提供されるときの事象（event）により異なる種類の財が特定されるとし（[6, Chapter 2 および Chapter 7]），現在ではこうした財の識別が，理論的枠組みにおいては標準となっている。

このように識別し特定化した個別の財の数量の表現については，制約を加えることなく「任意の実数」（any real number）とし，すでに述べたように財の種類を有限個 ℓ に限定する枠組みでは，財空間（commodity space）を ℓ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^\ell$ とすることになるのである。

1.3　経済的数量の認識について

1950 年代以降標準的には経済的数量を任意の実数によって表現してきたが，「経済的」数量をどのような数として認識すべきかという点については異なる見解が通用していた。Debreu [6, p.30] においても

> The quantity of certain kind of wheat is expressed by a number of bushels which can satisfactorily be assumed to be any (non-negative) real number.
> A quantity of certain kind of liquid such as gasoline is expressed by a number of litters or galons which can be assumed to be any (non-negative) real number.

というようにガソリン等の液体，さらには小麦粉等の財については実数によって数量表現することに違和感を持たないのに対し，上につづいて，

> A quantity of well-defined trucks is an integer; but it will be assumed instead that this quantity can be any real number.

と述べ，トラックのような財については明らかに整数値を用いてその数量を表現するべきであろうとの認識を示している。しかし分析上は財空間を $\mathbb{R}^\ell$ としており，任意の実数単位の取引を認める形で分析が進められるため，つぎの Debreu の「言い訳」に見られるように

> This assumption of *perfect divisibility is imposed by the present stage of development of economics*; it is quite acceptable for an economic agent producing or consuming a large number of trucks. Similar goods are machine tools, linotypes, cranes, Bessemer converters, houses, ……[(1)]

分析を進めるための便法として認識されている[(2)]。ここでいう perfect divisibility を経済学では**完全分割可能性**とよび，数学でいう divisibility とは異なっている[(3)]。

（1）　筆者によるイタリック体。

財の価値評価を示す価格の表現形式については本稿では議論の対象とせず，以下では経済数量として財の数量に関する経済学的な認識とその表現形式について経済分析の歴史における道筋を辿ることにしたい。

2　代表的文献に見る経済数量の認識と表現

本節では Joseph A. Schumpeter [14] が経済分析の理論上の貢献を認めている Augustin Cournot, Leon Walras, Vilfreto Pareto, および Alfred Marshall に見られる経済数量の認識と表現について考察する。

2.1　Cournot における経済的数量の認識と表現

Cournot [3] は市場において決定される財の交換価値を説明する理論的基礎を構築するために，抽象的な数学概念としての関数の概念を用いて市場における需要の考え方をつぎのように明確に示した。

> Cournot [3, p. 37] “21. Admettons donc que le débit ou la demande annuelle D est, pour chaque denreé, une fonction particulière $F(p)$ du prix p de cette denreé. ……”(4)

Cournot の書が書かれたときには，未だ，需要や需要量，さらには供給や供給量，均衡における取引量，これらの間での明確な区別がされてなく，混乱した表現が見られたようである。(5)

需要関数と連続性

Cournot は需要を需要関数として数学上の関数概念としてとらえた上で，そうした抽象レベルでの関数の性質として「連続性」continuité をつぎのように要請して分析を進めている。

> Cournot [3, pp. 38–39] “22. Nous admettrons que la fonction $F(p)$ qui exprime la loi de la demande ou du débit est une *fonction continue*, c’est-à-dire une fonction qui ne passe

(2)　引用した Debreu の後半の説明の部分で，なぜ消費数量が多い場合に，完全分割可能性の前提が許容できるのかについて明示的な説明はない。恐らく本稿の次節以降で触れる Pareto あるいは Walras と同様なことを考えていたものと推察する。

(3)　一般に数学で divisibility という場合，有理数が有限の小数で表現されることを指す。したがって，概念としては，経済学上の divisibility は数学でいう divisibility とは対極的な性質を表現している。

(4)　この引用箇所の英訳はつぎの通りである。Cournot [4, p. 47] “Let us admit therefore that the annual sales or demand D is, for each article, a particular function $F(p)$ of the price p of such article. ……”

(5)　Cournot [3, p. 36, 20] を参照。“En outre, qu’entend-on par la quantité demandée? Ce n’est sans doute pas celle qui se débite effectivement sur la demande des acheteurs; ……”

pas soudainement d'une valeur à une aurte, mais qui prend dans l'intervalle toutes les valeurs intermédiaires. *Il en pourrait être autrement si le nombre des consommateurs était très-limité*: ainsi, dans tel ménage, on pourra consommer précisément la même quantité de bois de chauffage, que le bois soit à 10 francs ou à 15 francs le stère; et l'on pourra réduire brusquement la consommation d'une quantité notable, si le prix du stère vient à dépasser cette dernière somme.[(6)]"

この引用部分での Cournot の理論上のスタンスは，市場における「需要の法則」または「販売法則」（"la loi de la demande ou du débit"[(7)]）を表す需要関数が示す需要量は，ある数値から他の異なる数値にいきなり変化するのではなく，その中間の値をすべて取りながら変化することを要請している。言い換えると，連続関数に関する「中間値の定理」が成立することをもって，関数の連続性の要請をしているのである。

ただし，このことは Cournot が数学者として連続関数をこのような形で理解していたというのではなく，同時代の経済学者への連続関数の説明として，現在の数学でいう連続関数の性質の一つを持ち出したこうした説明の方が分かり易いと判断した結果であろうと推察される。事実，Cournot による数学書では，

Cournot [5, p. 3] "Le caractère propre d'une fonction continue consiste en ce que l'on peu toujours assigner à l'une des variables des valeurs assez voisines pour que la différence entre les valeurs correspondantes de la fonction qui en dépend, tombe au-dessous de toute grandeurs donnée.[(8)]"

---

(6) 筆者によるイタリック体。この箇所の英訳は以下の通りである。Cournot [3, pp.49–90] "22. We will assume that the function $F(p)$, which expresses the law of demand or of the market, is a *continuous function*, *i.e.* a function which does not pass suddenly from one value to another, but which takes in passing all intermediate values. *It might be otherwise if the number of consumers were very limited*: thus in a certain household the same quantity of firewood will possibly be used whether wood costs 10 francs or 15 francs the stere, and the consumption may suddenly be diminished if the price of the stere rises above the latter figure."

(7) Cournot はつぎの引用が示すように「需要」（la demande）と販売（le débit）を同義語として扱うことを明言している。Cournot [3, pp. 38–39] "……Le débit ou la demande (car pour nous ces deux mots sont synonymes, et nous ne voyons pas sous quel rappport la théorie aurait à tenir compte d'une demande qui n'est pas suivie de débit), le débit ou la demande, disons-nous, croît en général quand le prix décroît." この英訳は Cournot [4, p. 46] "……The sales or the demand (for to us these two words are synonymous, and we do not see for what reason theory need take account of any demand which does not result in a sale)——the sales or the demand generally, we say, increases when the price decreases."

と連続関数を規定しており，この表現を現在の解析学における ε-δ を用いた連続関数の定義や位相解析における近傍を用いた定義を言葉によって表現したものとして理解できる。

基本的に市場における需要関数の連続性を前提としつつも，Cournot は市場における消費者の数が限定的であれば，需要関数は連続にはならないと，例を挙げつつ明白に認めている。

Cournot が個人の需要関数を不連続とする根拠は，その数量表現が $1, 2,$…… というような整数に限定されるべきだという財の非分割性にあるのではない。上の Cournot の例においては，価格が多少上昇してもそれに合わせて需要量が少し減少するのではなく，ある水準まで価格が上昇した段階で，需要量がいきなり減少するという認識で需要関数の連続性の欠如を表現している。その意味で，現在の数学用語で表現すれば，個人の需要関数が半連続であることまで否定しないまでも，たかだか半連続にしかならない，という説明の仕方であると理解できる。(9)

Cournot がいう「連続性」にはもう一つ別の意味があると解釈される。実際，上で引用した箇所と同じページで

> Cournot [3, p. 39] “Si la fonction $F(p)$ est continue, elle jouira de la propriété commune à toutes les fonctions de cette nature, et sur laquelle reposent tant d’applications importantes de l’analyse mathématique: *les variations de la demande seront sensiblement proportionnelles aux variations du prix, tant que celles-ci seront de petites fractions du prix originaire.* D’ailleurs, ces variations seront de signes contraires, c’est-à-dire qu’à une augmentation de prix correspondra une diminution de la demande.”(10)

と需要関数 $F(p)$ の連続性の意味を説明している。この引用箇所での説明，特にイタリック体で書かれている部分の説明は，明らかに関数 $F(p)$ が「局所的に線形近似できる」という内容である。換言すると，この箇所では関数の連続性の名のもとに，実はその可微分性を主張しているものと解釈される。この意味についても Debreu コンジェクチャーとの関連で再度議論の組上にのせることと

---

(8)　（筆者による）英訳は以下の通り。“The proper characteristic of a continuous function consists in that one can always assign to each of the variables values sufficiently close so that the difference of the values corresponding to the function on which they depend, falls within for any given magnitudes.”

