

Title	消費者理論と平面の幾何学
Sub Title	Consumer theory and plane geometry
Author	細矢, 祐誉(Hosoya, Yuki)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2009
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.102, No.1 (2009. 4) ,p.161- 172
JaLC DOI	10.14991/001.20090401-0161
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	<a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20090401-0161">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20090401-0161</a>

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

## 研究ノート

# 消費者理論と平面の幾何学\*

細 矢 祐 誉

（初稿受付 2008 年 10 月 29 日、  
査読を経て掲載決定 2009 年 2 月 9 日）

## 1 序 論

消費者理論における積分可能性問題とは、消費者の選好という隠されたものを、より観察が容易である需要関数から導くことができるか否かという問題である<sup>(1)</sup>。

この問題を考察するにあたって、2次元の空間における問題はより高次元の空間における問題よりもはるかに簡単であるということが古くから知られている。たとえば Samuelson (1950) は、2次元では積分可能性は問題にならないと論じた。実際、彼がこの論文の内部で導入した積分可能性の条件のひとつである Slutsky 行列の対称性は、2財の場合には特段の仮定なしに導かれるということがよく知ら

れている<sup>(2)</sup>。また Rose (1958) は 2 財のケースでは顕示選好の弱公理が強公理を導くことを示したが、ここからも 2 財の場合には問題が大幅に簡単になることが示唆される。

一方で高次元の問題を扱う際にも、2 財のケースに近い状況を意図的に作って論じることが有益になる場合がある。たとえば Debreu (1972) は多次元の積分可能性問題について論じる際に、その空間全体を平面で区切って、その平面上の極大連結積分曲線という道具を用いて議論を行った。このように、高次元における積分可能性問題を議論するために 2 次元の空間についての結果は有用であるが、きちんと議論するためには平面の幾何学的性質について十分な理解を持つておくことが必要不可欠である。

\* 本稿を投稿するに際し、多くの有益なコメントをいただいた匿名の査読者に感謝します。

(1) 需要関数ではなく、有限個の需要データから選好を導く方法を模索する研究もあるが、本稿では扱わない。より詳しくは Afriat (1967) 等を見よ。

(2) Mas-Colell, Whinston and Green (1995) の第二章を見よ。

本稿において、我々は積分可能性理論についてのひとつの問題を紹介する。次にそれに関連する、平面の幾何学的性質についてのいくつかの結果を紹介し、それらにきちんとした証明を与える。そして最初に挙げた問題をそれらの結果を用いて解決し、理論経済学における同分野の果たす役割のひとつを明らかにする。

本稿における結果は積分可能性理論についてのより深い結果のための準備として与えられるものである。これらを用いたより深い議論は Hosoya (2008) で行われる。

## 2 問題の例示

$C^{\ell}$  級の関数  $g : \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}_{++}^n$  を任意に選ぶ。 $g$  は経済学的には逆需要関数を表すと考えよう。<sup>(3)</sup> 積分可能性理論の目的はこの  $g$  に対応する選好  $\succsim^g$  を計算することである。ここで、 $(x, v) \in (\mathbb{R}_{++}^n)^2$  を任意に選んで固定する。もし  $x$  がたまたま  $v$  と同一直線上に位置していたならば、 $x = cv$  となるような  $c > 0$  があるので、その  $c$  を  $u^g(x, v)$  と書き、 $u^g(x, v) \geq 1$  であるとき、またそうであるときに限って  $x \succsim^g v$  である、と定義すればよい。しかしそれ以外のケースでは、 $x \succsim^g v$  であるか否かを決定することはより難しくなる。

この難しさを克服する鍵となるアイデアは「無差別曲線」である。仮にいま、なんらかの曲線  $z$  の軌道が  $x$  を通る無差別曲線を表すと

しよう。ここで  $t(x, v)$  を  $z(t(x, v)) = cv$  となるような  $c > 0$  が存在するようにうまく選ぶと、 $z(t(x, v))$  は  $x$  と無差別なはずである。そこで  $c \geq 1$  であるとき、またそうであるときに限って  $x \succsim^g v$  である、と定義すればよい。

このアイデアを実現するためには曲線  $z$  を見つける手段がどうしても必要になる。そのために我々は「無差別曲線はその任意の点で、その点を需要する価格に対応する予算超平面と接している」という事実に着目する。 $g$  は逆需要関数であるから価格を表し、従って対応する予算超平面と直交している。故に  $g$  は無差別曲線とも直交しているはずである。従って  $z$  を見つけるためには、 $\dot{z}$  が常に  $g(z)$  と直交しているような微分方程式を作り、それを解いてやればよさそうだ、ということが推測できる。

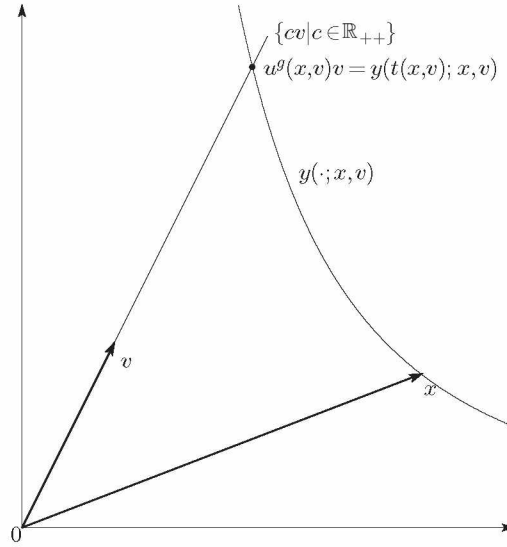
問題は  $\dot{z}$  の作り方であるが、我々は以下のように設定する。

$$\dot{z} = (g(z) \cdot x)v - (g(z) \cdot v)x, \quad (1)$$

この式の右辺が  $g(z)$  と直交しているということはすぐに見て取れるだろう。ここで  $z(t; x, v)$  は  $z(0) = x$  を初期値とする上の問題の延長不能な解であるとし、 $t(x, v)$  は  $z(t(x, v); x, v)$  が  $v$  と一次従属になるようなただひとつの  $t$  であるとしよう。するとある  $u^g(x, v) > 0$  に対して  $z(t(x, v); x, v) = u^g(x, v)v$  となっているので、 $u^g(x, v) \geq 1$  であるとき、またそのときに限って  $x \succsim^g v$  で

