

Title	微分方程式に埋め込まれた不安定周期軌道の性質と数値的検出
Sub Title	Unstable periodic orbits embedded in ordinary differential equation systems : properties and numerical detection
Author	斉木, 吉隆(Saiki, Yoshitaka)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2008
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.101, No.3 (2008. 10) ,p.491(95)- 507(111)
JaLC DOI	10.14991/001.20081001-0095
Abstract	<p>マクロ経済モデルでしばしば現われるカオス力学系には、一般に無数の不安定周期軌道が埋め込まれていることが知られている。最近の数学・物理学の研究において、カオス力学系が生み出す複雑なふるまいに内在する特徴的な性質(秩序)は、不安定周期解によって捉えられるという結果が報告されている。本論文では、数学的によく調べられているローレンツ系を例に挙げて、不安定周期軌道の数値的検出手法ならびにカオス解析への適用可能性と限界を考察する。</p> <p>In macroeconomic models wherein chaotic dynamical systems often appear, it is generally known that a myriad of unstable periodic orbits are embedded.</p> <p>In recent mathematics and physics scholarships, results have been reported where distinctive features (order) inherent in the complex behavior arising from chaotic dynamical systems are grasped by unstable periodic solutions.</p> <p>In this study, I consider as a case the mathematically well examined Lorenz system to observe the numerical detection methods of unstable periodic orbits and the applicability and limitations of chaos analysis.</p>
Notes	小特集：経済の数理：非線形動学と経済の変動を中心に
Genre	Journal Article
URL	<a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20081001-0095">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20081001-0095</a>

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

微分方程式に埋め込まれた不安定周期軌道の性質と数値的検出

Unstable Periodic Orbits Embedded in Ordinary Differential Equation Systems :  
Properties and Numerical Detection

斉木 吉隆(Yoshitaka Saiki)

マクロ経済モデルでしばしば現われるカオス力学系には、一般に無数の不安定周期軌道が埋め込まれていることが知られている。最近の数学・物理学の研究において、カオス力学系が生み出す複雑なふるまいに内在する特徴的な性質(秩序)は、不安定周期解によって捉えられるという結果が報告されている。本論文では、数学的によく調べられているローレンツ系を例に挙げて、不安定周期軌道の数値的検出手法ならびにカオス解析への適用可能性と限界を考察する。

Abstract

In macroeconomic models wherein chaotic dynamical systems often appear, it is generally known that a myriad of unstable periodic orbits are embedded. In recent mathematics and physics scholarships, results have been reported where distinctive features (order) inherent in the complex behavior arising from chaotic dynamical systems are grasped by unstable periodic solutions. In this study, I consider as a case the mathematically well examined Lorenz system to observe the numerical detection methods of unstable periodic orbits and the applicability and limitations of chaos analysis.

# 微分方程式に埋め込まれた不安定周期軌道の 性質と数値的検出

齊 木 吉 隆†

## 要 旨

マクロ経済モデルでしばしば現われるカオス力学系には、一般に無数の不安定周期軌道が埋め込まれていることが知られている。最近の数学・物理学の研究において、カオス力学系が生み出す複雑なふるまいに内在する特徴的な性質（秩序）は、不安定周期解によって捉えられるという結果が報告されている。本論文では、数学的によく調べられているローレンツ系を例に挙げて、不安定周期軌道の数値的検出手法ならびにカオス解析への適用可能性と限界を考察する。

## キーワード

微分方程式, カオス, ローレンツ系, 不安定周期軌道, 数値計算

## 1. はじめに

カオスとは、科学的には、決定論的系に支配された初期値感性をもつ複雑現象を指す抽象的概念であり、ただ単に無秩序なものを指しているわけではない。カオスには、一般に何らかの秩序が埋め込まれており、実際、カオス現象の典型と認められる気象現象は、複雑な振舞いを示すが、いくつかの典型的な気象の変動傾向があることは、われわれも認識している。数学分野では、カオスアトラクタ、カオス力学系、カオスの不変集合といった用語が定義されている。ただ、それらの定義において幾通りかの流儀が混在している。これは、いずれの定義も何らかの意味で不満が残っていることの裏返しである。しかし、カオス現象において、不安定性と回帰性という 2 つの性質は不可欠であり、ほぼすべてのカオスに纏わる用語の定義に、これらの性質は何らかの形で組み込まれている。不安定性は複雑さに対応し、回帰性は秩序に対応していると考えられる。カオス力学系の研究は、数学・物理学・経済学・工学等幅広い分野で行なわれており、研究の動機もさまざまである。例えば、数学ではアトラクタ、物理学・経済学では動的振舞い、工学ではカオス制御といっ

---

† E-mail address: saiki@kurims.kyoto-u.ac.jp

たものが精力的に研究されているテーマの代表例であろう (Ott (1993))。本論文では、厳密な数学議論は行わないため、言葉の定義を曖昧にしたまま議論を進めることが多い。ただ、頻繁に用いる用語に関しては、イメージを伝える目的で、適当な流儀の定義を紹介する (Robinson (1999), 國府 (2000), Grandmont (2008))<sup>(1)</sup>。

力学系には、連続 (時間) 力学系と離散 (時間) 力学系がある。 $M$  を微分可能多様体として、 $M$  上の連続力学系とは、 $M$  からそれ自身への 1 パラメタ群  $\{\phi^t\}_{t \in \mathbf{R}}$ , すなわち任意の  $t \in \mathbf{R}$  に対して、微分同相写像  $\{\phi^t\}: M \rightarrow M$  が与えられており、それが、

$$\phi^t \circ \phi^s = \phi^{t+s}, \quad \phi^0 = \text{id}_M \quad (1)$$

をみたすことである。言い替えれば、連続力学系は、加法群  $\mathbf{R}$  の多様体  $M$  への可微分な群作用を考えていることになる。そして、加法群  $\mathbf{Z}$  の多様体  $M$  への可微分な群作用を  $M$  上の離散力学系という。これらの定義の条件から、可逆性や微分可能性条件を除いた非可逆な力学系・位相力学系といったものも重要な研究対象となる。

次にアトラクタを説明する。これも幾通りかの定義が存在するが、ラフに言えば、力学系の時間無限大における‘極限集合’を意味する。最も一般的と思われる定義は次のものである。離散力学系  $f: M \rightarrow M$  の閉不変集合  $\Lambda$  がアトラクタであるとは、 $\Lambda$  の近傍  $U$  で

$$f(U) \subset U \quad \text{かつ} \quad \Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^n(U) \quad (2)$$