(9)　Cournot の引用部分では個人需要関数の下半連続性を否定しているものと解釈される。この点については半連続性の概念の説明に加え，さらに第 4 節で議論する。

(10)　英訳は以下の通りである。Cournot [3, p. 50] “If the function $F(p)$ is continuous, it will have the property common to all functions of this nature, and on which so many important applications of mathematical analysis are based: *the variations of the demand will be sensibly proportional to the variations in price so long as these last are small fractions of the original price.* Moreover, these variations will be of opposite signs, *i.e.* an increase in price will correspond with a diminution of the demand.”

したい。

また，この引用箇所では Cournot が需要関数の連続性にこだわる理由として，分析の対象となる関数が「連続」であれば，その性質を分析する上で数学における解析的分析手法を適用できて有用であることを挙げている。

集計の効果による連続性

このように Cournot は，個人の需要関数は一般に不連続であるとしながらも，市場の需要関数については連続であると考えてよいとするのである。こうした経済変数に関する彼の認識の中で大変興味深いのが，集計の効果による市場需要関数の連続性の指摘だと解釈できる以下の見解である。これは Cournot [3, pp. 38–39] からの先の引用文につづいて述べられているつぎの引用文で示されている。

> Cournot [3, p. 39] "Mais plus le marché s'étendra, plus les combinaisons des besoins, des fortunes ou même des caprices, seront variées parmi les consommateurs, plus la fonction $F(p)$ approchera de varier avec p d'une manière continue. Si petite que soit la variation de p, il se trouvera des consommateurs placés dans une position telle que le léger mouvement de hausse ou de baisse imprimé á la denrée influera sur leur consommation, les engagera à s'imposer quelques privations, ou à rèduire leurs exploitations industrielles, ou à substituer une autre denrée à la denrée renchérie, par exemple, la houille au bois, ou l'anthracite à la houille."(11)

この引用箇所での Cournot の認識は，市場に広がりがあり，消費者のニーズ（besoins）や富（fortunes），さらには気分・好み（caprices）の組み合わせに散らばりがあればあるほど，需要関数は「連続的」な動きを示すということである。ただし，Cournot は需要関数を市場における統計的データから導出できると考えていて，特に理論的に導出することを行ってはいないから，需要関数の背後にある消費者の選好や富の水準等について，需要関数との明示的な関係にまで踏み込んで議論しているわけではない。

(11) 英訳は以下の通りである。Cournot [3, p. 50] "But the wider the market extends, and the more the combinations of needs, of fortunes, or even of caprices, are varied among consumers, the closer the function $F(p)$ will come to varying with p in a continuous manner. However little may be the variation of p, there will be some consumers so placed that the slight rise or fall of the article will affect their consumptions, and will lead them to deprive themselves in some way or to reduce their manufacturing output, or to substitute something else for the article that has grown dearer, as, for instance, coal for wood or anthracite for soft coal."

2.2　Walras における経済的数量の認識と表現

需要曲線の不連続性

Walras は Cournot 同様に個人の需要曲線が一般に「連続」であることを保障する何ものもないどころか，逆に，一般的に不連続であり，現実的には階段状の曲線（la forme de la courbe en escalier）であると下記の引用箇所で明言している。

> Walras [15, pp. 57–58] "……Rien n'indique que les courbes ou les equations partielles $a_{d,1}a_{p,1}$, $d_a = f_{a,1}(p_a)$ et autres soient *continues*, c'est-à-dire qu'une augmentation infiniment petite de p_a y produise une diminution infiniment petite de d_a. Au contraire, ces fonctions seront souvent discontinues. Pour ce qui concerne l'avoine, par exemple, il est certain que notre premier porteur de blé réduira sa demande non pas au fur et à mesure de l'elévation du prix, mais d'une façon en quelque sorte intermittente chaque fois qu'il se décidera à avoir un cheval de moins dans son écurie. Sa courbe de demande partielle aura donc en réalité la forme de la courbe en escalier passant au point a (Fig.1). Il en sera de même de tous les autres.(12)"

また，需要関数 $d_a = f_{a,1}(p_a)$ が「連続」（continue）であることの説明を価格 p_a の「無限に小さい」（infiniment petite）上昇が，d_a の「無限に小さい」減少を意味するとしている。Cournot が「無限小」とか「無限に小さい」という表現を使わずに需要関数の「連続性」を説明していたことに注意したい。(13)

上の引用文につづく下記の引用文において Walras は，個人の需要曲線を集計した総需要曲線は，いわゆる「大数の法則」（la loi des grands nombres）により，分析の上では連続していると見なすことができるとしている。

> Walras [15, p. 58] "Et cependant, la courbe totale A_dA_p (Fig.2) peut, en vertu de la *loi*

(12) 英訳はつぎの通り。Walras [16, p. 169] "There is nothing to indicate that the individual demand curves $a_{d,1}a_{p,1}$ and so on, or the individual demand equations $d_a = f_{a,1}(p_a)$ and so on, are *continuous*, in other words that an infinitesimally small increase in p_a produces an infinitesimally small decrease in d_a. On the contrary, these functions are often discontinuous. In the case of oats, for example, surely our first holder of wheat will not reduce his demand gradually as the price rises, but he will do it in some intermittent way every time he decides to keep one horse less in his stable. His individual demand curve will, in reality, take the *form of a step curve* passing through the point a as in Fig.4. All the other individual demand curves will take the same general form."

(13) Cournot の数学書 [5] においては，微分可能な関数についての説明において「無限小」とか「無限に小さい」という表現も使われるので，ここでは意図的にこの表現を避けていたとも受け取れる。しかし，Walras の場合はここでの表現において関数の微分可能性を意味していたとは解釈し難い。

dite des grands nombres, étre considérée comme sensiblement continue. En effect, lorsqu'il se produira une augmentation trés petite du prix, l'un au moins des porteurs de (B), *sur le grand nombre*, arrivant à la limite qui l'oblige à se priver d'un cheval, il se produira aussi une diminution trés petite de la demande totale."(14)

Walras が述べている「大数の法則」とは何かについて説明がないため，具体的に何を意味しようとしたのか曖昧である。統計学や確率論でいう大数の法則は，一定の条件の下で標本の数の増大とともに，「標本」の平均値が「母集団」の平均値に収束することを主張するものなので，統計学や確率論の意味での解釈は困難であり，Walras が述べている「大数の法則」の解釈には注意を要するであろう。

2.3 Pareto における経済的数量の認識と表現

財の非分割性

経済数量に関して Pareto は，つぎの引用箇所に見られるように基本的には財の単位を整数と認識しており，その意味で，本来，財は一般的に非分割財だと考えている。

Pareto [12, p. 169] "65. Variazioni continue e variazioni discontinue.——Le curve di indifferenza ed i sentieri potrebbero essere discontinui; anzi nel concreto sono realmente tali, cioè le variazioni delle quantità avvengono in modo discontinuo. Un individuo, dallo stato n cui ha 10 fazzoletti passa ad uno stato in cui ne ha 11, e non già agli stati intermedii, in cui avrebbe per esempio 10 fazzoletti e un centesimo di fazzoletto; 10 fazzoletti e due centesimi, ecc."(15)

この引用箇所では「連続的な変化」(variazioni continue)，「不連続的な変化」(variazioni discontinue) という表現は，財空間における選好関係である無差別曲線についての表現であり，先の Cournot の議論の場合と異なり需要関数についての表現ではない。したがって，ここでは Cournot のように需

(14) 英訳はつぎの通り。Walras [16, p. 169] "And yet the aggregate demand curve A_dA_p (Fig.3) can, for all practical purposes, be considered as continuous by virtue of the so-called *law of large numbers*. In fact, whenever a very small increase in price takes place, at least one of the holders of (B), out of a large number of them, will then reach the point of being compelled to keep one horse less, and thus a very small diminution in the total demand for (A) will result."