(3) 逆需要関数の定義域を  $\mathbb{R}_{++}^n$  とすることは、需要関数が内点への全射な関数であると暗黙のうちに仮定している、ということに注意されたい。

図 1 文中の手法の図解



ある，と定義すればよい。図 1 はこの手法を図解したものである。

あとは  $t(x, v)$  の存在と一意性の問題だけを解決すればよい。これを解決するために，我々は平面の幾何学を用いた議論を行う。議論の子細は後に譲るとして，ここでは命題だけを提示しておこう。

**命題 1**  $x, v \in \mathbb{R}_{++}^n$  が互いに一次独立であるとき， $t(x, v)$  は存在し，しかも一意的に定まる。

**補足：**上の結果のうち，関数  $u^g$  の持つ意味について気になる読者のために，多少の注意書きをしておこう。

$u^g$  の定義から， $u^g(x, v)v$  と  $x$  は無差別でなければならない。いま  $v$  を固定したものとして見れば， $u^g(x, v)$  は  $x$  と同程度に好ましい暮らしを維持するために  $v$  という「基準財

バスケット」が何単位必要であるかを指す指数である。

この指数  $u^g(x, v)$  の構築法は，単調な選好から効用関数を導出するための典型的手続きと酷似している。いま， $\mathbb{R}_+^n$  上の選好  $\succsim$  が完備，推移的，連続かつ単調であるとしよう。<sup>1</sup> はすべての座標が 1 であるようなベクトルとし，任意の  $x \in \mathbb{R}_+^n$  に対して， $u(x)1 \sim x$  であるようなただ一つの実数  $u(x)$  を取る。このとき関数  $u : x \mapsto u(x)$  は  $\succsim$  を表現する効用関数であるのだが，<sup>(4)</sup> 重要なのは  $u(x)$  が  $u^g(x, 1)$  と同一の指数を意味しているように見えることである。ここから，なんらかの条件の下で関数  $u_v^g : x \mapsto u^g(x, v)$  が我々の作った選好  $\succsim^g$  に対応する効用関数となるのではないか，という予想が自然に生じる。

詳細はあまりに長くなるので省くが，この予想は結果的に正しい。より正確には， $v \in \mathbb{R}_{++}^n$

(4) この事実の証明は Mas-Colell, Whinston and Green(1995) の第三章 C 節にある。

を任意に取って固定したとき、 $\ell \geq 2$ ,  $g$  が  $C^\ell$  級という仮定の下で、以下の 4 条件の同値性を示すことができる：

- 任意の  $i, j, k$  に対して<sup>(5)</sup>,  

$$g^i(\partial_j g^k - \partial_k g^j) + g^j(\partial_k g^i - \partial_i g^k) + g^k(\partial_i g^j - \partial_j g^i) = 0.$$
- $\succsim^g$  は推移的な選好である。
- $u_v^g$  は  $C^\ell$  級で、ある関数  $\lambda: \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}$  に対して  $Du_v^g = \lambda g_v$ 。
- $u_v^g$  は  $C^\ell$  級で、 $\succsim^g$  を表現する効用関数である。

なお、上の 4 条件のうち一番上の条件は Debreu (1972) にも引用されており、「積分可能性条件」の名で呼ばれることもある。特に  $g^n \equiv 1$  という正規化がなされているときには、この条件はいわゆる Antonelli 行列の対称性と（従って、Slutsky 行列の対称性とも）対応する。この条件を満たさない（にもかかわらず、弱公理を満たす需要関数と対応する）逆需要関数の例はいくつか存在し、そのうちのひとつは Gale (1960) によって挙げられている。従って  $u_v^g$  が効用関数とならないような場合も存在するのだが、本格的に議論すると長くなるのでこれ以上は書かない。

### 3 平面の幾何学に関する結果

最初に、互いに一次独立であるような任意の  $(x, v) \in (\mathbb{R}_{++}^n)^2$  を取り、それに対して以下の記号群を定義しておく。<sup>(6)</sup>

$$a_1 = \frac{1}{\|x\|}x, \\ a_2 = \frac{1}{\|v - (v \cdot a_1)a_1\|}(v - (v \cdot a_1)a_1).$$

$a_1, a_2$  は  $x, v$  から Gram-Schmidt 法によって生成される平面  $\text{span}\{x, v\}$  の正規直交基底である。

$$Py = (y \cdot a_1)a_1 + (y \cdot a_2)a_2.$$

$P$  は  $\mathbb{R}^n$  から  $\text{span}\{x, v\}$  への正射影である。

$$Rw = (w \cdot a_1)a_2 - (w \cdot a_2)a_1,$$

$R$  は平面  $\text{span}\{x, v\}$  上で、ベクトルの長さを保ちながら 90 度回転させる回転作用素に対応する。 $R$  は形式上  $\mathbb{R}^n$  全体で定義されているように見えるが、回転作用素としての意味をはっきりさせるために、我々は  $R$  の定義域が  $\text{span}\{x, v\}$  であると考えことにする。

$$v_1 = \arg \min \{w \cdot a_1 | w \in P\mathbb{R}_+^n, \\ \|w\| = 1, w \cdot a_2 \geq 0\}, \\ v_2 = \arg \min \{w \cdot a_1 | w \in P\mathbb{R}_+^n, \\ 6\|w\| = 1, w \cdot a_2 \leq 0\}.$$