となるものが存在することをいう。但し、 $f(\Lambda) = \Lambda$  であるとき、 $\Lambda$  は、 $f$  の不変集合であるという。

次に、一番議論の余地があると思われるカオス力学系 (離散力学系) の定義を紹介する。ここで紹介するものは、Devaney によるものである。力学系  $f: M \rightarrow M$  が不変集合  $\Lambda$  上で Devaney の意味でカオス的であるとは、

1.  $\Lambda$  上で  $f$  は位相推移的である
2.  $f$  の周期点全体の集合は  $\Lambda$  内で稠密である
3. Guckenheimer の意味で初期値に対する敏感な依存性をもつ

が成り立つことをいう。但し、1. は、任意の開集合  $U, V (\subset \Lambda)$  に対して、 $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$  なる自然数  $n$  が取れることを意味し、3. は、任意の  $x_0 \in M$  とそれに幾らでも近い点  $y_0$  は、時間が立て

---

(1) カオス力学系に関連する用語の数学上の定義は、しばしば決定的なものを欠いており、いくつかの流儀が存在するが、それぞれの用語に対して、研究者の間ではほぼ共通のイメージが存在しているという裏事情がある。そこで厳密数学以外の分野におけるカオス力学系研究では、用語の定義は曖昧なまま議論を進めることも多い。

ば一定以上離れるという条件,

$$\begin{aligned} \exists C > 0, \forall x_0 \in M, \forall U : x_0 \text{の近傍}, \\ \exists y_0 \in U, \exists N > 0, d(f^N(x_0), f^N(y_0)) > C \end{aligned}$$

を意味する。

連続力学系の軌道を解析するために、しばしばポアンカレ写像というものを經由して考える。 $\mathbf{R}^n$ 上の連続力学系とその軌道が与えられたとき、その軌道が横切る  $(n-1)$  次元の曲面  $\Sigma$  をとり、これをその軌道の横断面と呼ぶ。 $\Sigma$  の点  $x$  を出る軌道が点  $y$  で再び  $\Sigma$  に戻るとすると、点  $x$  から点  $y$  への対応は、 $\Sigma$  上の離散力学系を与え、このような写像をポアンカレ写像と呼び、 $\Sigma$  をポアンカレ断面と呼ぶ。

## 2. ローレンツ系

### 2.1 ローレンツ系の基本的性質

ローレンツ系（もしくは、方程式、モデル）と呼ばれている力学系は、気象予報の限界を示唆する論文（Lorenz (1963)）において提案された3次元の常微分方程式で記述される連続力学系であり、最も有名なカオス力学系のひとつである。2次元以下の自励系連続力学系においては、アトラクタとして、固定点か周期軌道しか存在しないことが知られている（cf. ポアンカレ・ベンディクソンの定理）。そのため、3次元のローレンツ系は、カオスアトラクタを生み出しうる最低次元の自励系の連続力学系であるため、研究も盛んに行なわれてきた（Sparrow (1982)）。なお、離散力学系や非自励系の連続力学系の場合、1次元でもカオスアトラクタが出現しうる（Li and Yorke (1975)）。

ローレンツ系は、 $\mathbf{R}^3$  上に定義された常微分方程式系であり、実変数  $x, y, z$  に対して、

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \quad (4)$$

$$\frac{dz}{dt} = -bz + xy, \quad (5)$$

と定まっている。但し、 $\sigma, r, b$  は正定数である。古典パラメタは、 $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$  であり、本論文においてもこのパラメタ値を採用する。

ローレンツ系には、平衡点（もしくは、固定点、特異点とも呼ばれる）、

$$\begin{aligned} O &= (0, 0, 0) \\ E_{\pm} &= (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1) \quad (r > 1) \end{aligned}$$

が存在する。これらの平衡点はローレンツ系の不変集合であるものの、古典パラメタにおいては不安定であるため、初期値を平衡点上に定めない限りたどり着くことはなく、アトラクタではない。また、ローレンツ系には、

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z) \quad (6)$$

という対称性が内在し、アトラクタの形状等に関する。ローレンツ系の生み出す解が有界におさまることは以下で確認できる。 $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2\sigma} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} - (r+1)z - \mu \quad (7)$$

(但し、 $\mu$  は正定数) と定義し、 $f=0$  で定まる曲面 (楕円体面) を考える。この曲面の法線方向のベクトルと流れのベクトルのスカラー積は、

$$Df = \dot{x}f_x + \dot{y}f_y + \dot{z}f_z \quad (8)$$

$$= -x^2 - y^2 - bz^2 + (r+1)bz \quad (9)$$

となり、楕円体のサイズを定める  $\mu$  が十分大きいときには  $Df < 0$  となり、無限遠方に遠ざかる軌道はないことがわかる。ローレンツ系は散逸的であることも知られている。

$$\frac{d\dot{x}}{dx} + \frac{d\dot{y}}{dy} + \frac{d\dot{z}}{dz} = -(\sigma + 1 + b), \quad (10)$$

であるので、 $t=0$  で相体積が  $\Omega(0)$  として、時刻  $t$  における相体積は、

$$\Omega(t) = \Omega(0) \cdot \exp(-(\sigma + 1 + b)t) \quad (11)$$

となり、 $t \rightarrow \infty$  でゼロに収束する。すなわちアトラクタの体積はゼロである。

## 2.2 カオス軌道とカオスアトラクタ

図1は、ローレンツ系を後述するルンゲ・クッタ法で数値計算して得られた軌道の断片を  $x$  座標へ射影したものである。近接する3つの初期値から発展させた軌道を比較しており、基準となるカオス軌道 (軌道1) と、その初期値を  $x$  変数のみ  $d_x = 10^{-4}$  摂動させた軌道 (軌道2)、 $d_x = 10^{-3}$  摂動させた軌道 (軌道3) を示している。 $t=10$  周辺で軌道3が軌道1から大きく離れていき、 $t=15$  周辺で軌道2も軌道1から大きく離れていく様子が観察される。これらの軌道の振舞いは、ローレンツ系が、カオス力学系の特徴である初期値鋭敏性を有していることと対応している。力学系が初期値鋭敏性を持つことをより強く主張するために、リアプノフ指数と呼ばれる安定性指数を数値的に計算し、その指数が正であることによって裏付けることも多い。図2は、長時間の数値計算によって得られたアトラクタの概形である。アトラクタは、固定点でも周期軌道でもなく、奇妙な形態

図 1 数値計算で得られたカオス軌道（基準となるカオス軌道と初期値 ( $x$  変数) に摂動 ( $d_x = 10^{-4}, 10^{-3}$ ) を与えた場合のカオス軌道)