(15) 英訳はつぎの通り。Pareto [13, p. 122] "65. Continuous variations and discontinuous variations. The indifference curves and the paths could be discontinuous, and they are in reality. That is, the variations in the quantities occur in a discontinuous fashion. An individual passes from a state in which he has 10 handkerchiefs to a state in which he has 11, and not through intermediate states in which he would have, for example, 10 and 1/100 handkerchiefs, 10 and 2/100 handkerchiefs, etc."

要関数の連続性を問題にしているのではなく，無差別曲線を曲線として連続に描けるか否かを議論しているので，財の非分割性を認識した議論であるという解釈になろう。

このような基本的な経済数量の非分割性に関する認識にもかかわらずParetoは，この引用箇所につづけて以下のように述べている。

> Pareto [12, p. 169] "Per avvicinarsi al concreto, occorrerebbe dunque considerare variazioni finite, ma c'è una difficoltà tecnica.
>
> I problemi aventi per oggetto quantità che variano per gradi infinitesimi sono molto più facili a trattarsi che i problemi in cui le quantità hanno variazioni finite. Giova dunque, ogni qualvolta ciò si possa fare, sostituire quelli a questi ; e così effettivamente si opera in tutte le scienze fisico naturali. Si sa che per tal modo si fa un errore; ma si può trascurare, sia quando è piccolo in modo assoluto, sia quando è mimore di altri inevitabili, il che rende inutile di ricercàre da una parte una precisione che sfugge dall'altra. *Tale è appunto il caso per l'economia politica, che considera solo fenomeni medii e che si riferiscono a grandi numeri. Discorriamo dell'individuo, non già per ricercare effettivamente cosa un individuo consuma o produce, ma solo per considerare un elemento di una collettività, e per sommare poi consumo e produzione per molti e molti individui.*" (16)

このようにParetoもCournotと同様に，分析の上で現実に近づくには，経済数量の離散的な有限の変化（variazioni finite）を考察すべきであるが，それは分析の際に困難を伴うため，物理学や他の自然科学と同じように「無限小の度合いで変化する数量」（"quantità che variano per gradi infinitesimi"）に置き換えて分析をするのがよいとしている。つまり，分析上のテクニカルな理由から，連続して変化する数量（variazioni continue）を取り扱うことを提唱している。

（16） 筆者によるイタリック体。英訳はつぎの通り。Pareto [13, p. 123] "In order to come closer to reality, we would have to consider finite variations, but there is a technical difficulty in doing so.

Problems concerning quantities which vary by infinitely small degrees are much easier to solve than problem in which the quantities undergo finite variations. Hence, every time it is possible, we must replace the latter by the former; this is done in all the physiconatural sciences. We know that an error is thereby committed; but it can be neglected either when it is small absolutely, or when it is smaller than other inevitable errors which make it useless to seek a precision which eludes us in other ways. *This is precisely so in political economy, for there we consider only average phenomena and those involving large numbers. We speak of the individual, not in order actually to investigate what one individual consumes or produces, but only to consider one of the elements of a collectivity and then add up the consumption and the production of a large number of individuals.*"

「平均的現象」としての経済数量

さらに，分析が容易になるとか，自然科学の分野でそうした分析を行うという言い訳に加えて，経済学においてそのような分析を行うことを正当化しうるより本質的な理由付けを，上の引用箇所の最後の部分において与えている。それは経済分析において，消費者や生産者という経済構成員個人を取り上げて分析を進めるときに考察するのは，「平均的な現象」(fenomeni medii) であり，しかも構成員の数が「大数」(grandi numeri) である場合であるとし，そのような場合には，現実に消費者や生産者といった個人が直面する経済数量が有限の離散的な数量であったとしても，それを「無限小の度合いで変化する数量」として「連続的」に扱うことによって生じる誤差 (un errore) は，それ以外の避けることのできない要因から発生する誤差と比べて，小さく無視できるものであると考えている。

Pareto は「平均的な現象」とよぶ意味を，つぎの引用文において具体的に説明する。例えば，均衡において「個人が時計を 1.1 個消費する」というのを文字通り解釈するのは滑稽であり，これは「100 人の人々が 110 個の時計を消費する」というように解釈するとしている。

> Pareto [12, p. 169] “66. Quando diciamo che un individuo consuma un orologio e un decimo, sarebbe ridicolo il prendere quei termini alla lettera. II decimo dell’orologio è un oggetto sconosciuto e che non ha uso. Ma quei termini esprimono semplicemente che, per esempio, cento individui consumano 110 orologi.
> Quando diciamo che l’equilibrio ha luogo quando un individuo consuma un orologio e un decimo, ciò vuol semplicemente esprimere che l’equilibrio ha luogo quando 100 individui consumano chi uno, chi due o più orologi, e anche punti, in modo che tutti insieme ne consumano 110 circa, e che la media per ciaseuno è 1,1.[(17)] ”

しかも以下の引用に見られるように，このような平均的な現象としての解釈は経済学に限らず，保険論のような他の科学においても見られることを指摘している。

> Pareto [12, p. 169] “Questo modo non è proprio dell’economia politica, ma appartiene a moltissime scienze. Nelle assicurazioni si discorre di frazioni di viventi; per esempio 27

(17) 英訳はつぎの通り。Pareto [13, p. 123] “66. When we say that an individual consumes one and one-tenth watches, it would be ridiculous to take those words literally. A tenth of a watch is an unknown object for which we have no use. Rather these words simply signify that, for example, one hundred individuals consume 110 watches.
When we say that equilibrium takes place when an individual consumes one and one-tenth watches, we simply mean that equilibrium takes place when 100 individuals consume――some one, others two or more watches and some even none at all――in such a way that all together they consume about 110, and the average is 1.1 for each.”

viventi e 37 centesimi. È pure chiaro che non possono esistere 37 centesimi di un vivente!
Se non si concede di sosotituire le variazioni continue alle discontinue, conviene rinunciare a dare la teoria della leva. Voi mi dite che una leva a braccia eguali, per esempio una bilancia, è in equilibrio quando porta pesi uguali ; io prendo una bilancia che è sensiblile solo al centigramma, metto in uno dei piattini un milligramma di più che nell'altro, e vi faccio vedere che, contraddicendo la teoria, sta in equilibrio.
La bilancia nella quale si pesano i gusti dell'uomo è tale che per alcune merci è sensibile al gramma ; per altre solo all'ettogramma ; per altre solo al chilogramma, ecc.
L'unica conclusione da trarne è che da tali bilancie non bisogna richiedere maggiore precisione di quella che possono dare.(18)"

2.4 Marshall における経済的数量の認識と表現

個人需要の不連続性

Marshall [10] は，個人レベルの需要の中にも紅茶に対する需要のように，個人レベルの需要が市場の需要を代表するような動きを見せるものがあり，そうした個人需要については小さな価格変化に対し連続的な変化をすると見ている。そうした需要は安定的で，かつ小単位での購入が可能なためだと考えるのである。

しかし，つぎの引用文が示すように，Cournot，Walras，Pareto 等と同様に，一般的に個人需要は不連続だと考える。例として，時計や帽子の需要を挙げている。

Marshall [10, p. 82] "Section 5. So far we have looked at the demand of a single individual. And in the particular case of such a thing as tea, the demand of a single person is fairly

---

(18) 英訳はつぎの通り。Pareto [13, p. 123] "This manner of expression is not peculiar to political economy; it is found in a great number of sciences.
In insurance one speakes of fractions of living persons, for example, twenty-seven and thirty-seven hundredths living persons. It is quite obvious there is no such thing as thirty-seven hundredths of a living peson!
If we did not agree to replace discontinuous variations by continuous variations, the theory of the lever could not be derived. We say that, a lever having equal arms, a balance, for example, is in equilibrium when it is supporting equal weights. But I might take a balance which is sensitive to a centigram, put in one of the trays a milligram more than in the other, and state that, contrary to the theory, it remains in equilibrium.
The balance in which we weigh men's tastes is such that, for certain goods, it is sensitive to the gram, for others only to the hectogram, for others to the kilogram, etc.
The only conclusion that can be drawn is that we must not demand from these balances more precision than they can give."

representative of the general demand of a whole market: for the demand for tea is a constant one; and, since it can be purchased in small quantities, every variation in its price is likely to affect the amount which he will buy. But even among those things which are in constant use, there are many for which the demand on the part of any single individual cannot vary continuously with every small change in price, but can move only by great leaps. For instance, a small fall in the price of hats or watches will not affect the action of every one; but it will induce a few persons, who were in doubt whether or not to get a new hat or a new watch, to decide in favour of doing so."

