

Title	非分割的な主体による二市場間の立地選択
Sub Title	Location choice in two-sided markets with indivisible agents
Author	Anderson, Robert M.(Otaki, Eisei) Ellison, Glenn Fudenberg, Drew 大滝, 英生
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2008
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.101, No.3 (2008. 10) ,p.401(5)- 434(38)
JaLC DOI	10.14991/001.20081001-0005
Abstract	「買い手」および「売り手」と呼ばれる2種類の主体による立地選択モデルを考える。第1期においてすべての主体は選択可能な二つの同質な地点の間から各自の立地点を同時に選択する。然る後、各地点の個人は同じ地点にいる他の主体とある種のゲームを行う。買い手は他の買い手がより少なく売り手がより多い立地点を選好し、売り手はそれと逆の選好を有する。我々は二つの市場について可能な均衡のサイズの集合を研究する。そしてまた、より大きな市場がより効率的であっても、サイズが大きく異なる二つの市場が共存し得ることを示す。これはEllison and Fudenberg [4] (EF) による分析の拡張である。彼らの研究は、各市場における各タイプの主体の数が整数でなければならないという制約を無視し、代わりに主体がいくらかでも分割可能として扱われる「準均衡」を分析した。
Notes	小特集：経済の数理：非線形動学と経済の変動を中心に
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20081001-0005

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

非分割的な主体による二市場間の立地選択*

ロバート・M・アンダーソン†

グレン・エリソン‡

ドゥルー・フーデンバーグ§

大滝英生 訳

要 旨

「買い手」および「売り手」と呼ばれる 2 種類の主体による立地選択モデルを考える。第 1 期においてすべての主体は選択可能な二つの同質な地点の間から各自の立地点を同時に選択する。然る後、各地点の個人は同じ地点にいる他の主体とある種のゲームを行う。買い手は他の買い手がより少なく売り手がより多い立地点を選好し、売り手はそれと逆の選好を有する。我々は二つの市場について可能な均衡のサイズの集合を研究する。そしてまた、より大きな市場がより効率的であっても、サイズが大きく異なる二つの市場が共存し得ることを示す。これは Ellison and Fudenberg [4] (EF) による分析の拡張である。彼らの研究は、各市場における各タイプの主体の数が整数でなければならないという制約を無視し、代わりに主体がいくらでも分割可能として扱われる「準均衡」を分析した。

キーワード

集積, 二地点市場, 準均衡, 偏在, 有限レンジ・エコノミー, 整数制約, 非分割性, 超準解析

JEL classification

C62, L14, O18, R11

1. はじめに

多くの経済モデルでは、主体は彼自身とは異なる方法で特徴付けられた他の主体との相互作用か

* [原題 “Location Choice in Two-Sided Markets with Indivisible Agents.”] 本研究は NSF 交付金 (SES-0214164, SES-0219205, SES-0112018, SES-0426199) および州立カリフォルニア大学バークレー校 Coleman Fung リスクマネジメントセンターの助成を受けた。

† E-mail address: anderson@econ.berkeley.edu

‡ E-mail address: gellison@mit.edu

§ E-mail address: dfudenberg@harvard.edu

ら恩恵を被る。交換経済では、個人は異なる賦存量あるいは異なる選好を有する他の個人との相互作用によって利益を得る。生産を伴う経済では、生産者と消費者が相互に作用することで利益が生じる。結婚「市場」では、男性と女性が出会うことによって利得が発生する。これらの活動の多くは集積されているように見える。例えば、多くの産業は地理的に集められており、また多くの財の取引は少数の市場で行われている。

観察された集積の水準についての文献における一つの説明は次の通りである。即ち、規模に関する収穫逓増が存在するとき「偏在」から集積が生じるというものである。最も単純なそのようなモデルでは、より大きな市場に属することを選好するような同質な個人の連続体が存在するとする。ここで実現され得る均衡は（複数存在するかもしれないが）すべての活動的市場 [訳注: 取引が行われ得る市場] が同じ大きさになるもののみである。また唯一の安定的均衡はすべての主体を同一の立地点にあてがうものである。より強い結果として、有限人の主体からなるモデルにおける唯一の均衡は、これらの集積した、あるいは「完全偏在」となったものである。即ち、主体が有限のサイズしか持たない場合、大きさが等しい複数の活動的市場が存在するようなものは均衡とはなり得ない。これは一人の主体の移動は、その主体が移動した新しい市場をより大きく、そのためその主体が去った市場よりもより好ましくするからである。

しかし、興味ある多くの場合において主体は同質ではない。またすべての主体がより大きな市場を好む一方、彼らは彼ら自身と同じタイプの主体がより少ない市場を好む。そのため、例えば買い手と売り手との比率はより考慮に値する。この場合、選択する市場を変更した主体は、その主体が参加する市場に逆の「マーケット・インパクト」効果を与える。ある売り手が市場1から市場2へ移行することを考えるとき、その売り手は次のことを考慮すべきである。即ち、彼女が市場2に参加することが市場2における売り手の買い手に対する比率を増加させ、そしてそれが彼女自身を含んだ売り手全体にとっての市場2の魅力をより減じるものとなる。これは次のような疑問を生じさせる。即ち、マーケット・インパクト効果は複数の活動的市場を生成できるか否か、あるいは（輸送費のような）非経済性がない単一の市場に集中する活動を期待すべきか否かという疑問である。この疑問は同質な主体からなる連続体モデルの研究だけでは解明できない。それは市場の大きさが無限に近づくにつれ、マーケット・インパクト効果と集積による利益が互いに打ち消し合うからである。これに代えて、二種類に分類される主体から構成される有限人の立地選択モデルを我々は研究する。以下では主体を二つに分類し、「買い手」および「売り手」とそれぞれ呼ぶことにする。

モデルの構造は Ellison and Fudenberg (EF) [4] と同じである。モデルでは選択可能な立地点ないし市場は二つあり、それらは同質であるとする。モデルの第一期では、すべての主体は二つの立地点の間から各自の立地点を同時に選択する。然る後、各立地点における主体はそこにおける他の主体とある種のゲームをする。各主体の最終的な利得は同じ立地点を選んだ各タイプの主体数に

よって決定される⁽¹⁾。我々は主体の選好について次のように仮定する。即ち、買い手は他の買い手がより少なく、また売り手がより多い立地点を好むとする。売り手についてはその逆の選好を仮定する。これにより、買い手および売り手の数が同じときは、二つの市場が正確に同じサイズとなるような均衡が存在する⁽²⁾。