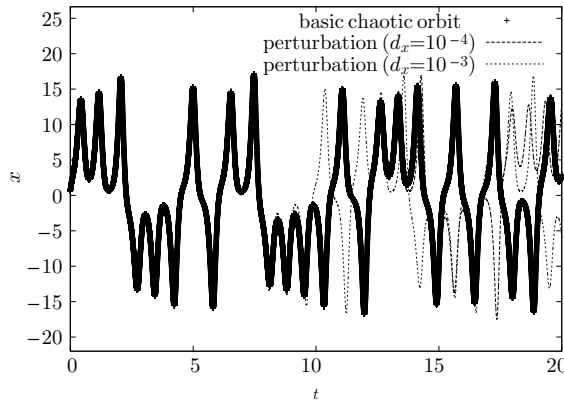
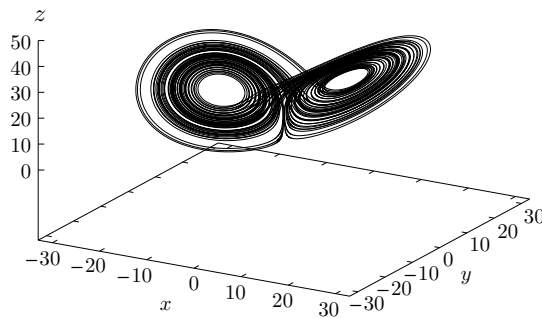


図 2 数値計算で得られたカオスアトラクタの概形



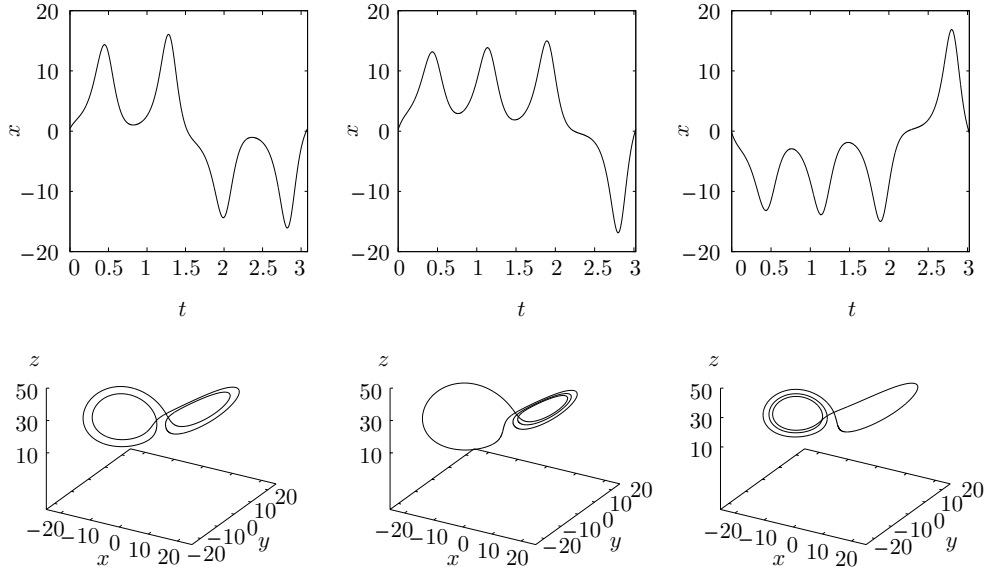
をしているため、ストレンジアトラクタと呼ばれている。このアトラクタの形状は、ローレンツ系がもつ対称性を反映している。連続力学系であるローレンツ系の数学解析は困難なため、ローレンツ系の主要性質を保つと考えられるローレンツ幾何モデルの解析が行なわれてきた (Guckenheimer and Holmes (1983), Hirsch *et al.* (2003))。そして、最近、精度保証つき数値計算を援用することによって、ローレンツ系と幾何モデルの関係が判明し (Tucker (1999, 2002)), ローレンツ系がカオスアトラクタをもち、無限個の局所不安定な周期軌道が、そのアトラクタに稠密に埋め込まれていることも厳密数学の意味で明らかになった。また、近年、ローレンツ幾何モデルは、非双曲力学系の中で特異双曲力学系と呼ばれるクラスの雛型としても重要視されている (Bonatti *et al.* (2004))。

### 3. 不安定周期軌道

#### 3.1 不安定周期軌道とは

局所不安定, すなわち微小摂動に対して不安定な力学系の周期解を不安定周期解と呼び, それがな

図3 数値的に検出された不安定周期解 ( $T = 3.084276$  (左),  $3.023583$  (中),  $3.023583$  (右))  
の  $x$  変数の時間発展と軌道



す軌道を不安定周期軌道という。離散力学系の周期軌道の局所安定性は固有値により，連続力学系の周期軌道の局所安定性はフロケ指数により特徴づけられる。不安定周期軌道 (Unstable Periodic Orbit) は，しばしば UPO と呼ばれ，本論文でも用いる。

カオストラクタには，一般に無限個の不安定周期軌道が (良い性質をもつ系に関しては稠密に) 埋め込まれている。そのため，位相幾何学的研究において，周期軌道は最重要視されてきたといっても過言ではない (Smale (1967))。一方，解析学もしくは応用数理研究においては，周期軌道の形状や性質を明示的に知る必要が出てくるのが一般的である。しかし，計算機を用いた数値的検出すら一般に困難なため，これまで研究されることは少なかった。以下では，不安定周期軌道に関する知見をローレンツ系を例にして深めていく。

図3は，整数値周期  $N (\approx T/0.753)$  が4の3種類の不安定周期軌道の概形である。 $N$ は，平衡点  $E_{\pm}$  の周りを‘まわる’回数を意味し，ローレンツ系の適当なポアンカレ写像 (例えば  $z = 27, dz/dt \geq 0$ ) の周期に対応させることができる。図3 (中) (右) の周期軌道は，ローレンツ系がもつ対称性によって移り変わる。不安定周期軌道は，適当な初期値から時間発展させた際には，実現しない軌道であるにも関わらず，図1, 2と見比べることによって，カオス軌道の何らかの特徴的な性質を反映していることが想像できよう。なお，平衡点  $E_+, E_-$  の周りを‘まわる’順列によって，周期軌道は一意に定まる，すなわち同じ符号列をもつ周期軌道は，同一である。