大きな市場における総需要の連続性

Marshallの場合, 財に対する個人レベルの必要性(ニーズ)に関しては, 安定的ではなく(inconstant), 気まぐれで（fitful), 不規則（irregular）となる財の部類も少なくなく，この種の財についての個人需要は不規則・不連続になるが，こうした不規則な行動をとる個人全体を見ると，多くの人々からなる経済全体の比較的規則的な行動となって現れてくると明言する。先に見たCournotの認識と全く同じである。つぎの引用がその部分であるが，需要の連続性に止まらず,「需要法則」の成立まで言及するところは，Cournotの強い影響の現れであろう。

Marshall [10, pp. 82–83] "There are many classes of things the need for which on the part of any individual is inconstant, fitful, and irregular. There can be no list of individual demand prices for wedding-cakes, or the services of an expert surgeon. But the economist has little concern with particular incidents in the livers of individuals. He studies rather "the course of action that may be expected under certain conditions from the members of an industrial group," in so far as the motives of that action are measurable by a money price; and in these broad results the variety and the fickleness of individual action are merged in the comparatively regular aggregate of the action of many.

In large markets, then——where rich and poor, old and young, men and women, persons of all varieties of tastes, temperaments and occupations are mingled together,——the peculiarities in the wants of individuals will compensate one another in a comparatively regular gradation of total demand. Every fall, however slight in the price of a commodity in general use, will, other things being equal, increase the total sales of it; just as an unhealthy autumn increases the mortality of a large town, though many persons are uninjured by it. And therefore if we had the requisite knowledge, we could make a list of prices at which each amount of it could find purchasers in a given place during, say, a year."

3　Cournot, Walras, Pareto, Marshall と 1950–60 年代における認識との関連

3.1　経済変数の性質：関数あるいは数量としての認識

以上，Cournot, Walras, Pareto, Marshall といった経済分析の発展の歴史において重要な足跡を残してきた代表的な理論家が，経済数量をどのように認識し表現してきたかを，彼らの引用文献を通して簡単に眺めてきた。そこで彼らの間の認識がどのように異なっているか，あるいはどのような認識を共有していたかについてまとめてみよう。

まず，Debreu [6] の書に見られる 1950–60 年代の一般均衡分析の理論的枠組みに至るまでは，経済取引の対象となる各種の財をどのように（数学的に）表現するかといった明示的な議論は見られない。均衡の存在証明を試みる理論的取り組みの過程において，このような基本的な問題が明確になってきたものといえるであろう。したがって，経済数量に関する 1950 年代以前の経済理論家の議論では，数量そのものに関する認識の問題と，そうした数量が関数の形で経済変数として持つ性質に関する認識の問題とが錯綜した形の同一次元で議論されている。

個人需要関数の不連続性に関する共通認識

Cournot の場合は分析の対象としての経済数量として，需要量（あるいは同義語としての「販売量」）を取り上げる。それまでの文献において混乱が見られた需要概念を明確に規定することから始め，数学的に価格の関数として需要を表現する。分析の対象となるのは市場における需要関数だから，まず市場需要関数の性質としての連続性を議論する[(19)]。そして 2.1 節において見たように，個人レベルの需要関数は関数として不連続であると見るのである。Cournot は，価格が多少上昇してもそれに合わせて需要量が少しずつ減少するのではなく，ある水準まで価格が上昇した段階で，需要量が大きく減少するという認識で需要関数の不連続性を表現している。

「一般的に価格の変化に対して個人の需要は不連続だと考えるべきだ」という認識は，本稿で取り上げた Cournot，Walras，Pareto，Marshall に共通する認識であるが，個人の需要を不連続だと考える根拠については相違点がいくつか見られる。そうした見方の違いの背景には，経済数量に対する認識の相違がある。

経済数量に関する認識の相違

Cournot の議論においては，財の数量について非分割性を意識したところは全くない。市場における個人の行動の観察から，価格の多少の変化に対し購入量を小刻みに変化させることはないと見ている。

また財の完全分割可能性や非分割性に関する明示的な議論がないという点に限れば，Walras の場

(19)　ただし，すでに触れたように文字通りに「連続性」を理解すべきかどうかについては注意を要する。

合も Cournot の認識と同じである。もちろん Walras の場合は Cournot の議論を承知した上での議論である。個人需要の不連続性に関する Walras からの引用部分の議論の内容が Cournot と異なる点は，非分割財に対する明示的な言及はないものの，実質的には「非分割財」（引用部分の例では馬（cheval））の存在を認めた上での議論と解釈すべきだと考えられることである。しかも，Cournot の場合は，なぜ個人の需要が不連続なのか，その理由に迫っていないが，Walras はこの点において一般均衡理論の創始者として真骨頂を発揮していると言える。というのは彼の議論は，「完全分割可能財」（引用部分の例では小麦（blé））の需要についても階段関数になるという議論だと解釈されるからである。完全分割可能財の価格が徐々に低下していくとき，ある程度下がらなければ，非分割財の消費を 1 単位減らして完全分割可能財の需要の増加に割り振ることをしないだろうという議論展開である。言い換えると，個人の効用最大化行動において価格変化に伴う完全分割可能財と非分割財の消費上の代替による需要量の変化を考慮した上での需要量の「不連続」な変化の議論だと解釈されるのである。

Walras は需要関数が階段状になるという表現を使用している。それにもかかわらず，この表現を文字通りに解釈して，現代の数学でいう階段関数であるとするのが Walras の真意を捉えているか否か，はなはだ疑問である。というのは階段関数になると解釈すると，階段状の半連続な関数となるが，先の Walras の引用箇所 [15, p. 58] の図 1（Fig 1）では階段状のグラフが描かれている。したがって，階段状の半連続な関数というよりも，むしろ階段状の「対応」（correspondence）（あるいは「多価関数」）になるという議論として Walras の議論を理解した方が，Walras の真意に即していると言えるのではないだろうか。

Marshall の場合も Cournot や Walras 同様に，財の完全分割可能性や非分割性に関する明示的な議論は見られない。しかし，Cournot と Walras 間の個人需要の不連続性に関する認識の相違と同様に，Marshall のこの点に関する説明も Cournot および Walras 双方と微妙に異なっている。Cournot は個人の需要関数が不連続であることの理論的根拠を特に議論しない。観察される個人の行動から不連続性を率直に認めている。Marshall は Walras と同様にその根拠を個人の選好に求めるが，Walras が完全分割財と非分割財の間の代替により，完全分割財に関する需要量の不連続性を説明するのに対し，Marshall は現在でいう部分均衡論的視点から，個人需要関数の不連続性に言及する。先の最初の引用箇所 Marshall [10, p. 82] における Marshall の議論は，一方で例として紅茶を挙げ，日常的に安定的に消費する財で少量の購入が可能なものについては，おおむね個人需要関数の連続性を認めるが，他方で例として帽子や時計を挙げながら，日常的に使用するものの中にも，ある価格のところで大きく需要量が変化するものがあると議論し，その根拠を観察された個人の行動というより，個人の意思決定に求めているようにうかがわれる。さらに，Marshall からの二番目の引用文 [10, pp. 82–83] におけるように，個人需要の不連続な変化をウエディング・ケーキや特殊技能を持った外科医に対する需要の場合のように，そうしたものへのニーズの不規則性に帰してい

るところもある。

Pareto の場合は特に Cournot や Walras および Marshall と基本的に相違している点がある。それは 2 節においてすでに指摘したように，彼が財の非分割性を認識した上で明示的に議論の中で非分割性を勘案した議論を展開している点である。Pareto が経済数量の連続な変化と不連続な変化を問題とするとき，需要関数以前の財空間における無差別曲線にさかのぼった議論をするのである。Pareto が分析上のテクニカルな理由から個人レベルにおいて取り扱う経済数量であっても「連続的な変化」を許容する数量を取り扱う必要性を強調する点は，Cournot と全く同じである。当然 Pareto の場合は，彼に先行した Cournot と Walras 双方の強い影響のもとでの研究であったから，彼の議論は Cournot や Walras の議論の彼流の理解，あるいはそれを発展させた議論として受け止めるのがよいのかも知れない。