伝統的な見解は次のようなものである（例えば、[10]を見よ）。それは、収穫逓増があるときは常に、即ちより大きな市場がより効率的であるとき、二つないしより多くの活動的な市場を伴う帰結は不安定な所謂ナイフ・エッジになるというものである。EFはこの見解が誤りであることを示した。そして「マーケット・インパクト効果」によって、均衡において幾つかの市場が開かれたままとなることを示した。即ち、活動的な市場が複数存在する帰結が不安定なナイフ・エッジとなる代わりに、そのような均衡が安定となる「プラトー」(plateau, 平坦な部分)が存在することを示した。上述したように、各市場の主体の数が限りなく大きくなる時、マーケット・インパクト効果と収穫逓増の利益はしばしば互いに打ち消し合う。EFは次のように論じている。即ち、興味ある多くのモデルでは、同一の比率で効果が相殺される。これが真であるとき、EFは次のことが成立することを示している。即ち、活動的な二つの大きな市場の大きさが等しくなく、そしてそれらがこのプラトーの幅の下限を与えるときでさえ、均衡についての誘因制約は活動的な二つの大きな市場と整合的である。しかし、彼らは各市場における各タイプの主体数は整数であるという制約を無視し、その代わりに、無限に分割可能であるとする「準均衡」を分析している。この理由から、EFの結果は、任意の誘因制約を満足し、また各市場の各タイプの主体数が整数であるような均衡の確かな帰結の存在については何も述べていない。

競争的オークションサイトに関する文脈において、Ellison, Fudenberg and Möbius [5] (EFM)は次のことを示した。即ち、買い手の数が多く、また買い手の評価額が一様に分布しているとき、 B 人の買い手と S 人の売り手からなるゲームの準均衡におけるサイズの任意の比率 α に対して、近くのある S' が存在して、 B 人の買い手と S' 人の売り手からなるゲームがサイズの比率が近似的に α となる確かな均衡を有することを示した。これは、あるラージ・エコノミーにおいて確かな均衡が存在することを示している。しかしこのことは、特定の組 (S, B) についての均衡の数に関しては何も述べていない。実際、多くの組 (S, B) は完全偏在以外の確かな均衡を持たない可能性が残されたままである。

-
- (1) 買い手と売り手が同時に移動するという仮定は、次のようなときにはとても自然である。例えばそれは、二つの市場における主体がだいたい対称的であるようなときである。すべての売り手がどの買い手よりも前に移動するという非対称的なモデルによって記述する方がより良い場合もあるだろう。
 - (2) より正確には、我々の結果は次のことを導くものである。即ち、買い手および売り手の数が同じであり、かつそれらの数が十分大きいときは、二つの市場が正確に同じ大きさとなるような均衡が存在する。我々はこの典型的な均衡が、売り手と買い手の数が小さいときでさえも存在するだろうことを期待する。しかし我々はこの主張が真となる下での正確な条件の導出を試みたことがない。

本稿の主眼は、各主体は非分割的であるという制約に注意しながら均衡の徹底的な分析を提供することによってラージ・マーケットにおける偏在の分析を完全なものにすることである。手短かに言えば、EFの仮定を満足する経済（利得関数および集計された売り手の買い手に対する比率）について我々には次の4つの主な発見がある。

1. 二つの活動的市場が存在するような均衡が安定となるプラトーのサイズの上限とより明確な下限を与えることによって、我々は準均衡に関するEFの結果をより鮮鋭にした。 S と B がより大きくなると⁽³⁾、これら上限下限は収束するので、極限において我々は必要十分条件を得る。
2. 利得についての幾つかの自然な特定化の下で、 $B_n \rightarrow \infty$ であり、すべての n について完全偏在となる点列 $\{S_n, B_n\}$ が存在する。即ち、点列の各点において、唯一の純粋戦略均衡はすべての主体が同じ立地点を選択するものなので、プラトーは空である。

第2点の結果にもかかわらず、二つの市場が共に活動的となるような均衡が存在しないような経済の列は大変特殊であることが明らかにされる。特に、

3. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、境界 M が存在して、もし集計された買い手に対する売り手の比率が任意の整数から少なくとも ε だけ離れたところにあり、そして主体の数が少なくとも M ならば、正確な均衡の範囲が存在する。固定された利得関数に対して、(各市場の主体の割合によって説明される)この範囲の幅は、買い手および売り手の数が大きいとき、それらの数から独立である。
4. 更に、 $B_n \rightarrow \infty$ かつ S_n/B_n が収束するような一般的な点列 $\{S_n, B_n\}$ に対して、十分大きな任意の n について正確な均衡のプラトーが存在する。このプラトーは、EFの結果によってサイズの比率すべてを含む。それは通常、他のものも同様に含む。更に均衡（即ち、一方の市場に多くの買い手があり、残りの買い手はもう一方の市場にいるという均衡が存在するような所与の範囲における整数の比率）の密度は我々が特定した特別な区分線形関数に収束する。売り手よりも買い手がより少なくしか存在しないときは、多くの買い手が市場1に集まる均衡が存在する。売り手よりもより多くの買い手が存在するときは、対称的な主張が真となる。

第一の発見におけるEFよりもより多くのサイズの比率を得るという結果の理由は、買い手に対する売り手の比率が各市場において正確に等しくなりながら誘引制約が満たされるための条件を、彼らの結果は提供しているということである。新しい結果の証明は、EFMによる買い手の評価額が一様に分布しているケースにおける準均衡の集合の特徴付けのように、二つの市場における買い手に対する売り手の比率が僅かに等しくならぬことを許す。あるケースにおいては、それは実質的にサイズの比率のより大きな範囲を導く。

(3) 買い手と売り手の利得は $\gamma = S/B$ の関数として、定義域 $\gamma \in \Gamma$ 上で定義される。 S と B が大きくなると γ は Γ の境界から離れていることを結果は要求する。

第4の発見において特徴付けされる均衡のプラトーは、一般的に存在する。なぜならば、 S_n/B_n の極限が無理数であるときは常にそれを得ることが知られているからである。有理数の集合は測度ゼロなので、我々の一般的な結果は、例えば Grodal [6] や H. Dierker [2] が行った純粋競争経済における一般的な点列の形式化と似ている。極限が無理数となる点列がより良く振舞う理由は、「 x に $(x+y) \bmod 1$ を対応させる写像はエルゴード変換となることの必要十分条件は y が無理数であることである」という事実と密接に関連している。全体的に S 人の売り手と B 人の買い手からなるモデルを固定し、 $\gamma = S/B$ とする。市場1に整数であるような B_1 人の買い手がいるような均衡が存在するか否かは、ある不等式を満たす S_1 が存在するか否かに依存する。転じて、これは $(\gamma B_1) \bmod 1$ が $[0, 1]$ 区間内のある区間にあるか否かに依存する。但し、その区間の長さは上で参照した $\alpha = B_1/B$ の区分線形関数となる。 B が大きいとき、区分線形関数は B_1 における変化に反応して徐々に変化する。一方 $(\gamma B_1) \bmod 1$ は、エルゴード的に、 $[0, 1]$ 上の一様分布関数を本質的に有する。結果的に、 $(\gamma B_1) \bmod 1$ がある区間に位置するような B_1 の集合の密度はその区間の長さに収束する。