後で示すが、 $v_1, v_2$  は凸錐  $P\mathbb{R}_+^n$  を張るベクト

(5) 我々は上付添え字で座標を表すことにする。つまり、 $g^i$  は  $g$  の第  $i$  座標という意味である。また、 $\partial_i f$  は関数  $f$  の第  $i$  変数による偏微分を指す。  
(6) 以下の記号群はすべて  $(x, v)$  の関数であるのだが、その変数は誤解の余地がない場合は省略して書くことにする。たとえば  $a_1(x, v)$  は  $a_1$  と略記する。

ルになる。

$$\begin{aligned} y_1 &= \{s_1 v | s_1 \in \mathbb{R}\} \cap \{x + s_2 Rv_1 | s_2 \in \mathbb{R}\}, \\ y_2 &= \{s_3 v | s_3 \in \mathbb{R}\} \cap \{x + s_4 Rv_2 | s_4 \in \mathbb{R}\}, \\ \Delta &= \{w \in \text{span}\{x, v\} | w \cdot Rv \leq 0, \\ &\quad w \cdot v_1 \geq x \cdot v_1, w \cdot v_2 \leq x \cdot v_2\}. \end{aligned}$$

$y_1$  は  $v$  方向への原点を通る直線と,  $x$  を通る傾き  $Rv_1$  の直線の交点である。 $y_2$  も同様。後で厳密に示すが,  $\Delta = \text{co}\{x, y_1, y_2\}$  であり, これは半空間  $\{w \in \text{span}\{x, v\} | w \cdot v \leq 0\}$  と錐  $x + RP\mathbb{R}_+^n$  の共通部分と一致する。この集合がコンパクトであるという事実が後の命題 1 の証明に本質的に重要である。

また例外的に  $y_1, y_2$  のみ, 同一直線上にあるような二点  $(x, v) \in (\mathbb{R}_{++}^n)^2$  に対しても  $y_1(x, v) = y_2(x, v) = x$  と定義しておく。

最後に定数をひとつ定義しておく。

$$C = \|x\| \|v - (v \cdot a_1)a_1\|.$$

ここで本稿が証明する結果について列挙しておこう。

- a)  $y \in \mathbb{R}^n$  かつ  $w \in \text{span}\{x, v\}$  のときには必ず  $y \cdot w = Py \cdot w$  が成り立つ。
- b)  $R$  は  $Ra_1 = a_2$  および  $Ra_2 = -a_1$  を満たすただひとつの  $\text{span}\{x, v\}$  上の直交変換である。さらに, もし  $T$  が  $\text{span}\{x, v\}$  上の直交変換であり, また任意の  $w \in \text{span}\{x, v\}$  に対して  $w \cdot Tw = 0$  を満たすのであれば,  $T = R$  か  $T = -R = R^{-1} = R^3$  のいずれかが成り立つ。特に,

$z \in \text{span}\{x, v\} \cap \mathbb{R}_{++}^n$  かつ  $[x, z] \cap \{cv | c \in \mathbb{R}\} = \emptyset$  であれば, 必ず  $R(x, v) = R(z, v)$  が成り立つ。

- c)  $v_1$  と  $v_2$  は連続な一価関数であり,  $P\mathbb{R}_+^n = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 | c_1, c_2 \geq 0\}$  が成り立つ。
- d)  $y_1$  と  $y_2$  は連続な一価関数であり, さらに任意の  $(x, v) \in (\mathbb{R}_{++}^n)^2$  について  $y_1(x, v), y_2(x, v) \in \mathbb{R}_{++}^n$  となる。<sup>(7)</sup>
- e)  $\Delta = (x + RP\mathbb{R}_+^n) \cap \{w \in \text{span}\{x, v\} | w \cdot Rv \leq 0\} = \text{co}\{x, y_1, y_2\}$  が成り立つ。従って  $\Delta$  は  $\mathbb{R}_{++}^n$  内のコンパクト集合である。
- f) 任意の  $y \in \mathbb{R}^n$  に対して  $(y \cdot x)v - (y \cdot v)x = C \cdot RPy$  が成り立つ。

以下, 結果を直観的に理解できるように, 簡単な場合についてこれらの記号群を実計算してみよう。

$x = (2, 1), v = (1, 2)$  とする。このとき,

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1), a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2),$$

である。 $P$  は恒等変換  $I$  に等しい。また簡単な計算により, 任意の  $z = (z^1, z^2)$  に対して

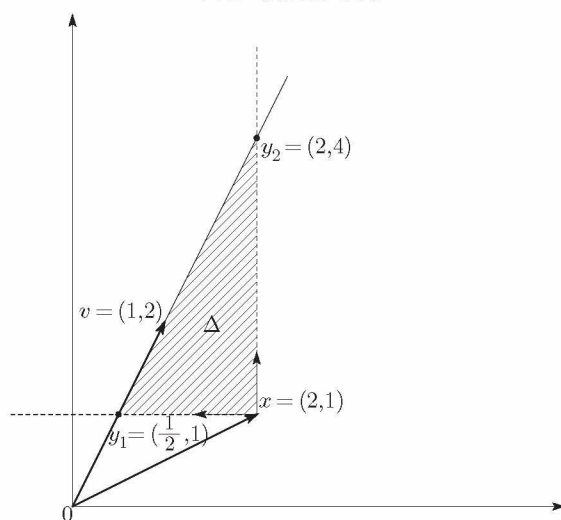
$$Rz = (-z^2, z^1),$$

であることを示せる。 $P\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R}_+^2$  であるから, 定義どおりに計算すれば  $v_1 = (0, 1)$  および  $v_2 = (1, 0)$  を得る。従って  $Rv_1 = (-1, 0), Rv_2 = (0, 1)$  である。これを用いて  $y_1, y_2$  を計算すれば,  $y_1 = (\frac{1}{2}, 1)$  であり, また  $y_2 = (2, 4)$  であることがわかる。そして,

$$\Delta = \{(z^1, z^2) | z^2 \leq 2z^1, z^2 \geq 1, z^1 \leq 2\},$$

(7)  $y_1, y_2$  の定義域だけは他の記号と異なり  $(\mathbb{R}_{++}^n)^2$  であるということに注意。

図 2 実計算の例



を得る。

図 2 はこれらの結果の一部を図示したものである。これを見れば、上で挙げたいくつかの性質、特に e) などについては確かに成り立っていることが確認できるであろう。