Cournot および Walras の議論を深化させるという視点では，需要の連続性の議論の前に，Pareto は消費者の嗜好・選好を表現する無差別曲線を表現する財空間において，無差別曲線自体の連続性を問題にするところから始めていることが挙げられる。

3.2　市場需要の連続性に関する共通認識

上で見たように Cournot，Walras，Pareto，Marshall はいずれも価格の変化に対して個人の需要は「不連続」に変化すると考えるが，それにもかかわらず「市場全体の需要は連続だと考えて分析を進めてよい」という認識も彼らには共通している。彼らがその理由として持ち出す根拠を，つぎの二種類に分類できる。

一つは，Cournot [3, p. 39] が最初に強調し，続いて Marshall [10, pp. 82–83] が敷衍したように，市場経済を構成する人々の間で，富，嗜好，ニーズなどに幅広いバリエーションが見られれば見られるほど，市場全体の需要は価格に対して連続な変化を示すであろうという認識である。

今一つは，Walras が最初に指摘し，続いて Pareto がより明確に述べている「大数の法則」あるいは「平均的現象」としての認識である。

Pareto の特徴は経済数量を個人レベルにおいても連続した実数値を用いて表現する根拠として，Walras があいまいな形で議論していた「大数の法則」の一つの解釈とも受け取れる形で，大数の下での平均的な現象として議論していることである。Pareto がいう「平均的な現象」としての経済数量という考え方は，Aumann [1] が導入した「連続体経済」（continuum economy）あるいはそれを Hildenbrand [9] が発展的に体系化した「大きな経済」（large economy）における考え方や表現として解釈可能である。この点については，つぎの節で説明することにしたい。

4.1 「不連続性」に関する認識の現代的解釈

財空間の枠組みと「不連続性」についての異なる認識

前の 2 節と 3 節で見た個人需要関数の「不連続性」の認識について，現代の数学的視点を交えてその解釈を試みるにあたり，二種類の枠組みを考える。一つは典型的に Debreu [6] に見られる枠組みで，1950–60 年代の一般均衡理論の標準的定式化である。有限種類の財の数を ℓ とすると，財空間は ℓ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^\ell$ であり，すべての財が完全分割可能財で任意の実数単位の消費を考えることができる枠組みである。もっとも簡単な 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の場合を例にとり，以下の説明を進める。

もう一つは ℓ 種類の財のうち，いくつかの財が純粋な非分割財で整数単位の消費のみ可能な財空間の枠組みである。2 種類の財のみを考える例では，財空間 $\mathbb{R}^2$ に代わり，

$$\{\cdots\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\} \times \mathbb{R}$$

を財空間の例として考える。第 1 財は純粋非分割財で，第 2 財が完全分割可能財の場合である。

つぎに個人の需要関数について認識された「不連続性」のタイプを三種類に分けて考えてみたい。一番目は，現在の数学でいう連続性の欠如としての不連続性である。二番目は関数ではなく，対応あるいは多価関数（＝集合値関数）になるという認識としての解釈である。三番目は対応としての認識に加え，対応が上半連続性を満たさないという意味での「不連続性」である。(20)

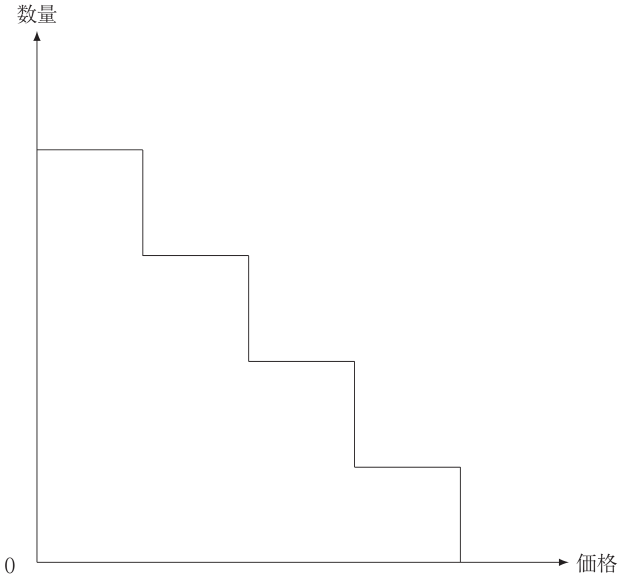
明示的な非分割財のない財空間における「不連続性」の解釈について

先の 2.2 節で見た Walras の説明では，個人の需要関数が階段状の曲線で表現されることをもって「不連続」だとしている。これを文字通り形式的に解釈すると，需要が関数表現ではなく，グラフが階段状の対応になってしまうことをもって不連続だと認識していることになる。先に引用した Walras 流の表現に従えば，価格の「無限に小さい」変化が，需要量の「無限に小さい」変化をもたらすならば連続だが，そうでなければ不連続だという認識である。Walras の説明による階段状の「不連続」な個人の需要として，図 1 で与えられるような需要曲線が描かれている。もちろん文字通り階段状の曲線である。明示的な非分割財のない財空間において，このような個人需要関数のグラフを導くような効用関数もしくは標準的な性質を満たす選好関係(21)は，非常に特殊な場合を除いて存在しないと考えられる。

(20)　対応の上半連続性については後の脚注を参照のこと。

(21)　ここで標準的な性質を満たす選好関係というのは，1950–60 年代の一般均衡理論の文献，例えば Debreu [6] において前提とされるような選好関係である。

図１「階段状」の需要曲線



そこで，敢えて，凸性を満たさない選好関係によって，Walras や Cournot がいう「不連続」に「類似」の形状を持つ需要曲線が導けるかを考えてみよう。図 2 はそれを試みたものである。財空間を $\mathbb{R}^2$ とし，個人の消費の可能性やニーズを表現する消費集合を，財空間の中で非負の消費量を表す $\mathbb{R}^2_+ = \{x = (x_1, x_2) | x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0\}$ とする。図の折れ線は選好関係を無差別曲線で表現したものの一部を描いたものである。また，予算線 BL^A, BL^B に対応する価格ベクトルを $p^A = (p_1^A, p_2^A), p^B = (p_1^B, p_2^B)$ とする。図 3 は図 2 から導かれる第 1 財の需要のグラフを第 1 財の価格のみが変化するとして描いたものである。x と y とが価格ベクトル p^A で需要されるから，この場合需要は需要関数ではなく，需要対応である。そして，価格ベクトル p^A における第 1 財の価格 p_1^A を境に，第 1 財の価格がそれ以上に値上がりすると，第 1 財の需要量は x_1 以下の数量に大きく減少する。厳密に言えば，この状況は Walras や Cournot あるいは Marshall の不連続性の表現を再現するものではないが，ある価格のところでその財の需要量が大きく変化する状況を完全分割可能財のみの枠組みで表現していると言えないことはないであろう(22)。

明示的に非分割財を考慮した財空間における「不連続性」の解釈について

では，明示的に非分割財を考慮することにより Cournot, Walras, Marshall らが認識している「不連続性」に的確な解釈を与えることができるであろうか？　つぎにこの点を考えたい。

具体例として，第 1 財は純粋非分割財，第 2 財は完全分割可能財となる $\{\cdots\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\} \times \mathbb{R}$ を財空間とし，消費集合 X として，財空間のなかで消費量が非負の数量となる消費を