第4の発見における特徴付けを形式化するもう一つの方法は、我々が定義した密度関数 H を至る所で伴うような均衡の幅を伴う均衡の広範なプラトーを無作為に選ばれたラージ・エコノミーが有するだろうことの確率についての主張である。もし $B_n \rightarrow \infty$ となるある点列 $\{B_n\}$ を選び、それからコンパクトな台上の密度関数によって描写された買い手に対する売り手の比率に可能な限り接近するように上手く S_n を選ぶことによって、経済の点列が無作為に選ばれるならば、 n 番目の経済が H の ε の範囲にある均衡密度を伴う均衡の大きなプラトーを有する確率は $n \rightarrow \infty$ のとき1に収束することを我々は示す。

第4の発見における結果は、超準解析を用いて証明された。ここで超準解析とは、無限小や無限大によって表される量を形式化し操作するものである。結果の主張は、しかし、完全に標準的で、超準解析の知識なしに理解され得るものである。⁽⁴⁾ 第3の発見における構成を有理数のすべてを通して $1/2, 1/3, 2/3$ などから離れて抑えられるように拡張することによってプラトーの一般的な存在を例示することもまた可能だということを我々は信じる。しかしこれは、あまりに厄介なので、第4の発見における結果の有用性を所与として追求する価値はないように思われる。

2. 準均衡の幾何学

簡単な二段階立地選択モデルを考える。第1段階では、 S 人の売り手と B 人の買い手が市場1または市場2のどちらかを同時に選択する。もし S_i 人の売り手と B_i 人の買い手が市場 i を選ぶなら

(4) 超準解析に関する詳細は、Hurd and Loeb [7] や Anderson [1] を見よ。超準解析における methatheorem は、結果についての標準的な証明の存在を保証する。しかしその標準的な証明はとても複雑になる傾向がある。

ば、このとき市場 i における売り手は期待利得 $u_s(S_i, B_i)$ を、買い手は期待利得 $u_b(S_i, B_i)$ を、マーケットゲームによって得る⁽⁵⁾。純戦略による Nash 均衡では、満足されなければならない四つの誘引両立制約がある。第一に、市場 1 の売り手は市場 1 に留まることを望まなければいけない。このことは即ち次の不等式と同値である。

$$(S1) \quad u_s(S_1, B_1) \geq u_s(S_2 + 1, B_2).$$

我々はこれを S1 制約と呼ぶことにする。ここで市場 2 の売り手、市場 1 の買い手および市場 2 の買い手にも同様に、彼らが各自の市場に留まることを望むような制約を課す。我々はこれらの制約をそれぞれ S2, B1 および B2 と呼ぶことにする。

売り手および買い手の総数 S と B を所与として、配分 (S_1, S_2, B_1, B_2) が「純戦略 Nash 均衡」であるとは、次の三つの条件が成立することを云う：

- (i) (誘引両立性) 制約 S1, S2, B1 および B2 が成立している；
- (ii) (実現可能性) $S_1 + S_2 = S$, $B_1 + B_2 = B$, および S_1, S_2, B_1, B_2 はすべて非負；
- (iii) (非可分性) S_1, S_2, B_1, B_2 はすべて整数。

EF は条件 (i) および (ii) を満足する配分を「準均衡」と呼んでいる。

仮定 1 非空閉区間 $\Gamma = [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}]$, $F'_s < 0$ かつ $F'_b > 0$ なる Γ 上の連続微分可能な関数 F_s と F_b , および Γ 上の連続な関数 G_s と G_b が存在し, $B \rightarrow \infty$ となる極限において $\gamma \in \Gamma$ 上一様に次の近似が成立する：

$$\begin{aligned} u_s(\gamma B, B) &= F_s(\gamma) - \frac{G_s(\gamma)}{B} + o(1/B), \\ u_b(\gamma B, B) &= F_b(\gamma) - \frac{G_b(\gamma)}{B} + o(1/B). \end{aligned} \quad (1)$$

この仮定は利得関数が明確に定義された、人口が多い極限に少なくとも $1/B$ の率で収束することを要求するものである。それは、(二つの) 市場が共に大きいとき、誘因制約を近似するための計算を使うことを我々に許すものである。この仮定はまた、 B が大きいとき各主体の効用が他のタイプの主体の人口について厳密に増加することを意味する。

我々は本稿を通じて仮定 1 を仮定する。この仮定について EF は、経済学における興味あるモデルの多くで満足されていると論じている。例えば、Ellison, Fudenberg and Möbius [5] による競争的

(5) 我々が提示する正式なモデルは一段階ゲームの Nash 均衡の一つであるが、意図された解釈は次のようなものである。即ち、二段階ゲームのサブゲーム完全均衡における第一段階での選択を我々は分析している。但し、本稿が基本的構成要素として扱っている利得関数は各市場におけるゲームの Nash 均衡として計算される。これらの利得関数は、概して整数である主体の数についてのみ定義されるだろう。我々の仮定は、このとき、これらの関数の実数上への任意の拡張に対するものとなっている。

オークションモデル, Krugman [9] によるマーシャル的労働市場競争モデル, あるいは Pagano [11] による競争的証券市場モデルの二人口バージョンが挙げられる。EF は, 仮定 1 が各市場において同じ買い手に対する売り手の比率を伴う配分における誘引制約の近似を許すことを示し, それを次の結果を証明するために用いた。

定理 0 (Ellison and Fudenberg [4]) 仮定 1 を仮定し,

$$r^*(\gamma) = \max \left\{ \left| \frac{2G_s(\gamma)}{-F'_s(\gamma)} + 1 \right|, \left| \frac{2G_b(\gamma)}{\gamma F'_b(\gamma)} + 1 \right| \right\}$$