#### 4 証明

##### 4.1 a) の証明

$y \in \mathbb{R}^n$  および  $w \in \text{span}\{x, v\}$  を任意に取る。凸集合の最短距離定理より、 $(y - Py) \cdot w \stackrel{(8)}{\leq} 0$  がわかる。一方で  $-w \in \text{span}\{x, v\}$  であるから、 $(y - Py) \cdot (-w) \leq 0$  である。合わせて  $(y - Py) \perp w$  を得る。故に  $y \cdot w = Py \cdot w$  となる。以上で証明が完成した。■

##### 4.2 b) の証明

$\{a_3, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$  を  $\text{span}\{x, v\}$  の直交補

空間における任意の正規直交基底とし、また  $A$  は  $i$  列目が  $a_i$  と等しくなるような  $n$  次正方行列であるとする。ここで、

$$T^* = A \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} A^{-1},$$

と定義する。線形代数でよく知られた事実から、 $T^*$  は直交変換であることがわかる。明らかに  $R = T^*|_{\text{span}\{x, v\}}$  であるから、 $R$  もまた直交変換である。 $Ra_1 = a_2$ ,  $Ra_2 = -a_1$ ,  $R^{-1} = -R = R^3$  は明白であろう。

次に、 $T$  は任意の  $w \in \text{span}\{x, v\}$  に対して  $w \cdot Tw = 0$  となるような  $\text{span}\{x, v\}$  上の直交変換であるとする。 $\dim(\text{span}\{x, v\}) = 2$  であるから、 $Ta_1 = a_2$  か  $Ta_1 = -a_2$  のいずれかである。

(8) たとえば丸山 (1995) の第四章などを見よ。

$Ta_1 = a_2$ であったとしよう。もし  $Ta_2 = -a_1$  であるならば、明らかに  $T = R$  である。そこでそうでないと仮定してみよう。 $a_2 \cdot Ta_2 = 0$  かつ  $\dim(\text{span}\{x, v\}) = 2$  であるから、 $Ta_2 = a_1$  でなければならない。すると  $T(a_1 + a_2) = a_1 + a_2$  であるため、 $0 = (a_1 + a_2) \cdot T(a_1 + a_2) = 2$  となるがこれは矛盾である。従ってこれはあり得ず、 $T = R$  が正しい。対称的な議論により、 $Ta_1 = -a_2$  ならば  $T = R^{-1}$  であることもわかる。

$R$  の一意性は上の事実から明白である。最後に、 $[x, z] \cap \{cv | c \in \mathbb{R}\} = \emptyset$  であるような  $z \in \text{span}\{x, v\} \cap \mathbb{R}_{++}^n$  を任意に選ぶ。記号の節約のために  $R(x, v)$  を  $R$  と書こう。任意の  $w$  について  $w \cdot R(z, v)w = 0$  であるから、 $R(z, v) = R$  と  $R(z, v) = -R$  のどちらかしかあり得ない。そこで仮に  $R(z, v) = -R$  であったとしてみよう。 $w(t) = R((1-t)x + tz, v)v$  と定義する。 $w$  は  $[0, 1]$  上で連続であり、また  $w(t) = Rv$  と  $w(t) = -Rv$  のいずれかが成り立つ。従って  $w^{-1}(Rv)$  と  $w^{-1}(-Rv)$  は非空で共通部分を持たない  $[0, 1]$  内の閉集合であり、さらに  $w^{-1}(Rv) \cup w^{-1}(-Rv) = [0, 1]$  であるが、これは  $[0, 1]$  の連結性に矛盾する。以上で証明が完成した。■

#### 4.3 c) の証明

任意の  $w \in P\mathbb{R}_+^n$  を選び、 $Py = w$  となるような  $y \in \mathbb{R}_+^n$  を選ぶ。1) から、 $w \cdot a_1 = y \cdot a_1$  であり、また  $a_1 \in \mathbb{R}_{++}^n$  であるから、 $w \cdot a_1 \geq 0$  と  $w \cdot a_1 = 0 \Leftrightarrow w = 0$  がわかる。従って  $w \in P\mathbb{R}_+^n$  かつ  $\|w\| = 1$  であればうまく  $c \in ]-1, 1[$  を選んで

$$w = \sqrt{1 - c^2} a_1 + ca_2,$$

となるようにできる。 $c = w \cdot a_2$  であることに注意する。ここで、

$$c^* = \max\left\{\frac{1}{\|Py\|} Py \cdot a_2 \mid y \in \mathbb{R}_+^n, \sum_{i=1}^n y^i = 1\right\},$$

と定義しよう。 $w \in P\mathbb{R}_+^n$  かつ  $\|w\| = 1$  であるような任意の  $w$  を取り、 $Pz = w$  となる  $z \in \mathbb{R}_+^n$  を取ってくる。 $w \neq 0$  なので  $z \neq 0$  であり、従って  $\sum_{i=1}^n z^i > 0$  である。そこで  $y = \frac{1}{\sum_{i=1}^n z^i} z$  とする。すると  $\frac{1}{\|Py\|} Py = w$  であるため、 $c^*$  の定義から  $w \cdot a_2 \leq c^*$  である。従って

$$v_1 = \sqrt{1 - (c^*)^2} a_1 + c^* a_2,$$

となることがわかり、 $v_1$  は well-defined な一価関数である。また Berge の定理を  $c^*$  に適用すれば  $c^*$  は  $(x, v)$  に関する連続関数であり、故に  $v_1$  も連続である。 $v_2$  についても同様にして同じ主張を確かめることができる。