(22) ただし，数学的にはこの場合も需要対応として上半連続性を満たしている。価格ベクトル p^A における対応の値が凸集合にはなっていないということである。

図 2　消費者の選択

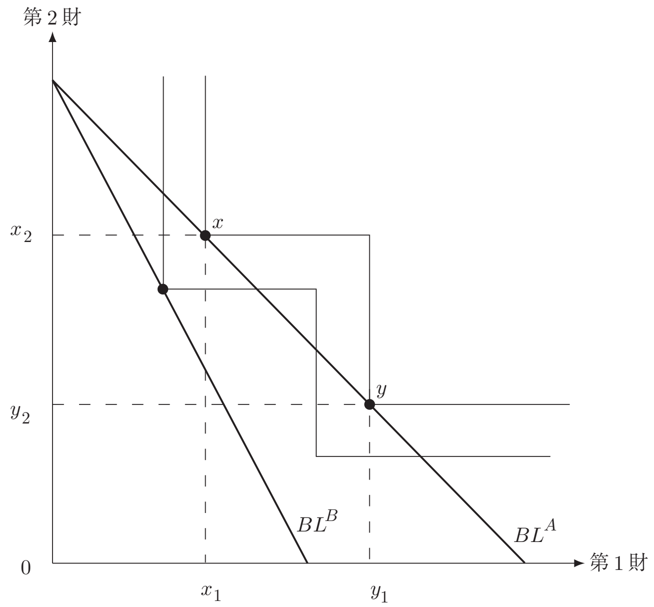
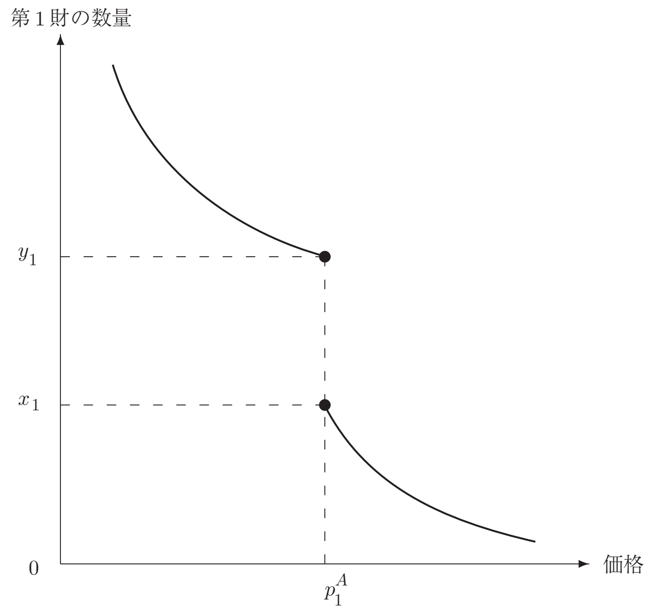


図 3　消費者の第 1 財の需要曲線



考え，

$$X = \{0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\} \times \mathbb{R}_+$$

とする。$\mathbb{R}_+$ は非負の実数値の集合である。この消費集合を持つ消費者行動の例を示すのが図 4 で

図 4　消費者の選択

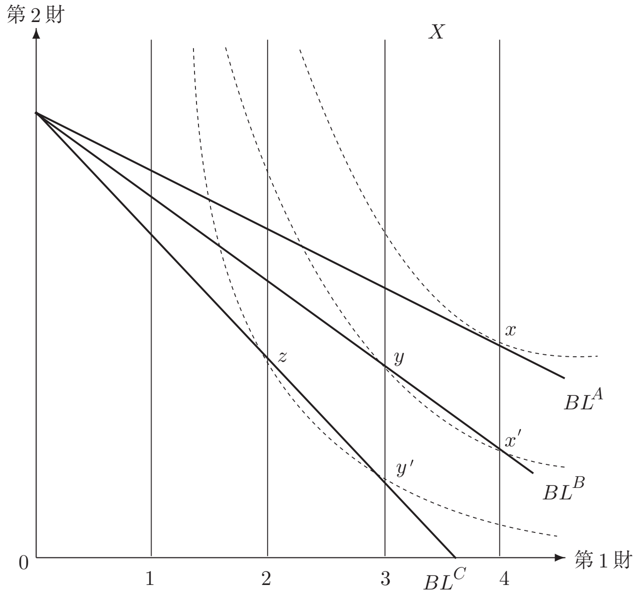
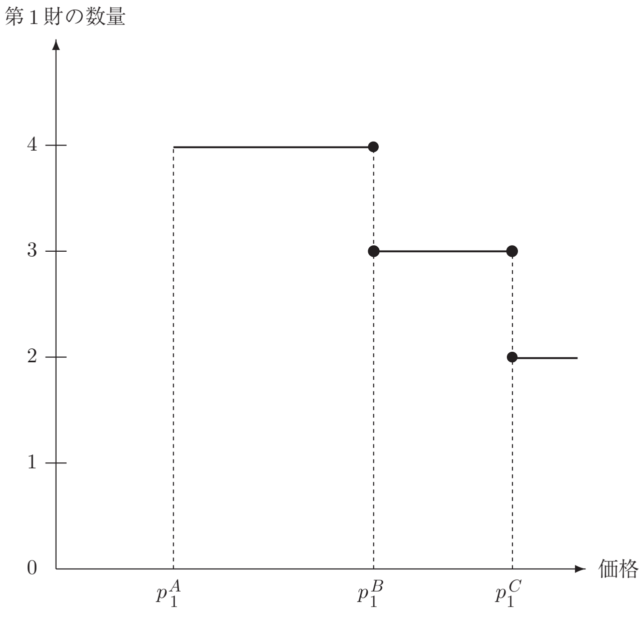


図 5　消費者の第 1 財の需要曲線



ある。この図で消費集合 X は，垂直の半直線からなる集合である。消費者の選好は，図の点線で示される曲線上で，消費集合に属する点からなる無差別曲線として示されている。

予算線 BL^A, BL^B, BL^C に対応する価格ベクトルを $p^A = (p_1^A, p_2^A), p^B = (p_1^B, p_2^B), p^C = (p_1^C, p_2^C)$ とする。予算線が BL^A のとき，消費者が選択する消費は点 x で示されるが，予算線が BL^B の場

合，消費者が選択する消費は点 x' と y となる。さらに，予算線が BL^C になると，選択する消費は点 y' と z になる。図 4 におけるこのような消費者の消費選択を第 1 財の需要量についてその需要関数を表現したのが，図 5 の個人需要曲線である。図は精確には Walras が描いた階段状の折れ線となる曲線とは異なっているが，Walras [15, p. 57] の説明を表現した個人の需要の変化に合致していると見ることができる。(23) さらに，Cournot [3, pp. 38–39] や Marshall [10, p. 82] のいう個人需要の不連続性をも表現していると言えるであろう。

それにもかかわらず Cournot が持つ個人の需要関数の「不連続性」の認識は，他の Walras, Pareto, Marshall と比べて，より深いところにあったようにうかがわれなくもない。彼の需要に関する不連続性の認識をどのように解釈すべきだろうか？

Cournot は研究者として経済学者という前に数学者であり，微分積分学の教科書（Cournot [5]）や確率論の教科書等を著わしたという事実を考慮すると，Walras の場合のように需要を単に階段状の形状を持つ曲線で表現された関数と見ていると解釈するのは適切ではないと考えられる。先の Cournot [3, pp. 38–39] からの引用は，ある特定の財の個人需要が実数値関数としてたかだか半連続（semi-continuous）にしかならないという説明として解釈できると筆者は考える。(24)

個人需要関数についての Cournot の不連続性の認識が，さらに深いところにあったか否か，その推察は難しい。具体的に，図 6 と図 7 で説明しよう。

図 6 において，予算線 BL^A, BL^B, BL^C, BL^D に対応する価格ベクトルは p^A, p^B, p^C, p^D であり，図は第 1 財価格の p_1^A から p_1^D への変化によって，個人需要がどのように変化するかを価格消費曲線によって示すものである。この価格消費曲線から導かれる第 1 財の需要曲線が，図 7 で示された「階段状」の対応のグラフになる。図 6 と図 7 において黒丸で示される点は曲線に含むが，白抜きの丸は含まれないことを表現している。図 7 の需要対応の場合，価格 p_1^D を除いて関数となってい

(23) Walras [15, p. 57] の説明を完全分割可能財と非分割財の間の代替による完全分割可能財の需要量の変化を考えたものと解釈すると，この枠組みでも彼の説明を表現できていない。彼の説明は一見説得的であるように見えるが，図 4 の消費者選択を完全分割可能財である第 2 財の需要関数として表現すると，厳密には正しい直感でなかったのではないかと筆者には思われる。

(24) 特に引用箇所の説明は，個人の需要関数が実数値関数として上半連続になっても，（下半）連続にはならないという説明として理解されることに注意を喚起したい。

実数値関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が $x \in X$ において上半連続（upper semi-continuous）であるとは，$\{z|f(z) < f(x)\}$ が開集合となることであり，すべての $x \in X$ において上半連続であれば，f は上半連続であるという。

また，f が $x \in X$ において下半連続（lower semi-continuous）であるとは，$\{z|f(z) > f(x)\}$ が開集合となることであり，すべての $x \in X$ において下半連続であれば，f は下半連続であるという。