および

$$\alpha^* = \max\{0, 1/2 - 1/2r^*(\gamma)\}$$

とおく。このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある \underline{B} が存在し, $\gamma \equiv S/B \in \Gamma$ なる任意の整数 $B > \underline{B}$ および任意の整数 S に対して, B 人の買い手と S 人の売り手とからなるモデルは, 任意の $\alpha_1 \in [\alpha^*(\gamma) + \varepsilon, 1 - \alpha^*(\gamma) - \varepsilon]$ に対して $B_1 = \alpha_1 B$ 人の買い手が市場 1 にいるような準均衡を有する。

本稿の主な焦点は正確な均衡にあるが, 初等的なステップとして準均衡の集合の詳細な特徴付けを我々は提供する。我々がここで展開する必要条件はそれ自身の正当性について興味を持たれるかもしれないし, 我々の後の結果においてもまた便利である。

定理 1 仮定 1 を仮定する。 $\Gamma^\varepsilon = [\underline{\gamma} + \varepsilon, \bar{\gamma} - \varepsilon]$ と定義し,

$$T(\gamma) = \frac{G_s(\gamma)}{F'_s(\gamma)} - \frac{G_b(\gamma)}{F'_b(\gamma)}$$

および

$$\alpha^{**}(\gamma) = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} - \frac{\gamma + 1}{2|1 + \gamma - 2T(\gamma)|} \right\}$$

とおく。このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある \underline{B} が存在し, $\gamma \equiv S/B \in \Gamma^\varepsilon$ なる任意の整数 $B > \underline{B}$ および任意の整数 S に対して, 次の二つの主張が成立する。

1. B 人の買い手と S 人の売り手からなるモデルは, 任意の $\alpha_1 \in [\alpha^{**}(\gamma) + \varepsilon, 1 - \alpha^{**}(\gamma) - \varepsilon]$ に対して, $B_1 = \alpha_1 B$ 人の買い手が市場 1 にいるような準均衡を有する。
2. もし $B_1/S_1, B_2/S_2 \in \Gamma^\varepsilon$ および $\alpha_1 \in [\varepsilon, \alpha^{**}(\gamma) - \varepsilon] \cup [1 - \alpha^*(\gamma) + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ならば, B 人の買い手と S 人の売り手からなるモデルは, $B_1 = \alpha_1 B$ 人の買い手および S_1 人の売り手が市場 1 に, B_2 人の買い手および S_2 人の売り手が市場 2 にいるような準均衡を持たない。

注意. 定理 0 と定理 1 の違いは, 定理 0 の証明は各市場における売り手の買い手に対する比率が正確に等しくなる準均衡を構成したが, 一方定理 1 は配分の十分な集合を使う。その定理の証明は, 仮定 1 によって提供された効用関数の近似を用いるので, 次のことに注意することは興味深い。即ち, 一様に分布した買い手の評価額と共に表れる正確な効用関数について, EFM が彼らのオークションモデルにおいて得たことは解の範囲を正確に与える。2 における必要性に関する結果が二つの余分な条件を要求することに注意せよ。その命題は $B_1/S_1, B_2/S_2 \in \Gamma^\varepsilon$ なる均衡に適用されるだけである。なぜならば, 仮定 1 は $\gamma \notin \Gamma$ に関する利得に対してどんな制約も課さないからである。⁽⁶⁾ 我々は注意を $\alpha_1 \notin \{0, 1\}$ に制限する。なぜならばモデルはしばしば, 単一の市場において任意の活動が行われるような均衡を有するからである。 $\alpha_1 \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ に対する更に進んだ制限は, B_1 および B_2 が共に大きいことを確実にする。それは必要 (条件) である。なぜならば, 仮定 1 は B が大きい極限における利得を特徴付けるのみだからである。

定理 1 の証明は補題を一つ用いる。それは S_1, S_2, B_1 および B_2 制約が, 買い手の数が十分大きいときに, かなり容易な形に書き換えられることができることを注意するものである。

補題 1 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある B が存在して, もし $B < B_1, B_2$ かつ $\gamma \equiv S/B \in \Gamma^\varepsilon$ ならば, $\alpha_1 \equiv B_1/B$ に対して次の二つの主張が成立する。

1. もし

$$(S_1 - \gamma B_1) - \frac{G_s(\gamma)(1 - 2\alpha_1)}{F'_s(\gamma)} \in (\alpha_1 - 1 + \varepsilon, \alpha_1 - \varepsilon) \quad (2)$$

および

$$(S_1 - \gamma B_1) - \frac{G_b(\gamma)(1 - 2\alpha_1)}{F'_b(\gamma)} \in (-\alpha_1\gamma + \varepsilon, (1 - \alpha_1)\gamma - \varepsilon) \quad (3)$$

ならば, 市場 1 に B_1 人の買い手と S_1 人の売り手がいるような準均衡が存在する。

2. もし $S_1/B_1, S_2/B_2 \in \Gamma^\varepsilon$ であり,

$$(S_1 - \gamma B_1) - \frac{G_s(\gamma)(1 - 2\alpha_1)}{F'_s(\gamma)} \notin [\alpha_1 - 1 - \varepsilon, \alpha_1 + \varepsilon]$$

あるいは

$$(S_1 - \gamma B_1) - \frac{G_b(\gamma)(1 - 2\alpha_1)}{F'_b(\gamma)} \in [-\alpha_1\gamma - \varepsilon, (1 - \alpha_1)\gamma + \varepsilon]$$

ならば, 市場 1 に B_1 人の買い手と S_1 人の売り手がいるような準均衡は存在しない。

補題 1 の証明は付録にて行う。

(6) 代わりに, $\Gamma = (0, \infty)$ を許し, Γ のコンパクトな部分集合上で一様に成立するように仮定 1 を弱めることもできる。このとき定理 3 は真のままであり, 定理 1 も $\Gamma_\varepsilon = [\varepsilon, 1/\varepsilon]$ と定義するならば真のままである。定理 2 は, しかし, このように一般化することはできない。

定理 1 の証明

補題 1 は次のことを導く。即ち、もし B が大きく、また $S/B \in \Gamma^\varepsilon$ ならば、 B 人の買い手と S 人の売り手からなるモデルは、二つの式

$$\begin{aligned} (S_1 - \gamma B_1) - \frac{G_s(\gamma)(1 - 2\alpha_1)}{F'_s(\gamma)} &\in (\alpha_1 - 1 + \varepsilon, \alpha_1 - \varepsilon), \\ (S_1 - \gamma B_1) - \frac{G_b(\gamma)(1 - 2\alpha_1)}{F'_b(\gamma)} &\in (-\alpha_1\gamma + \varepsilon, (1 - \alpha_1)\gamma - \varepsilon). \end{aligned}$$