### 3.2 カオス力学系の不安定周期軌道解析

数値的に検出された周期軌道を、整数値周期  $N$  に応じて分類して個数を数え上げると、図 4 に示すように  $N$  に関して指数的な増大を示すことがわかる。この指数は、位相エントロピー (Bowen (1970)) と呼ばれる、力学系がもつ複雑さを示す指標と関係している。公理 A 力学系やいくつかの良い性質をもつ力学系に対して、力学系  $f$  の位相エントロピー  $h_f$  と周期軌道の個数の間には、

$$h_f = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{周期 } N \text{ の周期軌道の個数})}{N} \quad (12)$$

が成り立つことが知られている (cf. Bowen (1970))。今の場合、位相エントロピーは  $\log(1.8)$  と見積もられる。正の位相エントロピーは、カオスを特徴づけるひとつの指標となっており、カオスの定義に組み込まれている場合もある。なお、周期点の個数が周期に対して指数関数より早く増加する系があることが最近報告されている (Kaloshin and Hunt (2007))。

次に、連続系の軌道を断面上の点に焼き直して考察する。図 5 は、数値的に計算されたカオス軌道、ならびに数値的に検出された約 1000 個の不安定周期軌道に関し、ポアンカレ断面 ( $x = y$ ) における  $(x, z)$  値をプロットしたものである。少なくともこの断面で見える限り、カオスアトラクタ全体に周期軌道が散在している様子が確認できる。

さて、以下では、Nusselt 数 ( $Nu := 1 + 2xy/br$ ) と呼ばれる量に関する軌道上の時間平均  $\langle Nu \rangle (= \int_{t=0}^T Nu dt)$  を考察する。ローレンツ系を含めて我々が考察する力学系の多くはエルゴード性を持っており、アトラクタ上の点から出発したほとんどすべての点から出発したほとんどすべての軌道上平均量はある値に収束する。しかしながら、周期軌道に限った場合に軌道上平均量がどうなるかは一般に知られていない。図 6 は、数値的に検出された周期軌道 (周期  $T$ ) 上の平均 Nusselt 数を示している。カオス軌道上の平均 Nusselt 数  $\langle Nu \rangle$  は、2.682 であるが、その近辺に散在している。図 7 は、同じ整数値周期  $N (= 10, 12, 14)$  をもつ UPO をあつめて  $\langle Nu \rangle$  の頻度分布を描いたものである。いずれの分布も大きな差がないことに注意されたい。図 8 では UPO 上の平均値を同程度の長さをもつカオス軌道断片と比較している。ローレンツ系の Nusselt 数の有限長カオス軌道上の平均値  $\langle Nu \rangle$  は、軌道長を長く取るにしたがって、一定値に近づき標準偏差は小さくなっていくが、それに比較すると周期軌道の場合は、短い軌道であってもかなり標準偏差は小さいことがわかる。これは、周期軌道は、力学系が生み出すカオスの振舞いの中の何らかの秩序構造を短くとも 1 本で表現していることを示唆していると考えられる。また、少なくとも倍精度数値計算の届く範囲では、軌道長の長い周期軌道であってもカオス軌道上の統計量の近似という観点で特に優れているわけではないことがわかる。この結果は、流体乱流の不安定周期軌道解析の研究 (Kawahara and Kida (2001), Kato and Yamada (2003)) において得られた、検出された短い 1 本の周期軌道ですら、カオスの統計性質を良く近似できるという結果をサポートしている。

図4 数値的に検出された不安定周期軌道の整数値周期 ( $N$ ) 別の個数 (補助線は  $1.8^N$  の定数倍)

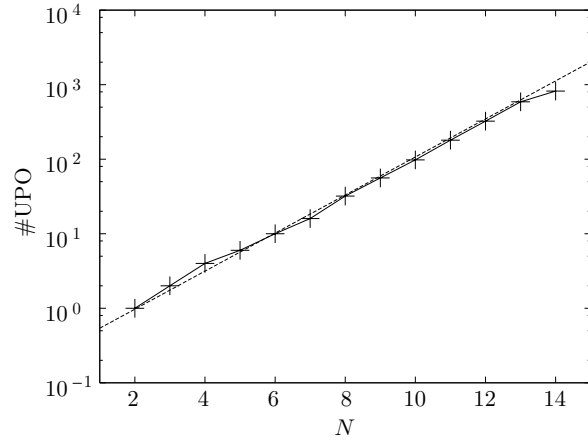


図5 ポアンカレ断面 ( $x=y$ ) の ( $x, z$ ) 値 (カオス (左), 不安定周期軌道 (UPO) (中), 両者の比較 (右))

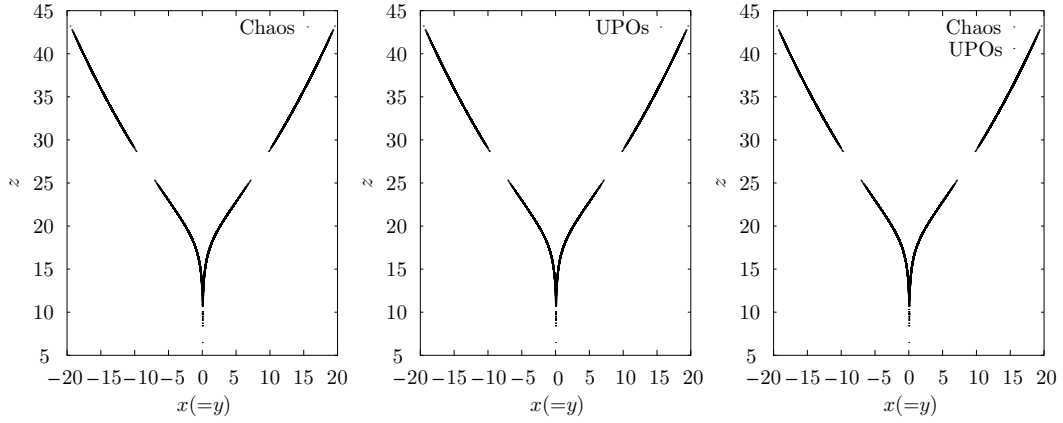


図6 検出された各不安定周期軌道 (周期  $T$ ) の平均 Nusselt 数

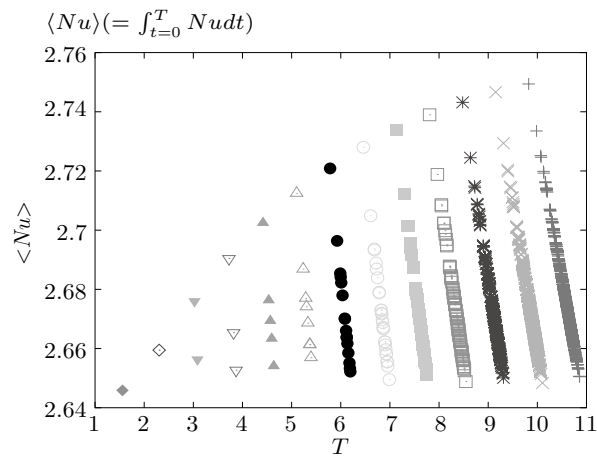


図7 整数値周期  $N(N = 10, 12, 14)$  の各不安定周期軌道がもつ平均 Nusselt 数  $\langle Nu \rangle$  の出現分布