$P\mathbb{R}_+^n$  は  $a_1$  の近傍を含むので、 $v_1 \neq a_1 \neq v_2$  であることに注意。従って  $v_1 \neq v_2$  がわかる。 $a_1 \cdot v_1, a_1 \cdot v_2 > 0$  であるから、 $v_1 \neq -v_2$  であり、従って  $v_1$  は  $v_2$  と一次独立である。

次に  $K^* = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 \mid c_1, c_2 \geq 0\}$  と定義する。 $P\mathbb{R}_+^n$  が凸錐なのは明白なので、 $K^* \subset P\mathbb{R}_+^n$  は正しい。逆の包含関係を示すために、まず  $a_1 \in K^*$  であることを示す。 $a_2 \cdot v_1 > 0$  および  $a_2 \cdot v_2 < 0$  から、 $a_2 \cdot w = 0$  であるような  $w \in [v_1, v_2]$  が存在する。 $\dim(\text{span}\{x, v\}) = 2$  であるからある  $c \in \mathbb{R}$  に対して  $w = ca_1$  であるが、 $v_1$  は  $v_2$  と一次独立なので  $c \neq 0$  である。一方、



$v_1, v_2 \in P\mathbb{R}_+^n$  であり  $P\mathbb{R}_+^n$  は凸なので,  $w \in P\mathbb{R}_+^n$  であり従って  $c = w \cdot a_1 \geq 0$  である。故に  $c > 0$  であり, よって  $a_1 = c^{-1}w \in K^*$  がわかる。

さて, いよいよ  $P\mathbb{R}_+^n \subset K^*$  を示そう。このためには,  $\|w\| = 1$  となるような任意の  $w \in P\mathbb{R}_+^n$  に対して  $w \in K^*$  となることを示せば十分である。そこで  $w \in P\mathbb{R}_+^n$  かつ  $\|w\| = 1$  としよう。仮に  $w \cdot a_2 \geq 0$  であったとする。するとある  $c \in [0, c^*]$  に対して  $w = \sqrt{1-c^2} a_1 + ca_2$  である。すると  $Rw = \sqrt{1-c^2} a_2 - ca_1$  であるから,

$$a_1 \cdot Rw = -c \leq 0,$$

$$v_1 \cdot Rw = c^* \sqrt{1-c^2} - c \sqrt{1-(c^*)^2} \geq 0,$$

がわかる。故に  $w^* \cdot Rw = 0$  となるような  $w^* \in [v_1, a_1]$  が存在するが,  $\dim(\text{span}\{x, v\}) = 2$  なのである  $d \in \mathbb{R}$  に対して  $w^* = dw$  である。 $v_1$  は  $a_1$  と一次独立であるから  $w^* \neq 0$  で, また  $w^* \in P\mathbb{R}_+^n$  だから  $w^* \cdot a_1 > 0$  がわかり, よって

$$d = \frac{w^* \cdot a_1}{w \cdot a_1} > 0,$$

となる。従って  $w = d^{-1}w^* \in K^*$ 。同様に  $w \cdot a_2 \leq 0$  の時も  $v_1$  の代わりに  $v_2$  を用いて  $w \in K^*$  を示すことができる。以上で証明が完成した。■

#### 4.4 d) の証明

最初に  $x$  と  $v$  が互いに一次独立であるときを考えよう。 $Py = v_1$  となるような  $y \in \mathbb{R}_+^n$

を取ると,  $y \neq 0$  であり, 従って  $v \cdot v_1 = v \cdot y > 0$  である。故に二つの直線  $\{cv | c \in \mathbb{R}\}$  と  $\{x + dRv_1 | d \in \mathbb{R}\}$  の任意の交点  $y = cv = x + dRv_1$  を取れば,

$$0 = cv \cdot Rv = x \cdot Rv + dRv_1 \cdot Rv = x \cdot Rv + dv_1 \cdot v,$$

であり, 従って  $d = -\frac{x \cdot Rv}{v_1 \cdot v}$  となる。この条件を満たす  $d$  の値はひとつしかなく, また逆に  $d$  を上の値に設定すれば  $y = x + dRv_1$  は 2 直線の交点に来る。したがって  $y_1$  は well-defined な一価関数である。またその  $(x, v)$  における連続性は上の  $d$  が  $(x, v)$  において連続であることから従う。 $y_2$  についても同様。

以下,  $y_1, y_2$  が共に  $(\mathbb{R}_{++}^n)^2$  全体の上で連続であることを示すのだが, その前に少々準備をしておく。まず  $(x, v) \in (\mathbb{R}_{++}^n)^2$  を任意に取り,  $\bar{x}(x, v) = \frac{(x \cdot v)}{\|v\|^2} v$  と定義する (つまり,  $x$  の  $v$  方向への射影を  $\bar{x}$  と書く, という意味)。 $\bar{x} \in [y_1, y_2]$  を示そう。仮に  $x$  と  $v$  が同一直線上にあれば  $\bar{x} = x$  であるから, この主張は自明である。よって以下では  $x$  と  $v$  は互いに一次独立であることを仮定する。 $v \cdot (\bar{x} - x) = 0$  であるから, ある  $c \in \mathbb{R}$  をうまく選べば  $\bar{x} - x = cRv$  となる。一方で,  $v \in P\mathbb{R}_+^n$  であるから,  $c_1, c_2 \geq 0$  をうまく選べば  $v = c_1 v_1 + c_2 v_2$  となる。よって  $\bar{x} - x = cc_1 Rv_1 + cc_2 Rv_2$  である。