について解が存在するような任意の α_1 に対して、市場 1 において $B_1 = \alpha_1 B$ 人の買い手がいるような準均衡を有する。我々は両方の条件を満たす S_1 を見つけ出すことができる。それは

$$\left(\alpha_1 - 1 + \left(\frac{G_s(\gamma)(1 - 2\alpha_1)}{F'_s(\gamma)} - \frac{G_b(\gamma)(1 - 2\alpha_1)}{F'_b(\gamma)} \right) + \varepsilon, \alpha_1 + \left(\frac{G_s(\gamma)(1 - 2\alpha_1)}{F'_s(\gamma)} - \frac{G_b(\gamma)(1 - 2\alpha_1)}{F'_b(\gamma)} \right) - \varepsilon \right)$$

が $(-\alpha_1\gamma + \varepsilon, (1 - \alpha_1)\gamma - \varepsilon)$ と共通部分を有することと同値である。

我々の $T(\gamma) = \frac{G_s(\gamma)}{F'_s(\gamma)} - \frac{G_b(\gamma)}{F'_b(\gamma)}$ を所与として、これは

$$(\alpha_1 - 1 + \varepsilon + T(\gamma)(1 - 2\alpha_1), \alpha_1 - \varepsilon + T(\gamma)(1 - 2\alpha_1)) \cap (-\alpha_1\gamma + \varepsilon, (1 - \alpha_1)\gamma - \varepsilon) \neq \emptyset$$

と同値である。この方程式における二つの区間は、それぞれ $1 - 2\varepsilon$ および $\gamma - 2\varepsilon$ の長さを有する。そして $\alpha_1 = 1/2$ のとき、それらは共に 0 を中心とする。最初の区間は、 α_1 における変化に応じて傾き $1 - 2T(\gamma)$ で線形に動く。一方、二つ目の区間は、傾き $-\gamma$ で線形に動く。そのため、二つ目の区間と関連して、最初の区間の移動は、 α_1 における変化に応じて傾き $1 + \gamma - 2T(\gamma)$ の線形となる。二つの区間は、相対的な移動の程度が $(1 + \gamma)/2 - 2\varepsilon$ より小さい限り交わり続ける。この条件は $|\alpha_1 - 1/2| < \frac{(1+\gamma)/2 - 2\varepsilon}{|1 + \gamma - 2T(\gamma)|}$ であるときは常に真である。即ち

$$\alpha_1 \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1 + \gamma - 4\varepsilon}{2|1 + \gamma - 2T(\gamma)|}, \frac{1}{2} + \frac{1 + \gamma - 4\varepsilon}{2|1 + \gamma - 2T(\gamma)|} \right) \quad (4)$$

であるとき、二つの区間は交わり続ける。

この説明から定理のパート 1 において与えられたより単純な主張へ進むことは、 ε の単純な再分類となるだろう。これは分母における $|1 + \gamma - 2T(\gamma)|$ という項は下に有界ではないという事実に因る。これは、 γ を二つのケースに分類することによって扱われることができる。

集合 Γ^ε を、 $\Gamma^\varepsilon = \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_2^\varepsilon$ のように分割する。但し、

$$\Gamma_1^\varepsilon = \left\{ \gamma \in \Gamma^\varepsilon : \frac{1 + \gamma}{2|1 + \gamma - 2T(\gamma)|} > \frac{2}{3} \right\}$$

である。 $\gamma \in \Gamma_1^\varepsilon$ について、任意の $\varepsilon < 1/16$ に対して $\frac{1 + \gamma - 4\varepsilon}{1 + \gamma} > \frac{3}{4}$ であることに留意せよ。よって

$$\frac{1 + \gamma - 4\varepsilon}{2|1 + \gamma - 2T(\gamma)|} > \frac{3}{4} \frac{1 + \gamma}{2|1 + \gamma - 2T(\gamma)|} > \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$

となるが、これは (4) 式における区間が $(0, 1)$ であることを導く。ゆえに、もし我々が任意の $\varepsilon > 0$ を所与とするならば、我々は \underline{B} を $1/\varepsilon$ と \underline{B} の値とを掛け合わせたものと等しくなるように選ぶことができる (これを $\underline{B}_{1/16}$ と呼ぶことにする)。これは、 $\varepsilon = 1/16$ に対して補題 1 の結果が真となるものである。 $B > \underline{B}$ および $\alpha \in (\varepsilon, 1 - \varepsilon)$ に対して、 $\alpha_1 B > \underline{B}_{1/16}$, $(1 - \alpha_1) B > \underline{B}_{1/16}$ および α_1 が (4) 式によって確認される区間に属するという三点を我々は得る。よって $B_1 = \alpha_1 B$ なる準均衡が存在する。

$\gamma \in \Gamma_2^\varepsilon$ に対して、 $|1 + \gamma - 2T(\gamma)| > 2(1 + \gamma)/3 > 2/3$ を我々は得るので、我々は ε を単純に再定義するだけができる。任意の ε' を所与として、 $B > (\alpha^{**}(\gamma) + \varepsilon')\underline{B}$ であるときはいつでも、 $\varepsilon = \varepsilon'/3$ に対して補題 1 の結論が真となるように \underline{B} を選ぶ。このとき、 $B > \underline{B}$ について、(4) 式において確認される区間、— それは $\varepsilon = \varepsilon'/3$ および $|1 + \gamma - 2T(\gamma)| > 2(1 + \gamma)/3 > 2/3$ のとき $(\alpha^{**}(\gamma) + \varepsilon', 1 - \alpha^{**}(\gamma) - \varepsilon')$ を含むのだが、— における任意の α_1 に対して我々は準均衡を得る。

定理のパート 2 の証明は、殆ど同一の方法で補題 1 のパート 2 を用いる。 B_1 と B_2 が共に大きい限りにおいては、もし

$$\alpha_1 \notin \left(\frac{1}{2} - \frac{1 + \gamma + 4\varepsilon}{2|1 + \gamma - 2T(\gamma)|}, \frac{1}{2} + \frac{1 + \gamma + 4\varepsilon}{2|1 + \gamma - 2T(\gamma)|} \right)$$