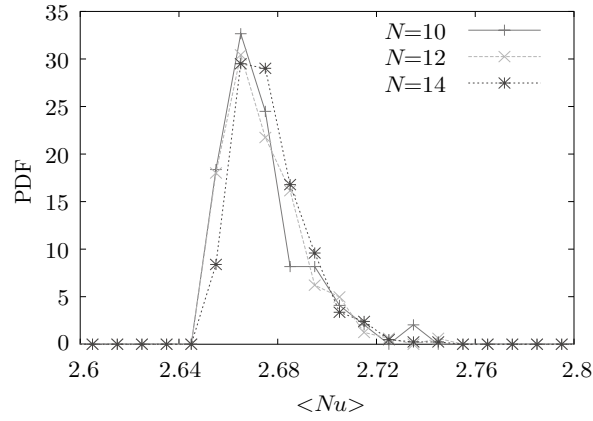


図8 整数値周期  $N(= 2, \dots, 13)$  の不安定周期軌道の平均 Nusselt 数  $\langle Nu \rangle$  の標準偏差と対応する時間長  $T(= 0.753 \cdot N)$  をもつ多数の有限長カオス軌道の  $\langle Nu \rangle$  の標準偏差

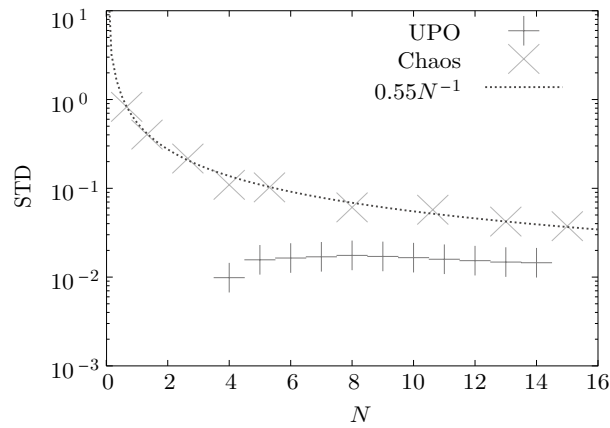
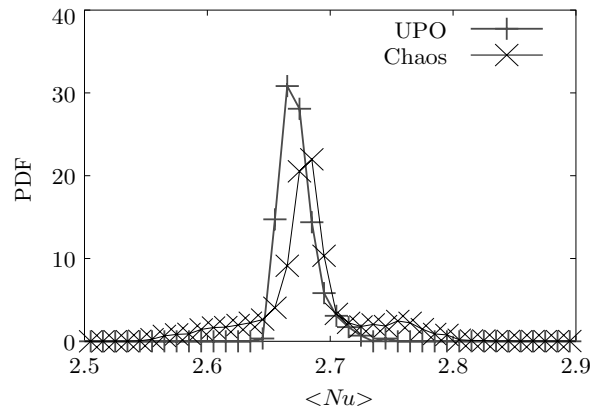


図9 ポアンカレ写像周期  $N = 13$  をもつ不安定周期軌道上の平均 Nusselt 数  $\langle Nu \rangle$  の分布関数と対応する時間長  $T(= 0.753 \cdot 13)$  をもつカオス軌道断片上の  $\langle Nu \rangle$  の分布関数



ローレンツ系の場合は、すべての不安定周期軌道がアトラクタに埋め込まれているが、一般に、不安定周期軌道に基づきカオス解析を行なう際には、カオスアトラクタに埋め込まれた周期軌道か否かということが問題となることに注意されたい (Ishiyama and Saiki (2005a, 2005b))。

ところで、ローレンツ系の不安定周期軌道解析に関する研究はいくつかの観点でなされてきた。(Eckhardt and Ott (1994), Franceschini *et al.* (1993), Wiklund and Elgin (1996), Zoldi (1998), Viswanath (2003, 2004), Gratrix and Elgin (2004))。高次元カオス力学系においても、不安定周期軌道に着目した研究は、流体乱流の分野等で始まっており、乱流における秩序構造を捉える目的で有効に働くことが知られてきた (Christiansen *et al.* (1997), Zoldi and Greenside (1998), Kazantsev (2001), Kawahara and Kida (2001), Kato and Yamada (2003), van Veen *et al.* (2006))。ただ、高次元力学系の不安定周期軌道を検出することは、極めて難しく、実際の検出もごく少数に留まっているため、詳細な理解にまでは達していない。また、連続力学系であらわされる景気循環モデルに対して、1000 個程度の不安定周期軌道を数値的に検出し、ダイナミクスの分類等を行なった研究もある (Saiki and Ishiyama (2008))。一方、不安定周期軌道を何らかの手段で安定化し、カオス制御を行なうということは、工学分野を中心に広く行なわれてきている (Ott *et al.* (1990), Pyragas (1992), Kawahara (2005))。その他、力学系における結び目・組ひも理論 (松岡 (1996))、量子力学における古典カオスの痕跡を探る量子カオスの研究 (Cvitanović *et al.* (2004)) 等にも不安定周期軌道は用いられている。

力学系がもつ性質の違い (例えば、双曲力学系と非双曲力学系) によっても、不安定周期軌道が果たす役割が、大きく異なると考えられており、その観点の研究も盛んに行なわれている (Zoldi (1998))。応用数理の側面では、現象を支配する力学系が有限時間の間に変化することもあり、時間無限大の‘極限集合’であるアトラクタとは異なる有限時間における遷移的ふるまいも重要となる。それらをトランジエントと呼び、カオスの振舞いをもつトランジエントをカオストランジエント、Chaotic no-attractor と呼ぶことがある。このトランジエント構造を不安定周期軌道によって捉える研究も行なわれはじめている (Chian *et al.* (2006))。

## 4. 不安定周期軌道の数値的検出手法

### 4.1 不安定周期軌道の検出アルゴリズム

本論文における多数の不安定周期軌道の数値的検出には、ニュートン・ラフソン・ミーズ法 (Parker and Chua (1989), Mees (1981), Saiki (2007)) を採用した。以下では、その計算手法について述べる。 $n$  次元力学系 ( $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ )

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}), t \in \mathbf{R} \quad (13)$$

の  $t = 0$  のときに  $\mathbf{x}$  を通る軌道を  $\{\phi_t(\mathbf{x}) \mid t \in \mathbf{R}\}$  として、周期軌道の検出は、

$$H(\mathbf{x}, t) = \phi_t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}. \quad (14)$$

のゼロ点  $(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{X}, T)$ , すなわち、周期軌道上の一点  $\mathbf{X}$  と周期  $T$  の  $n + 1$  個の未知数を定めることに対応する。具体的な計算アルゴリズムは以下の様になる。

$\mathbf{y} = H(\mathbf{x}, t)$  を線形化すると、

$$\Delta \mathbf{y} = D_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, t) \Delta \mathbf{x} + D_t H(\mathbf{x}, t) \Delta t \quad (15)$$

$$= \{\Phi_t(\mathbf{x}) - I\} \Delta \mathbf{x} + f(\phi_t(\mathbf{x})) \Delta t. \quad (16)$$

となる。但し、 $\Phi_t(\mathbf{x})$  は、 $\phi_t(\mathbf{x})$  を  $\mathbf{x}$  に関して変分をとった  $n \times n$  行列、 $I$  は  $n \times n$  の単位行列である。ここで、線形補間により  $H(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, t + \Delta t) \approx 0$  となるように、 $\Delta \mathbf{x}$  と  $\Delta t$  に対して  $H(\mathbf{x}, t) + \Delta \mathbf{y} = 0$  なる条件を課すと、

$$\{\Phi_t(\mathbf{x}) - I\} \Delta \mathbf{x} + f(\phi_t(\mathbf{x})) \Delta t = -H(\mathbf{x}, t). \quad (17)$$

となる。ただ、これは  $n$  本の条件であり、 $n + 1$  個の未知数  $\Delta \mathbf{x}$  と  $\Delta t$  は、一意に定まらない。そこで追加の制約条件として修正ベクトル  $\Delta \mathbf{x}$  が軌道に直交するという条件

$$\langle f(\mathbf{x}), \Delta \mathbf{x} \rangle = 0. \quad (18)$$

を課す (Mees (1981)) ことで、 $n + 1$  個の未知数に対して  $n + 1$  本の条件式とする。この作業を反復することによって周期軌道の検出を行なう。すなわち、添字  $i$  を反復回数として、適当な初期予測  $(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{X}^{(i)}, T^{(i)})$  の下、

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \Phi_{T^{(i)}}(\mathbf{X}^{(i)}) - I & f(\phi_{T^{(i)}}(\mathbf{X}^{(i)})) \\ f(\mathbf{X}^{(i)})^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{X}^{(i)} \\ \Delta T^{(i)} \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(i)} - \phi_{T^{(i)}}(\mathbf{X}^{(i)}) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

を解いて、

$$(\mathbf{X}^{(i+1)}, T^{(i+1)}) = (\mathbf{X}^{(i)} + \Delta \mathbf{X}^{(i)}/m, T^{(i)} + \Delta T^{(i)}/m)$$

とする作業を繰り返し行なう。

なお、 $m$  は、減速係数であり、検出しようとしている周期軌道の不安定性および周期に応じた値  $m$  を採用することが多くの周期軌道を効率良く求める上で極めて重要となる (Saiki and Ishiyama (2008))。

そして、周期軌道の収束判定条件としては、

$$|H(\mathbf{X}^{(i)}, T^{(i)})| = |\phi_{T^{(i)}}(\mathbf{X}^{(i)}) - \mathbf{X}^{(i)}| \quad (\text{実質誤差}) \quad (19)$$

$$|(\Delta \mathbf{X}^{(i)}, \Delta T^{(i)})| \quad (\text{相対誤差}) \quad (20)$$

が共に十分小さくなるというものを採用する。本研究においては、実質誤差が  $10^{-8}$  以下でかつ相対誤差が  $10^{-6}$  以下というものを収束条件としている。このアルゴリズムによって数値的に収束させて求めた「周期軌道」は、その十分近傍の点も「周期軌道」の近接軌道を通るという意味で数値的に妥当な軌道であると考えられる。また、初期予測が極めて周期軌道に近い場合を除いて一般にアトラクタに埋め込まれた周期軌道のみを検出するという特徴を持っている。

なお、本手法で検出しようとする不安定周期軌道は、周期軌道の周期  $T$ 、フロケ指数（不安定性指数） $\lambda$ 、計算機の丸め誤差  $\delta$  として、

$$\delta \exp(\lambda T) \ll 1 \quad (21)$$

をみたすものに限ることに注意されたい。

#### 4.2 ルンゲ・クッタ法

微分方程式を計算機を用いて数値積分するためには、時間を離散化する必要がある。4 次のルンゲ・クッタ法（もしくはアルゴリズム、積分）（Parker and Chua (1989)）と呼ばれる、以下に示す手法が、広く用いられている。

$N$  次元常微分方程式系

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N \quad (22)$$

を  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  なる初期条件の下で解くことを考える。

時間  $t = t_n$  における  $\mathbf{x}$  の値が既知なとき、

$$\mathbf{k}_1 = hf(\mathbf{x}_n, t_n), \quad (23)$$

$$\mathbf{k}_2 = hf\left(\mathbf{x}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1, t_n + \frac{h}{2}\right), \quad (24)$$

$$\mathbf{k}_3 = hf\left(\mathbf{x}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2, t_n + \frac{h}{2}\right), \quad (25)$$

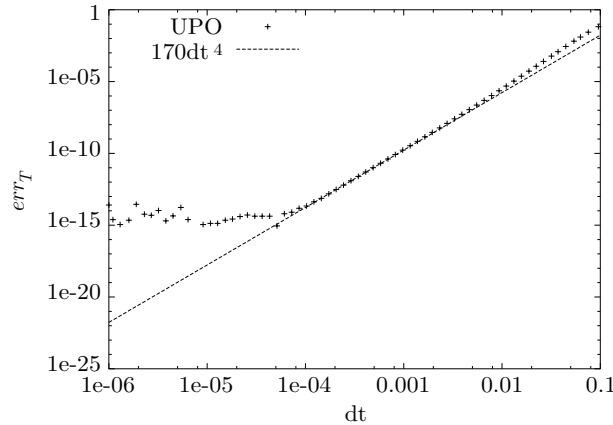
$$\mathbf{k}_4 = hf(\mathbf{x}_n + \mathbf{k}_3, t_n + h), \quad (26)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) + O(h^5), \quad (27)$$