$y_1, \bar{x}, y_2$  はすべて直線  $\{dv | d \in \mathbb{R}\}$  に含まれており, また  $y_1 \neq y_2$  であるから,  $t \in \mathbb{R}$  をうまく選べば  $\bar{x} = (1-t)y_1 + ty_2$  となる。後は  $t \in [0, 1]$  であることを示せば十分である。こ

(9) これは  $v_1 \neq v_2$  から導かれる。

ここで  $y_1 = x + s_1 Rv_1$ ,  $y_2 = x + s_2 Rv_2$  であるとするれば,  $\bar{x} - x = (1-t)s_1 Rv_1 + ts_2 Rv_2$  であることになる。従って  $cc_1 = (1-t)s_1$  かつ  $cc_2 = ts_2$  である。

一方で Cauchy-Schwarz の不等式により,

$$\begin{aligned} x \cdot Rv &= -(v \cdot a_2)(x \cdot a_1) \\ &= \frac{\|x\|}{\|v - (v \cdot a_1)a_1\|} [(v \cdot a_1)^2 - \|v\|^2] \\ &< 0, \end{aligned}$$

がわかる。 $y_1 \cdot Rv = 0$  かつ  $v \cdot v_1 > 0$  であるから, これらを総合して

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{v \cdot v_1} s_1 v \cdot v_1 \\ &= \frac{1}{v \cdot v_1} Rv \cdot s_1 Rv_1 \\ &= \frac{1}{v \cdot v_1} Rv \cdot (y_1 - x) \\ &> 0, \end{aligned}$$

がわかる。同様に  $s_2 > 0$  も示せる。従って  $(1-t) = \frac{cc_1}{s_1}$ ,  $t = \frac{cc_2}{s_2}$  がわかる。 $c_1, c_2 \geq 0$  なので  $t(1-t) \geq 0$  であり, 故に  $t \in [0, 1]$ 。これで  $\bar{x} \in [y_1, y_2]$  が示せた。

さて, いよいよ  $y_1, y_2$  が  $(\mathbb{R}_{++}^n)^2$  上で連続であることを示そう。 $x$  と  $v$  が互いに一次独立であるときはもう解決したので, ここではそうでないことを仮定する。 $(\mathbb{R}_{++}^n)^2$  内の点列  $((x_k, v_k))_k$  で  $(x_k, v_k) \rightarrow (x, v)$  となるものを任意に取る。 $\bar{x}(x_k, v_k) \in [y_1(x_k, v_k), y_2(x_k, v_k)]$  かつ  $\bar{x}(x_k, v_k) \rightarrow x = \bar{x}(x, v)$  であるから, 後は  $\|y_2(x_k, v_k) - y_1(x_k, v_k)\| \rightarrow 0$  が示せれば,

$$\begin{aligned} \|y_i(x_k, v_k) - x\| &\leq \|y_i(x_k, v_k) - \bar{x}(x_k, v_k)\| \\ &\quad + \|\bar{x}(x_k, v_k) - x\| \\ &\leq \|y_2(x_k, v_k) - y_1(x_k, v_k)\| \\ &\quad + \|\bar{x}(x_k, v_k) - x\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

となって証明が終わる。そこでこれを目標としよう。 $x_k$  と  $v_k$  が同一直線上にあれば  $\|y_2(x_k, v_k) - y_1(x_k, v_k)\| = 0$  なので, 一般性を失うことなくすべての  $k$  に対して  $x_k$  は  $v_k$  と互いに一次独立であると仮定してよい。

以下, 次の記号群を定義する。

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{v^i | i \in \{1, \dots, n\}\},$$

$$A = \{y \in \mathbb{R}^n | y^i > \varepsilon \text{ for any } i \in \{1, \dots, n\}\},$$

$$S = \{y \in \mathbb{R}^n | \|y\| = \varepsilon \text{ and } y^n = 0\},$$

および任意の  $y \in A$  に対して,

$$M(y) = \max_z \{\|y_2(z, y) - y_1(z, y)\| | z - y \in S\}.$$

$y \in A$  かつ  $z - y \in S$  であれば  $z \in \mathbb{R}_{++}^n$  かつ  $y$  は  $z$  と一次独立である。 $y_1, y_2$  はこのような  $(y, z)$  の点においては連続であるから, Berge の定理によって  $M$  は  $A$  上で連続であることがわかる。次に, 以下の二つの事実を示す。

- i) 互いに一次独立な任意の  $y \in A$ ,  $z \in \mathbb{R}_{++}^n$  および任意の  $c > 0$  に対して, もし  $(1-c)y + cz \in \mathbb{R}_{++}^n$  であれば必ず  $y_i((1-c)y + cz, y) - y = c(y_i(z, y) - y)$  となる。
- ii) 互いに一次独立な任意の  $y \in A$ ,  $z \in \mathbb{R}_{++}^n$  および任意の  $d > 0$  に対して,  $y_i(dz, y) = dy_i(z, y)$  となる。

記号の節約のために  $z(c) = (1-c)y + cz$  と書く。b) より,  $R(z, y) = R(z(c), y) = R(dz, y)$  がわかる。また,  $v_1(z, y) = v_1(z(c), y) = v_1(dz, y)$  は容易に示せる。従って  $v_1(z, y)$  は  $v_1$  と,  $R(z, y)$  は  $R$  と略記する

ことにしよう。  $y_1(z, y) = z + sRv_1$  となるような  $s \in \mathbb{R}$  を選ぶ。すると  $(z(c) + csRv_1) \cdot Ry = c(z + sRv_1) \cdot Ry = 0$  であるから  $z(c) + csRv_1 = y_1(z(c), y)$  であることがわかる。故に、

$$\begin{aligned} y_1(z(c), y) - y &= z(c) + csRv_1 - y \\ &= c(z + sRv_1) - cy = c(y_1(z, y) - y), \end{aligned}$$