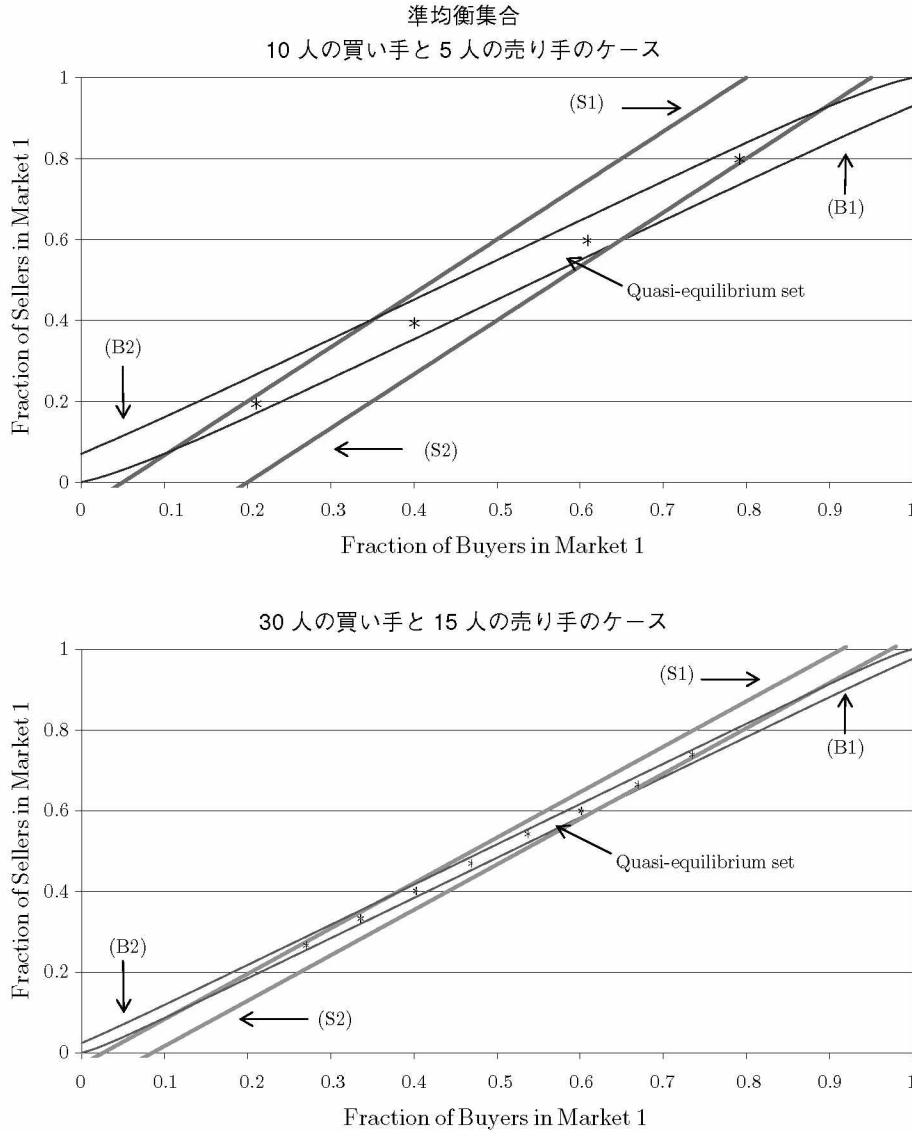
ならば、 $S_1/B_1, S_2/B_2 \in \Gamma^\varepsilon$ なる準均衡が存在しないということを我々は知る。 $\gamma \in \Gamma_2^\varepsilon$ について、定理のパート 2 の結論は、 ε の再定義から従う。 $\gamma \in \Gamma_1^\varepsilon$ について、パート 2 の結論は完全に無意味である。■

定理 1 はそれ自身では、ゲームの完全な均衡の集合については何も言っていない。考えを固定するために、買い手の評価額が一様に分布しているオークションモデルにおける四つの制約を示している EFM から二つの説明を (図 1 のように) 再現する⁽⁷⁾。ここで S_1, S_2, B_1 および B_2 の各線は、対応する誘因制約が等号で成立する点に対応している。即ち、 S_1 に沿って、市場 1 を現在選択している各売り手は市場 1 に残ることと市場 2 に移動することがちょうど無差別である。売り手は他の買い手がより少ない地点を選好するので、この線上の点は均衡とは整合的でない。各誘因制約についてのこの方法における推論によって、準均衡集合は図の中央にある菱形の領域であるということ被我々は理解する。星印によって表されている正確な均衡は、準均衡集合に属する整数の格子点である。

上の図は、10 人の買い手と 5 人の売り手からなるモデルに対応している。均衡において、2 人の買い手と 1 人の売り手、あるいは 4 人の買い手と 2 人の売り手をより小さい市場は有することがで

(7) EFM においては、各売り手は一単位の商品を保有しており、そしてその商品を保持するための留保価値はゼロである。一方、各買い手は一単位の購入を望み、そして買い手の評価額は立地選択の後に決定される。よって、各市場における均衡利得は一様価格オークションによって決定される。

図1 EFMの競争的オークションモデルにおける準均衡集合および均衡集合



きる。しかしより小さい市場に3人あるいは5人の買い手がいるような均衡は存在しない。例えば、より小さい市場に三人の買い手を伴うとき、準均衡の条件を満たすと二分の一近くの値の範囲が存在する。しかしそれらのどれも整数制約を満たさない。下の図は、30人の買い手と15人の売り手から構成されるように市場が拡大するとき何が起こるかについてアイデアを与える。準均衡の領域は「より平ら」になるように見える。なぜならば一人の主体が一つの市場から他の市場へ移動する影響はより小さくなるので、二つの市場における効用は、均衡における効用がより小さい主体に市場の変更を思いとどまらせるために互いにより近くなる必要がある（補題4は関連する観察事

実を与える。もし (S_1, S_2, B_1, B_2) が準均衡ならば、市場 1 における買い手の売り手に対する比率は全体の比率 S/B と $O(1/B_1)$ の割合で 0 に収束する項との和に等しくなければならない。正確な均衡は再び星印で表している。

これは、次の質問に我々を導く。即ち、正確な均衡はいつ存在するだろうか？

経済が拡大するとき、準均衡の集合はより狭くなる。それは、所与の経済において均衡を見つけ出すことをより困難にするかもしれないことを示唆する。しかし同時に、所与の相対的なサイズの範囲においてより多くの候補となる整数が存在する。そのため、答えは明らかではない。

3. 完全偏在の一例

EF の主な結果は、主体の数が大きいとき、仮定 1 を満たすモデルは二つの活動的な市場を持つ準均衡の大きなプラトールを常に有するということである。本節では、その結果は真の均衡の分析に対して常に拡張されるわけではないことを我々は示す。特に、規模に関する収穫逓増が仮定 1 を満たすが、一つの市場においてすべての活動が行われている完全に「偏在」した均衡を除いては純戦略による均衡を持たないような経済の点列の族を我々は提供する。