というアルゴリズムで  $\mathbf{x}_n$  から  $\mathbf{x}_{n+1}$  を定める手続きを、4 次のルンゲ・クッタ法と呼ぶ。ここで  $h$  は、離散化における時間メッシュを意味している。この離散化に伴う誤差は  $O(h^4)$  である。この手続きを初期値  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  を基に順々に繰り返す。

計算機に乗せる際には、 $h$  が小さ過ぎる場合には、一定時間の積分に多くの計算ステップを要し

図 10 ルンゲ・クッタ法において時間メッシュ ( $dt$ ) を用いた際に検出された周期軌道の周期の '真' の周期からの誤差  $err_T = |T(dt) - T_0|$  (但し,  $T_0$  は, '真' の周期軌道の周期) と  $170 dt^4$



て計算時間を食うことになる。また, 1 ステップ毎に打ち切り誤差の影響が積もるため,  $h(> 0)$  を小さくすればするほど精度が上がるわけではない。そこで, 適切な数値積分を行なうためには,  $f$  の形に応じた適切な時間メッシュ  $h$  を選ぶことが必要となる (伊理・藤野 (1985))。

#### 4.3 数値計算の妥当性

計算精度には, 単精度 (32 ビット), 倍精度 (64 ビット), 4 倍精度 (128 ビット) 等がある。本論文の数値計算は, 基本的に倍精度で行なっている。以下では, ローレンツ系に埋め込まれた最も短い周期軌道に関する計算誤差の考察を行なう。図 10 では, 数値積分で用いたルンゲ・クッタ法において時間メッシュ  $dt$  を用いた際に数値的に検出された不安定周期軌道の周期 ( $T(dt)$ ) の '真' の周期軌道の周期 ( $T_0$ ) からの誤差  $err_T = |T(dt) - T_0|$  を示す<sup>(2)</sup>。0.0001 <  $dt$  < 0.01 の範囲では, 誤差  $err_T$  は時間メッシュ  $dt$  の 4 乗に比例することがわかる。これは 4 次のルンゲ・クッタ法を用いていることに由来する。 $dt < 0.01$  の範囲では, 4 次のルンゲ・クッタ法の理論に反して, 誤差は時間メッシュ  $dt$  の 4 乗に比例しなくなるが, これは, 計算精度に由来する。これらの作業を通して, 本論文の数値計算の妥当性を確認することが出来る。

なお, 数値計算による長時間のカオス軌道は, 力学系がもつ指数的不安定性と計算機が有限精度であることにより, 軌道としての意味はなくなることに注意されたい。ただし, その場合でも数値的カオス軌道は, 短時間カオス軌道の繋ぎ合わせと考えることが可能であり, ある種の統計量などを妥当に計算することは可能である。

(2)  $T_0$  は, 本来未知なものであり, 4 倍精度数値計算によって見積もった推定値を用いている。

#### 4.4 その他

不安定周期軌道の検出のための数値アルゴリズムの研究は多数あり、ニュートン法的な手法の他、不安定周期軌道を安定化させて同定する手法、変分法的に求める手法などが存在する。ただ、エノン写像など、いくつかの写像に対しては、非常に優れたアルゴリズムが開発されているものの、連続力学系に対しては、現在までのところ、決定的な手法が開発されているとは言い難い。

数値計算においては、プログラムのチューニングや複数 CPU による並列化による高速化なども数値アルゴリズム開発における大きな課題のひとつである。並列化を行なわなくとも、計算機内の動作の仕組みにうまく適応した計算プログラムを書くか否かによって、数倍、場合によっては数百倍の速度差が生み出される（青山（2004））。

ローレンツ系が真にカオスアトラクタをもつという結果の証明にも用いられた、精度保証つき数値計算と呼ばれる、数学的に結果を保証する数値計算も近年盛んに行なわれている。精度保証つき数値計算は、数値アルゴリズム由来の誤差（連続力学系の離散化等）と計算機由来の誤差をともに評価して、数学的に厳密な結果を与える数値計算手法である。力学系の不変集合の存在をホモロジー群を用いた計算機を援用して証明することも近年盛んになりつつある（Kaczynski *et al.* (2004)）。

## 5. まとめ

カオス力学系には一般に無限個の不安定周期軌道が埋め込まれている。本論文では、微分方程式で記述されるカオス力学系の代表例であるローレンツ系から、短い周期をもつ 1000 個程度の不安定周期軌道を数値計算によって検出し、その性質を考察した。まず、カオス軌道と周期軌道集団のポアンカレ断面上の様子を調べ、両者が集合として一致している様に見えることを確認した。次に、周期軌道の個数の周期に対する増大度の指数を測り、位相エントロピーと呼ばれるカオスの位相的な複雑さを見積もった。また、ポアンカレ写像周期  $N$  毎に分類した不安定周期軌道集団と、同程度の長さをもつカオス軌道集団の時間平均 Nusselt 数  $\langle Nu \rangle$  を計算し、少なくとも本研究でおこなった倍精度の数値計算の範囲内では、不安定周期軌道上の  $\langle Nu \rangle$  の方が散らばりが小さく、しかも  $N$  を変えても分布は、ほとんど変わらないことを明らかにした。不安定周期軌道上の  $\langle Nu \rangle$  は、カオス軌道上の  $\langle Nu \rangle$  の平均値のまわりに散らばっており、周期軌道は、カオスアトラクタに埋め込まれてさえいれば、周期によらず、カオスの統計性質をある程度の精度で近似しうることが示唆された。また、微分方程式の不安定周期軌道は正の時間方向の数値積分で同定できないため、計算機を用いた検出にも困難が伴う。本論文では、そのアルゴリズムの紹介と数値計算の妥当性の確認もおこなった。

これまでの経済学研究において、カオス力学系の不安定性に由来する予測不可能性という特徴は



しばしば注目されてきたが、カオス力学系が生み出すふるまいを具体的に考察する研究は多くなかった。カオス的なふるまいには、回帰性という特徴も組み込まれており、本論文で議論した様に、不安定性と回帰性の二つの特徴を併せ持った特殊解である不安定周期解に着目すると、複雑なふるまいに内在する秩序を捉える研究が遂行可能となる。今後、カオス力学系を扱う経済学研究において、不安定周期解は大きな役割を担うに違いない。

(京都大学数理解析研究所・日本学術振興会特別研究員)