さらに，$f : Z \to \mathbb{R}$ が上半連続あるいは下半連続になるとき，f は半連続であるという。

また，実数値関数が上半連続であっても，これを対応と見たとき，対応として上半連続になるとは限らない。特に，実数値関数が上半連続で連続でなければ，対応として上半連続ではない。対応の上半連続性および下半連続性については，以下の脚注を参照。

図６　消費者の選択

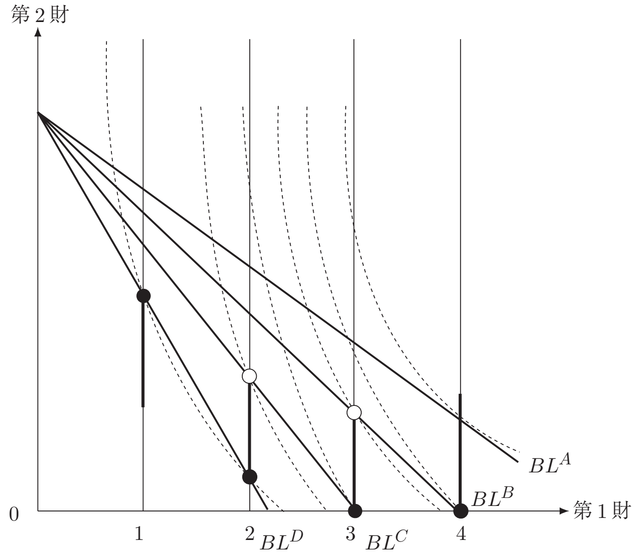
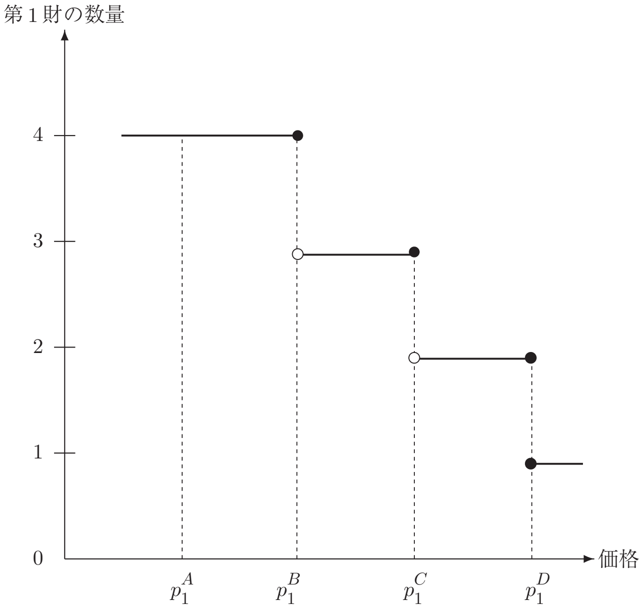


図７　消費者の第１財の需要曲線



る。しかし，需要関数となっている領域では実数値関数として半連続な関数で，下半連続ではないが，上半連続である。また，価格 p_1^D を含む領域全体で需要対応として眺める場合，価格 p_1^D では需要対応として凸値ではないが連続であり，上半連続であると同時に下半連続でもある。しかし，p_1^B，p_1^C においては上半連続とならない。(25)

Cournot の個人需要の不連続性の認識が，図４と図５で示したように，需要対応として凸値にな

らないということだったのか，対応が上半連続性を満たさないということの認識まであったと理解すべきか，筆者には定かではない。図 7 の p_1^D において需要対応は凸値にならない。このような状況を Cournot [3, pp. 38–39] が下半連続な階段関数として先の脚注で述べたように説明しようとしたと解釈するならば，図 7 の p_1^B，p_1^C において需要対応として上半連続とならない状況の認識はなかったことになる。しかし，p_1^B と p_1^C においては対応の値が一意的であり，関数と見るとこれらの点で上半連続となる。Cournot の説明は単に需要関数が半連続という認識のみで，それが上半連続かあるいは下半連続という区別の認識まではしていないレベルでの説明だと解釈することも可能であろう。その場合，需要対応として上半連続とならない状況の認識はあったと解釈できることになる。(26)

これまでに見てきた Cournot, Walras, Marshall の個人需要の不連続性および Pareto の不連続性に関する認識について，筆者の見解を要約的にまとめると，つぎのようになる。

(1) Pareto 以外いずれの場合も非分割財についての明示的な議論はないものの，完全分割可能財の財空間の枠組みでは，彼らが言葉もしくはグラフで描写する「階段状」の需要曲線は得られない。

(2) しかし，明示的に非分割財を組み込んだ財空間の枠組みにおいては，需要対応が凸値にならないという状況を弱い意味での「階段」と解釈することにより，「階段状」の需要曲線を得ることは可能である。

(3) Cournot，Walras，Marshall が非分割財を念頭において議論したと解釈しても，Walras と Marshall の場合は，需要対応の上半連続性の欠如を認識した不連続性の説明ではない。

(4) Cournot の場合は，需要対応の上半連続性の欠如をある程度認識した不連続性の説明だと解釈できる余地はある。

---

(25) 対応 $F : X \to Y$ が $x \in X$ において上半連続（upper hemi-continuous）であるとは，Y における任意の開集合 $G \supset F(x)$ に対し，$x \in V$ となる適当な開集合を選べば，すべての $z \in V$ について $F(z) \subset G$ が成立することであり，すべての $x \in X$ において上半連続であれば，$F(x)$ は上半連続であるという。

また，F が $x \in X$ において下半連続（lower hemi-continuous）であるとは，Y において $F(x) \cap G \neq \emptyset$ となる任意の開集合 G に対し，$x \in V$ となる適当な開集合を選べば，すべての $z \in V$ について $F(z) \cap G \neq \emptyset$ が成立することであり，すべての $x \in X$ において下半連続であれば，$F(x)$ は下半連続であるという。

(26) 1950–60 年代の一般均衡の存在に関する証明は，個人の需要対応が上半連続となる枠組みで行われたため，需要対応が上半連続とならない状況の認識は文献では限定的であり，代表的には Debreu [6, 4.8, p. 63] に見られるように，個人の富（所得）水準が消費可能な財の組み合わせのうち最も安価なものしか購入できない水準にあるときに，個人の需要対応が上半連続にならない可能性があり，こうした状況が避けられるような経済環境の下で存在証明がなされた。しかし，図 7 の p_1^B, p_1^C における状況は非分割財の存在によって引き起こされる状況であり，個人の富水準が消費可能な財の組み合わせのうち最も安価なものしか購入できない水準にあるからではない。こうした状況の明示的な指摘は Mas-Colell [11] や Yamazaki [18] に見られるものである。

（5） Pareto の場合は，明示的に非分割財を財空間の中に認めて，需要を導出する前段階での無差別曲線の不連続性を認識した議論である。

4.2 Debreu コンジェクチャーと市場需要の連続性に関する共通認識の現代的解釈

最後に Debreu コンジェクチャーに立ち返り，コンジェクチャーの視点から市場需要の連続性に関する共通認識の現代的解釈を試みたい。

前節でまとめたように Cournot，Walras，Pareto，Marshall は，いずれも価格の変化に対して個人の需要は不連続に変化すると考えるが，市場全体の需要は連続だという共通認識を持っている。

再度 Debreu が述べた内容を見ると「One expects that if the meausre ν is suitably diffused over the space A (of economic agents' characterisitics), integration over A of the demand *correspondences* of the agents will yield a total *demand function*, possibly even a total demand function of class C^1.」である。この前半の内容は，まさしく Cournot [3, p. 39] や Marshall [10, pp. 82–83] が述べているような「人々の間で，富，嗜好，ニーズなどに幅広いバリエーションが見られれば」という状況を大きな経済の枠組みで描写したものと解釈できる。Debreu のコンジェクチャーが Cournot や Marshall の考えを反映したものか否か，Debreu の論文では全く触れられていないが，筆者個人的には Debreu が少なくとも Cournot のこうした考えを知らなかったとは考え難い。

コンジェクチャーの後半部分を二つに分けて考えると，一つは個人需要が対応になっていたとしても，人々の間での富や嗜好あるいはニーズなどに十分なバリエーションがあれば，個人の需要（対応）を集計して得られる全体の総需要（対応）は，関数になる状況があるだろうという点である。二つ目は，総需要対応が関数になれば，それが連続可微分な関数となる状況も考えられるという点である。