例 1 u_s と u_b を仮定 1 を満たす効用関数とする。 $u_s(\gamma B, B)$ は B について増加、 γ について減少関数であるとする。また $u_b(\gamma B, B)$ は B および γ について増加関数であるとする。このとき、 B の大きさにかかわらず、 B 人の買い手と $S = B + 1$ 人の売り手からなるモデルは二つの活動的な市場を有するような純戦略 Nash 均衡を持たない。

証明

逆を仮定する。即ち、 B_1 人 ($0 < B_1 < B$) の買い手および S_1 人 ($0 < S_1 < S$) の売り手が市場 1 に、また $B_2 = B - B_1$ 人の買い手および $S_2 = S - S_1$ 人の売り手が市場 2 にいるような均衡が存在するとする。また一般性を失うことなく $B_1 \leq B_2$ と仮定する。

S_1 と B_1 の間のすべての可能な関係を我々は逐一除外する。

- もし $S_1 < B_1$ ならば、市場 1 の買い手は市場 1 から離れるだろう。離脱の後、市場 2 はより大きく（買い手がより多く）なり、買い手にとってより有利な売り手/買い手比率となる。
- もし $S_1 = B_1$ ならば、市場 1 の買い手は市場 1 から離れるだろう。離脱の後、市場 2 はより大きくなる。また、 $S_1 = B_1$ は $S_2 = B_2 + 1$ を導くので、離脱の後、市場 2 における売り手の買い手に対する比率は、市場 1 と同様に 1 となる。よって離脱後買い手はより良くなることはない。
- もし $S_1 = B_1 + 1$ および $B_1 = B_2$ ならば、市場 1 の売り手が市場 1 から離れるだろう。 $S_2 = B_2$ なので状況は正確に上述の場合におけるものと同じであるが、今度は市場 1 ではなく市場 2 で

あり逆である。

- もし $S_1 = B_1 + 1$ および $B_1 < B_2$ ならば、市場 1 の売り手が市場 1 から離れるだろう。市場 2 はより大きくなる。そして離脱の後でさえ、その売り手の買い手に対する比率はより低い。即ち、 $(S_2 + 1)/B_2 = (B_2 + 1)/B_2 < (B_1 + 1)/B_1 = S_1/B_1$ である。
- もし $S_1 > B_1 + 1$ ならば、市場 1 の売り手は市場 1 から離れるだろう。市場 2 は少なくとも同程度に大きくなり、そして離脱の後でさえ、より低い売り手の買い手に対する比率を有するだろう。■

ある意味では、例における $S = B + 1$ という仮定は、均衡存在のためには非常に悪いケースである。均衡は、二つの市場において売り手の買い手に対する比率が非常に近くなることを要求する。市場 1 と市場 2 がおよそ同じ大きさのとき、我々はどこかに一人の余計な売り手を置かなければならないという事実は、一方の市場におよそ二分の一の少ない売り手を、他方の市場におよそ二分の一の多い売り手を我々が持たなければならないということを意味する。大きな市場への移動の「マーケット・インパクト」は一人の売り手あるいは一人の買い手なので、それがこれより勝ることはない。これは次のことを示唆する。即ち、「rounding error」がそれほど問題とならないときと同様に売り手の買い手に対する比率が 1 から離れて抑えられているとき均衡を見つけ出すことはより容易かもしれない。より一般的には、例を考察する一つの方法は、我々が整数の配分に制限されているとき二つの市場において買い手の売り手に対する任意の比率がどれだけ正確に近似できるかに均衡集合の大きさが依存するだろうことである。

4. 有限ラージ・エコノミーにおける均衡のプラトーが存在するための十分条件

この節では、真の均衡のプラトーが存在するための十分条件を与える。十分条件は非存在の例が特別であることを説明する。例の中では、売り手の買い手に対する比率が非常に 1 に近いが、1 と等しくはない。この節の主な命題は、もし二つの市場における主体の数の比率が殆ど正確に整数であるということがないならば（そしてまた主体の数が大きければ）、偏在していない均衡の退化していないプラトーが存在することを示す。またそのような均衡のプラトーの範囲において、均衡は余りに遠く離れていることはないことが示される。

\mathbb{N} を非負整数の集合とする。本稿の主な結果は、次の通りである。

定理 2 仮定 1 を満たす関数 u_b と u_s を固定する。このとき $\underline{\alpha} < 1/2$ となる定数 $\underline{\alpha}$ および定数 k_1, k_2, k_3, k_4 が存在し、

- (i) $S/B \in \Gamma$,
- (ii) 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して, $|B/S - n| > \varepsilon$ かつ $|S/B - n| > \varepsilon$, および
- (iii) $B + S > k_1 + k_2/\varepsilon$

を満たしている任意の $\varepsilon > 0$, 任意の $\alpha \in [\underline{\alpha}, 1 - \underline{\alpha}]$ および任意の正の整数 B と S に対して, $|B_1/B - \alpha| < (k_3 + k_4/\varepsilon)/B$ および $|S_1/S - \alpha| < (k_3 + k_4/\varepsilon)/S$ であるようなある B_1 およびある S_1 が存在して, B 人の買い手と S 人の売り手からなるモデルは, B_1 人の買い手と S_1 人の売り手が市場 1 にいるような均衡を有する。

証明は, それらの幾つかに対しての陽的な公式を含んだ定数 k_1, k_2, k_3 および k_4 についてのより多くの情報を含む。次の系は均衡のプラトナーの存在についてのより単純な主張である。

系 1 仮定 1 を満たす関数 u_b と u_s を固定する。このときある $\underline{\alpha} < 1/2$ が存在し, 任意の $\varepsilon > 0$ および任意の $\delta > 0$ に対して, ある M が存在し, もし

- (ii) $S/B \in \Gamma$,
- (iii) 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して, $|B/S - n| > \varepsilon$ かつ $|S/B - n| > \varepsilon$, および
- (iii) $B + S > M$

ならば, 任意の $\alpha \in [\underline{\alpha}, 1 - \underline{\alpha}]$ に対して, $|B_1/B - \alpha| < \delta$ および $|S_1/S - \alpha| < \delta$ であるようなある B_1 およびある S_1 が存在して, B 人の買い手と S 人の売り手からなるモデルは B_1 人の買い手と S_1 人の売り手が市場 1 にいるような均衡を有する。