### 参 考 文 献

- 青山幸也, 「チューニング技法入門」(理化学研究所 情報基盤センター, 2004)。  
([http://acc.riken.jp/HPC/training/text.html/scalar\\_all\\_2006-03-20.pdf](http://acc.riken.jp/HPC/training/text.html/scalar_all_2006-03-20.pdf)).
- Bonatti, C., L. Diaz and M. Viana, *Dynamics beyond uniform hyperbolicity*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, 102. (Springer-Verlag, Berlin, 2004).
- Bowen, R., Topological entropy and Axiom A, *Global Analysis* (Berkeley, CA, 1968) *Proc. Sympos. Pure Math.*, **14** American Mathematical Society, Providence, RI (1970) 23–41.
- Chian, A. C.-L., E. L. Rempel and C. Rogers, Complex economic dynamics: Chaotic saddle, crisis and intermittency, *Chaos, Solitons and Fractals* **29** (2006) 1194–1218.
- Christiansen, F., P. Cvitanović and V. Putkaradze, Spatiotemporal Chaos in Terms of Unstable Recurrent Patterns, *Nonlinearity* **10** (1997), 55–70.
- Cvitanović, P., R. Artuso, P. Dahlqvist, R. Mainieri, G. Tanner, G. Vattay, N. Whelan and A. Wirzba, *Chaos: Classical and Quantum* (2004) (<http://chaosbook.dk/>).
- Eckhardt, B. and E. Ott, Periodic orbit analysis of the Lorenz attractor, *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, **93** (2) (1994), 258–266.
- Franceschini, V., C. Giberti and Z. Zheng, Characterization of the Lorenz attractor by unstable periodic orbits, *Nonlinearity* **6**(2) (1993), 251–258.
- Grandmont, J.-M., Nonlinear difference equations, bifurcations and chaos: An introduction, *Research in Economics*, **62** (2008), 122–177.
- Gratrix, S. and J. N. Elgin, Pointwise Dimensions of the Lorenz Attractor, *Physical Review Letters*, **92** (2004), 014101.
- Guckenheimer, J. and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Applied Mathematical Sciences Vol. 42), (Springer, 1983).
- Hirsch, M. W., S. Smale and R. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos* (Pure and Applied Mathematics, 60), (Academic Press, 2003).
- 伊理正夫・藤野和建, 『数値計算の常識』(共立出版, 1985)。
- Ishiyama, K. and Y. Saiki, Unstable periodic orbits and chaotic economic growth, *Chaos, Solitons and Fractals*, **26** (2005a) 33–42.
- Ishiyama, K. and Y. Saiki, Unstable Periodic Orbits embedded in a Chaotic Economic Dynamics Model : A Typical Structure of a Generalized Goodwin Model, *Applied Economics Letters*, **12** (2005b) 749–753.
- Kaczynski, T., K. Mischaikow, and M. Mrozek, *Computational Homology*, Applied Mathematical

- Sciences 157, (Springer-Verlag, 2004).
- Kaloshin, V. Y., and B. R. Hunt, Stretched exponential estimate on the growth of the number of periodic points for prevalent diffeomorphisms, *Annales of Mathematics*, **165**(1) (2007) to appear.
- Kato, S. and M. Yamada, Unstable periodic solutions embedded in a shell model turbulence, *Physical Review E*, **68**(2) (2003) 25302–25305.
- Kawahara, G. and S. Kida, Periodic motion embedded in plane Couette turbulence: regeneration cycle and burst, *Journal of Fluid Mechanics*, **449** (2001) 291–300.
- Kawahara, G., Laminarization of minimal plane Couette flow: Going beyond the basin of attraction of turbulence, *Physics of Fluids*, **17-4** (2005), 041702:1-4.
- Kazantsev, E., Sensitivity of the attractor of the barotropic ocean model to external influences: approach by unstable periodic orbits, *Nonlinear Processes in Geophysics*, **8** (4/5) (2001), 301–311.
- 國府 寛司, 『力学系の基礎』(朝倉書店, 2000)。
- Li, T.-Y. and J. A. Yorke, Period three implies chaos, *American Mathematical Monthly*, **82** (1975), 985–992.
- Lorenz, E. N., Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the Atmospheric Sciences* **20** (1963) 130–141.
- 松岡隆, 「組ひもの理論と力学系」『物性研究』**67-1** (1996-10) 1-56.  
(<http://jegog.phys.nagoya-u.ac.jp/r/lecture-notes/kumihimo/kougi6.pdf>)
- Mees, A. I., *Dynamics of Feedback Systems*, (John Wiley & Sons, New York, 1981).
- Ott, E., *Chaos in Dynamical Systems*, (Cambridge University Press, United Kingdom, 1993).
- Ott, E., C. Grebogi and J. A. Yorke, Controlling Chaos, *Physical Review Letters*, **64** (1990) 1196–1199.
- Parker, T. S., L. O., Chua, *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems* (Springer-Verlag, 1989).
- Pyragas, A., Continuous control of chaos by selfcontrolling feedback, *Physics Letters A*, **170** (1992) 421–428.
- Robinson, C., *Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, (CRC Press, 1999).  
(邦訳:『力学系』上・下, シュプリンガー東京)
- Saiki, Y., Numerical detection of unstable periodic orbits in chaotic dynamical systems of continuous-time, *Nonlinear Process in Geophysics* **14** (2007) 615–620.
- Saiki, Y. and K. Ishiyama, Recognition of transition patterns in a business cycle model by unstable periodic orbits, *preprint* (2008).
- Smale, S., Differential dynamical systems, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **73** (1967) 747–817.
- Sparrow, C., *Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors* (Springer-Verlag, Berlin, 1982) (Applied Mathematical Science Vol.41).
- Tucker, W., The Lorenz attractor exists, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique*, **328:12** (1999), 1197–1202.
- Tucker, W., A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem, *Foundations of Computational Mathematics*, **2** (2002), 53–117.
- van Veen, L., S. Kida and Kawahara, G., Periodic motion representing isotropic turbulence, *Fluid Dynamics Research*, **38**(1) (2006) 19–46.
- Viswanath, D., Symbolic dynamics and periodic orbits of the Lorenz attractor, *Nonlinearity* **16**

- (2003), 1035–1056.
- Viswanath, D., The fractal property of the Lorenz attractor, *Physica D*, **190** (2004), 115–128.
- Wiklund, K. O. and J. N. Elgin, Multifractality of the Lorenz system, *Physical Review E*, **54** (2), (1996), 1111–1119.
- Zoldi, S., Unstable Periodic Orbit Analysis of Histograms of Chaotic Time Series, *Physical Review Letters*, **81** (1998), 3375–3378.
- Zoldi, S. M. and H. S. Greenside, Spatially localized unstable periodic orbits of a high-dimensional chaotic system, *Physical Review E*, **57** (1998) (3) 2511–2514.