この第一の点は，Cournot [3, pp. 38–39] および彼に続いて Marshall [10, pp. 82–83] が述べた内容の文字通りの現代的解釈と言えると私は考える。それは市場全体の需要が関数になるということは，1950–60 年代の枠組みでは言外に需要が価格に対して連続な変化をするということを含むと言えるからである。(27)

後半部分の第二の点については，Cournot，Walras，Pareto，Marshall の誰も触れていないように見えるかも知れない。しかしながら，第 2 節で指摘したように Cournot [3, p. 39] の連続関数の性質の描写から，彼が需要関数の連続性を論じるとき，彼は需要関数の連続性の名のもとに微分可能性を

（27） 需要対応が関数になるというだけで，関数としての連続性まで言外に含むのだろうかという疑問については，多少触れておいた方がよいかも知れない。Debreu コンジェクチャーの枠組みはすべての財が完全分割可能財であり，かつ選好関係の微分構造が導入された体系では，先の脚注で述べたような需要対応の上半連続性が欠如する状況は排除されていると解釈できるため，需要対応が関数になるということ自体が，需要関数の連続性を保障することになると言えるのである。

意味しているとの解釈も許されると筆者は考える。(28) このような理解をすると，Cournot [3, pp.38–39] の議論は Debreu コンジェクチャーそのものとなる。つまり，言い方を逆転すれば，Cournot の議論の現代的解釈を Debreu コンジェクチャーが与えたということである。

つぎにコンジェクチャーの直接的な意義から離れるが，Walras と Pareto がいう「大数の法則」あるいは「平均的現象」としての認識とコンジェクチャーとの関連について触れる必要があろう。

Aumann [1] が導入した連続体経済を考え，$I = [0,1]$ を経済を構成する人々の集団を表現する指標の集合とし，λ を I のルベーグ測度で人々の集団 $S \subset I$ に対し，$\lambda(S)$ は S に属する人々の I 全体に対する割合を表すものとする。各 $t \in I$ に対し，$F(t,p)$ を t の個人需要対応の価格ベクトル p における値を示す需要ベクトルの集合とすると，連続体経済の枠組みでは，個人需要対応 $F(t,p)$ の I 上の積分 $\int_I F(t,p)d\lambda$ が，経済における総需要対応の p における値を示す集合である。(29)

Aumann の連続体経済の枠組みを大きな経済として発展的に体系化した Hildenbrand [9] は，総需要を「平均需要（Mean Demad)」ともよぶ。総需要の需要数量を表現する単位が，経済を構成する人々一人当たり何単位かという数量表現として解釈されるからである。ところで，総需要としての平均需要の値 $\int_I F(t,p)d\lambda$ は凸集合になることが知られている。(30) Walras の場合，個人需要を集計して市場の総需要を導出する際に「大数の法則」を持ち出していることから考えると，彼が意味する「大数の法則」は，平均需要の値 $\int_I F(t,p)d\lambda$ が凸集合になることを意味していたと解釈するのが妥当ではないだろうか。つまり，多くの個人の需要を集計していくという操作そのものに内在した現象としての「凸化効果」(convexing effects) の意味での「大数の法則」という理解である。

それでは Pareto のいう「平均的現象」の場合はどうだろうか？　総需要としての平均需要を，「平均的な現象」としての経済数量と解釈することも考えられる。しかし，そうした解釈は精確さを欠くと思われる。理由は，Pareto が財空間における数量の扱い方を問題にしているからである。つまり，彼は個人が実際に離散的な数量の選択に直面しているとしても平均的な現象を分析するのだから，理論上連続的な数量の中から個人が選択を行っているとして分析してよいというのである。

Pareto の考え方をより精確に表現するには，つぎのような議論展開が必要になると考える。つまり，非分割財が存在すると実際にはそれを離散的な数量で表現しなければならないから，財空間の中の消費可能な領域は非凸となり，個人の選好関係も非凸とならざるを得ない。そこで分析におけ

---

(28)　先に触れたように連続関数の性質として局所的に線形になると指摘しているからである。また，彼の微積分の教科書（Cournot [5, pp. 9–10] を参照）においても微分可能な関数の性質として，この性質を示している。

(29)　この理論的枠組みで用いられる対応の積分概念については，例えば Hildenbrand [9]，丸山 [19]，山崎 [20] 等を参照されたい。

(30)　この事実は周知のようにアトムレス測度空間上で定義されたベクトル測度に関する Lyapunov の定理から導かれたものである。Hildenbrand [9, Theorem 3, p. 62]，山崎 [20, 定理 14.2, p. 186] 等を参照のこと。

る便宜上，消費集合と選好関係を凸化し，それぞれ連続した数値の組からなる選好関係を用いて需要対応を導くとする。このとき，凸化せずに求めた元々の経済の総需要と便宜上消費集合と選好関係を凸化して求めた総需要とが一致するという議論として Pareto の考えを解釈するのである。(31)

本稿では Debreu コンジェクチャーの視点に限定して，経済分析において取り扱う数量および変量が代表的な理論家によりどのように認識され，表現されてきたかを考察した。しかし，経済分析に関係する数量や変量の表現形式が，数学の発展の歴史と深く関わっていることは明らかだと考えられる。したがって，数学の歴史に見る数量の表現と経済数量の認識との関係についても，考察を深める必要があるが，今後の課題としたい。

（明星大学経済学部・大学院経済学研究科教授，一橋大学名誉教授）

参 考 文 献

[1] AUMANN, Robert J., 1964, Markets with a Continuum Traders, *Econometrica* 32, 39–50.

[2] BOURBAKI, Nicolas, 1994, *Elements of the History of Mathematics*, translated by J. Meldrum, Springer-Verlag: Berlin.

[3] COURNOT, Antoine Augustin, 1838, *Recherches sur les Principe Mathématiques de la Théorie des Richesses*, L. Hachette: Paris.

[4] COURNOT, Antoine Augustin, 1927, *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, translated by N. Bacon, the Macmillan Company: New York.

[5] COURNOT, Antoine Augustin, 1841, *Traité Elémentaire de la Théorie des Fonctions et du Calcul Infinitésimal*, L. Hachette: Paris.

[6] DEBREU, Gerard, 1959, *Theory of Value*, John Wiley & Sons: New York.

[7] DEBREU, Gerard, 1972, Smooth Preferences, *Econometrica* 40, 603–15.

[8] HILDENBRAND, Werner, 1974, *Core and Equilibria of a Large Economy*, Princeton University Press: Princeton.

[9] HILDENBRAND, Werner, 1980, On the Uniqueness of Mean Demand for Dispersed Families of Preferences, *Econometrica* 48, 1703–1710.

[10] MARSHALL, Alfred, 1920, *Principles of Economics*, 8th Edition, The Macmillan Press: London.

[11] MAS-COLELL, Andreu, 1977, Indivisible Commodities and General Equilibrium Theory, *Journal of Economic Theory* 16, 443–456.

[12] PARETO, Vilfreto, 1906, *Manuale di Economia Politica*, Società Editrice Libraria: Milano.

[13] PARETO, Vilfreto, 1971, *Manual of Political Economy*, translated by Ann S. Schweir, MacMillan Press: New York.

[14] SCHUMPETER, Joseph A., 1954, *History of Economic Analysis*, edited from manuscript by Elizabeth B. Schumpeter, Oxford University Press: New York.

[15] WALRAS, Leon, 1874–1877, *Éléments d'Economie Politique Pure*, (Édition définitive, 1926), Corbaz: Lausanne.

(31) このように解釈した場合，この命題がどの程度成り立つかについては，例えば，山崎 [20, 定理 14.1 および定理 14.2, pp. 184–187] を参照せよ。

[16] WALRAS, Leon, 1954, *Elements of Pure Economics*, translated by William Jaffé, George Allen and Unwin; London.

[17] YAMAZAKI, Akira, 1978, An Equilibrium Existence Theorem without Convexity Assumptions, *Econometrica* 46, 541–555.

[18] YAMAZAKI, Akira, 1979, Continuously Dispersed Preferences, Regular Preference-Endowment Distribution, and Mean Demand Fuction, in J. Green and J. Scheinkman, eds., *General Equilibrium, Growth, and Trade*, Academic Press: New York, 13–24.

[19] 丸山 徹，2006,『積分と函数解析』シュプリンガー・フェアラーク東京。

[20] 山崎 昭，1986,『数理経済学の基礎』創文社。