となる。同様に  $(dz + dsRv_1) \cdot Ry = 0$  であるから  $dz + dsRv_1 = y_1(dz, y)$  であり、

$$y_1(dz, y) = d(z + sRv_1) = dy_1(z, y),$$

がわかる。  $y_2$  についても同様。これで i) と ii) が示せた。

ここで  $k > k^*$  ならば  $v_k \in A$  となっているような数  $k^*$  を選ぶ。  $d_k = \frac{v_k^n}{x_k^n}$ ,  $x_k(c) = (1 - c)v_k + cd_kx_k$  および  $c_k = \frac{\varepsilon}{\|d_kx_k - v_k\|}$  と定義しよう。すると  $x_k(c_k) - v_k \in S$ ,  $(1 - c_k^{-1})v_k + c_k^{-1}x_k(c_k) = d_kx_k$  であり、また  $M(v_k) \rightarrow M(v)$ ,  $d_k \rightarrow \frac{v^n}{x^n}$ ,  $c_k \rightarrow +\infty$  であるから、

$$\begin{aligned} &\|y_2(x_k, v_k) - y_1(x_k, v_k)\| \\ &= d_k^{-1} \|y_2(d_kx_k, v_k) - y_1(d_kx_k, v_k)\| \\ &= d_k^{-1} c_k^{-1} \|y_2(x_k(c_k), v_k) - y_1(x_k(c_k), v_k)\| \\ &\leq d_k^{-1} c_k^{-1} M(v_k) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

がわかる。これで  $y_1, y_2$  の連続性が示せた。

最後に、任意の  $(x, v) \in (\mathbb{R}_{++}^n)^2$  に対して  $y_1(x, v), y_2(x, v) \in \mathbb{R}_{++}^n$  であることを示そう。  $x$  と  $v$  が同一直線上にあれば自明なので、そうでないことを仮定する。我々は既に  $y_1 = x + sRv_1$  となるような数  $s$  は正であること、および  $x \cdot Rv < 0$  であることを示して

いる。ここから、

$$v \cdot Rx = R^{-1}v \cdot x = -Rv \cdot x > 0,$$

がわかる。一方で  $Rv_1 \cdot Rx = v_1 \cdot x > 0$  もわかる。故に、

$$\begin{aligned} 0 &< s \\ &= \frac{1}{Rv_1 \cdot Rx} sRv_1 \cdot Rx \\ &= \frac{1}{Rv_1 \cdot Rx} (x + sRv_1) \cdot Rx \\ &= \frac{1}{Rv_1 \cdot Rx} y_1 \cdot Rx, \end{aligned}$$

より、  $y_1 \cdot Rx > 0$  を得る。従って、もし  $y_1 = tv$  であるならば、

$$t = \frac{y_1 \cdot Rx}{v \cdot Rx} > 0,$$

であり、故に  $y_1 \in \mathbb{R}_{++}^n$  がわかる。  $y_2$  についても同様。これで d) の証明がすべて完成した。■

#### 4.5 e) の証明

まず最初に  $v_1 \cdot Rv_2 > 0$  を示そう。実際、  $v_1, v_2$  の定義から  $v_1 \cdot a_1, v_1 \cdot a_2, v_2 \cdot a_1 > 0$  であり、また  $v_2 \cdot a_2 < 0$  であるから、

$$\begin{aligned} v_1 \cdot Rv_2 &= v_1 \cdot [(v_2 \cdot a_1)a_2 - (v_2 \cdot a_2)a_1] \\ &= (v_1 \cdot a_2)(v_2 \cdot a_1) \\ &\quad - (v_1 \cdot a_1)(v_2 \cdot a_2) > 0, \end{aligned}$$

となって主張は正しい。ここから  $v_2 \cdot Rv_1 = R^{-1}v_2 \cdot v_1 = -Rv_2 \cdot v_1 < 0$  を得る。

次に  $x + RP\mathbb{R}_+^n = \{w \in \text{span}\{x, v\} | w \cdot v_1 \geq x \cdot v_1 \text{ and } w \cdot v_2 \leq x \cdot v_2\}$  を示そう。まず  $w \in \text{span}\{x, v\}$  であると仮定してみよう。  $\{Rv_1, Rv_2\}$  は  $\text{span}\{x, v\}$  の基底な

ので,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  をうまく選べば  $w - x = c_1 Rv_1 + c_2 Rv_2$  とできる。従って

$$(w - x) \cdot v_1 = c_2(v_1 \cdot Rv_2),$$

$$(w - x) \cdot v_2 = c_1(v_2 \cdot Rv_1),$$

を得る。 $v_1 \cdot Rv_2 > 0, v_2 \cdot Rv_1 < 0$  であるから,  $c_2 \geq 0$  と  $w \cdot v_1 \geq x \cdot v_1$  は同値であり, また  $c_1 \geq 0$  と  $w \cdot v_2 \leq x \cdot v_2$  は同値である。ここから主張していた結果を得る。以上の結果から  $\Delta = \{w \in \text{span}\{x, v\} | w \cdot Rv \leq 0\} \cap x + RP\mathbb{R}_+^n$  は直ちにわかる。

さて,  $w \in \text{co}\{x, y_1, y_2\}$  とする。 $x, y_1, y_2 \in x + RP\mathbb{R}_+^n$  であり, また  $x + RP\mathbb{R}_+^n$  は凸であるから,  $w \in x + RP\mathbb{R}_+^n$  である。また我々は既に  $x \cdot Rv < 0$  を示している。 $y_1 \cdot Rv = y_2 \cdot Rv = 0$  であるから,  $w \cdot Rv \leq 0$  でなければならない。故に  $w \in \Delta$ 。

最後に,  $w \in \Delta$  とする。 $w \in x + RP\mathbb{R}_+^n$  であるから,  $c_1, c_2 \geq 0$  をうまく選べば  $w = x + c_1 Rv_1 + c_2 Rv_2$  となる。もし  $c_1 = c_2 = 0$  であれば  $w = x \in \text{co}\{x, y_1, y_2\}$  となるので, 以下では  $c_1 > 0$  か  $c_2 > 0$  のいずれか少なくとも片方が成り立っていると仮定しよう。 $Rv_1 \cdot Rx > 0$  かつ  $Rv_2 \cdot Rx > 0$  なので,  $w \cdot Rx > 0$  がわかる。 $x \cdot Rv < 0$  であり, また  $w \in \Delta$  から  $w \cdot Rv \leq 0$  でもある。さらに  $(w - x) \in RP\mathbb{R}_+^n$  なので,  $(w - x) \cdot Rv > 0$  である。これらの結果より, ある  $c_3 \in \mathbb{R}$  と  $c_4 \geq 1$  に対して  $c_3 v = x + c_4(w - x)$  となっていることがわかる。この式を変形すると,

$$w = \frac{1}{c_4} c_3 v + (1 - \frac{1}{c_4}) x,$$

となる。よって  $w \in \text{co}\{x, y_1, y_2\}$  を示すに

は,  $c_3 v \in [y_1, y_2]$  を示せばよいことになる。

$y_1 = c_5 v, y_2 = c_6 v$  としよう。すると後は  $c_3 \in [c_5, c_6]$  が示せばよいことになる。

$y_1$  の定義から,  $y_1 \cdot v_1 = x \cdot v_1$  である。一方, 我々は既に  $v_1 \cdot Rv_2 > 0$  であることを知っている。従って  $w \cdot v_1 \geq y_1 \cdot v_1$  である。故に  $c_3 \geq c_5$  を示すためには,  $v \cdot v_1 > 0$  であればよいことになる。しかしこれは明白であろう。 $c_3 \leq c_6$  も同様に示せる。以上で証明が完成した。■

#### 4.6 f) の証明

これは単純な計算によって示せる。実際,

$$\begin{aligned} CRPy &= CR[(y \cdot a_1)a_1 + (y \cdot a_2)a_2] \\ &= C[(y \cdot a_1)a_2 - (y \cdot a_2)a_1] \\ &= (y \cdot x)[v - (v \cdot a_1)a_1] \\ &\quad - (y \cdot [v - (v \cdot a_1)a_1])x \\ &= (y \cdot x)v - (y \cdot x)(v \cdot a_1)a_1 \\ &\quad - (y \cdot v)x + (y \cdot a_1)(v \cdot a_1)x \\ &= (y \cdot x)v - (y \cdot v)x, \end{aligned}$$

であるから主張は正しい。■

### 5 命題 1 の証明

f) より, 任意の  $t$  について  $z(t; x, v) \in RP\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$  である。従って任意の  $t > 0$  に対して  $z(t; x, v) \in x + RP\mathbb{R}_+^n$  であることがわかる。 $v \perp Rv, Rv \neq 0$  であり, また  $\dim(\text{span}\{x, v\}) = 2$  であるから, 任意の  $w \in \text{span}\{x, v\}$  に対して  $w \perp Rv$  と  $w \in \{cv | c \in \mathbb{R}\}$  は同値である。a), b) および f)

より,

$$\begin{aligned}\dot{z} \cdot Rv &= CRPg(z) \cdot Rv = C(Pg(z) \cdot v) \\ &= C(g(z) \cdot v) > 0,\end{aligned}$$

が常に成り立つので,  $t(x, v)$  は存在するとすれば一つしかない。よって後は  $t(x, v)$  の存在, つまり,  $z(t; x, v) \cdot Rv = 0$  となるような  $t > 0$  の存在を示せばよいことになる。我々は既に  $z(0) \cdot Rv = x \cdot Rv < 0$  を示しているので, 中間値の定理を用いることを考えれば,  $z(t; x, v) \cdot Rv > 0$  となる  $t > 0$  の存在を示せばよい。 $t > 0$  ならば  $z(t; x, v) \in x + RP\mathbb{R}_+^n$  なので, e) より  $z(t; x, v) \cdot Rv > 0$  は  $z(t; x, v) \notin \Delta$  と同値であるということに注意する。

そこでそのような  $t > 0$  が存在しなかったと仮定してみよう。すると任意の  $t > 0$  に対して  $z(t; x, v) \in \Delta$  である。 $\Delta$  はコンパクトなので, 関数  $z(\cdot; x, v)$  の定義域は  $]a, +\infty[$  の形をしていなければならない。<sup>(10)</sup>  $C^* = \min\{C(g(w) \cdot v) | w \in \Delta\} > 0$  と定義しよう。すると  $\dot{z} \cdot Rv \geq C^*$  であるから, 任意の  $t > \frac{x \cdot Rv}{C^*}$  に対して  $z(t; x, v) \cdot Rv > 0$  であることになるがこれは矛盾である。以上で示せた。■

(経済学研究科博士課程,  
財団法人 三菱経済研究所研究員)

## 参 考 文 献

- Afriat, S. D. (1967), "The Construction of Utility Functions from Expenditure Data," *International Economic Review*, 8, pp.67-77.
- Debreu, G. (1972), "Smooth Preferences," *Econometrica*, 40, pp.603-615.
- Gale, D. (1960), "A Note on Revealed Preference," *Economica*, 27, pp.348-354.
- Hosoya, Y. (2008), "On Measuring Utility from Demand," mimeo.
- Mas-Colell, A., Whinston, M. D. and J. R. Green. (1995), *Microeconomic Theory*, Oxford University Press.
- Rose, H. (1958), "Consistency of Preference: The Two-Commodity Case," *Review of Economic Studies*, 25, pp.124-125.
- Samuelson, P. (1950), "The Problem of Integrability in Utility Theory," *Economica*, 17, pp.355-385.
- L. S. ポントリャーギン (1963), 『常微分方程式』, 共立出版。
- 丸山徹 (1995), 『数理経済学の方法』, 創文社。

(10) ポントリャーギン (1963) の第四章, 延長不能な解に関する議論を見よ。