この結果の直観は, 次の観察から始まる。即ち, 準均衡の制約が配分 $(S/2, S/2, B/2, B/2)$ において満たされているだけでなく, $(S/2 - 1/2, S/2 + 1/2, B/2, B/2)$ においてもまた (S1) および (S2) 制約が満たされるに十分な余裕を持って, ⁽⁸⁾それらは満たされているということである。よって, B が偶数のとき, 常にある整数 S_1 が存在し, その S_1 に対して, (S1) および (S2) 制約が $(S_1, S - S_1, B/2, B/2)$ において共に満たされる。

ある整数 S_1 および $B/2$ に近い任意に与えられた B'_1 付近にある整数 B_1 に対して (S1) および (S2) 制約が満たされることを示すためには, 次のように議論すればよい。連続性を用いると, もし $S_1 \in [\gamma B_1 - (1/2 - \varepsilon/2), \gamma B_1 + (1/2 - \varepsilon/2)]$ でありかつ B_1 が $B/2$ からある距離以内にあるならば, $(S_1, S - S_1, B_1, B - B_1)$ は (S1) および (S2) 制約を満たすだろう。 B'_1 が $B/2$ からのこの距離の内にあるとしよう。 $\varepsilon > 0$ なので, $(S_1, S - S_1, B'_1, B - B'_1)$ が (S1) および (S2) 制約を満たすよ

(8) この配分において, 市場 1 に移動する売り手は市場 1 と市場 2 を同一視にするだろう。そのため, 売り手にとって最早より良いということはない。

うな S_1 は存在しないかもしれない。しかし、これは $\gamma B'_1$ が、ある整数の半分の値の $\varepsilon/2$ 近傍にあるときのみ起こりえる。もしこれが真ならば、市場 1 に $B''_1 = B'_1 - 1$ 人の買い手がいるような二つの活動的市場を伴う均衡を考えよ。 $\gamma B''_1 = \gamma(B'_1 - 1) = \gamma B'_1 - \gamma$ がまたある整数の半分の値の $\varepsilon/2$ 近傍にあるときでない限り、 $B_1 = B''_1$ を伴い (S1) および (S2) 制約を満たしている整数が存在しなければならない。 γ それ自体が整数の ε 近傍にない限り、 $\gamma B'_1$ および $\gamma B'_1 - \gamma$ が共にある整数の半分の値の $\varepsilon/2$ の近くの値であることは不可能である。よって我々は、(S1) および (S2) 制約を満たす B'_1 に非常に近い B_1 に対して整数の配分が存在することを知る。

上述の議論は、(S1) および (S2) 制約のみ扱った。完全な証明は少しだがより複雑である。なぜならば、それは (B1) および (B2) 制約もまた扱うからである（それらは S_1 の狭い範囲に対してのみ満たされる）。

定理 2 の証明

我々は二つの主なステップへ進む。最初のステップは、準均衡集合が B - S 平面における平行四辺形を含むことを示す。この平行四辺形は $B_1/B = S_1/S$ および $B_1/B \in [\alpha, 1 - \alpha]$ によって定義される線分上の任意の点を含むもので、余りに薄いということはないものである。二つ目のステップは、平行四辺形の中の任意の点がそれ自体も平行四辺形の内にあるような整数からの特徴付けられた距離の内にあることを示す。その整数の点は真の均衡である。

説明を簡単にするため、 $S \leq B$ であるような組についてのみ結果を証明するだろう。「売り手」および「買い手」はモデル内において完全に対称的である。そのため、 $B \leq S$ の場合の議論もまた同様にできるだろう。

補題 2 $\alpha < 1/2$ であるようなある α およびある N が存在して、 $B + S > N$ および $\gamma \equiv S/B \in \Gamma$ であるような任意の B と S に対して、 $B_1/B \in [\alpha, 1 - \alpha]$ および $|S_1/S - B_1/B| \leq 1/4B$ であるような任意の B_1 および S_1 に対して、市場 1 に B_1 人の買い手と S_1 人の売り手がいるような配分は、 B 人の買い手と S 人の売り手からなるモデルの準均衡である。

注意. 我々が図 1 や図 2 のように配分の空間を B_1/B を x 軸上に、 S_1/S を y 軸上にとるようなグラフに描くとき、準均衡集合が $(\alpha, \alpha \pm 1/4B)$ および $(1 - \alpha, 1 - \alpha \pm 1/4B)$ によって抑えられる平行四辺形を含むことを、上述の補題は述べている。

補題 2 の証明

我々は、市場 1 の買い手が市場 2 への変更を望まないことを示すであろう。即ち、B1 制約が満たされることを示すであろう。B2 制約に関する議論はこれと同一である。S1 および S2 制約に関する

議論も非常に近いものである。

我々は B1 制約について「最も厳しい・難しい・骨が折れる」(the “hardest”) ケースから始める。即ち, $S_1 = (\alpha - 1/4B)S$ および $B_1 = \alpha B$ のときを考える。このケースでは, 我々は

$$u_b((\alpha - 1/4B)S, \alpha B) \geq u_b((1 - \alpha + 1/4)S, (1 - \alpha)B + 1)$$

を示す必要がある。

仮定 1 を所与として, これは, もし B がある \underline{B} より大きいときはいつでも

$$\begin{aligned} & F_b\left(\gamma\left(1 - \frac{1}{4\alpha B}\right)\right) - G_b\left(\gamma\left(1 - \frac{1}{4\alpha B}\right)\right) \frac{1}{\alpha B} \\ & > F_b\left(\gamma\left(1 - \frac{3}{4(1-\alpha)B}\right)\right) - G_b\left(\gamma\left(1 - \frac{3}{4(1-\alpha)B}\right)\right) \frac{1}{\alpha B} \end{aligned}$$

が成立するならば, $B + N$ がある \underline{N} よりも大きいときはいつでも満たされる。($S/B \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}] \subset (0, \infty)$ についての制約は, $B + S$ が大きいとき B は常に大きいことを導く。) \underline{B} が存在するので, もし任意の $\gamma \in \Gamma$ および任意の $\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ に対して

$$\left(-\frac{1}{4\alpha} + \frac{3}{4(1-\alpha)}\right) \gamma F'_b(\gamma) > \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) G_b(\gamma),$$

あるいは同値であるが

$$\frac{\alpha - 1/4}{1 - 2\alpha} > \frac{G_b(\gamma)}{\gamma F'_b(\gamma)}$$

であるならば, 任意の $B > \underline{B}$ に対して, これは真である。

我々は, $\underline{\alpha} \in (1/4, 1/2)$ を選ぶことができるので, これは γ 上で一様に真である。同じ $\underline{\alpha}$ について F_b の単調性によって我々が確認した方程式はまた満たされるだろうことに留意せよ。よって, この方程式を満たす $\underline{\alpha}$ を選ぶとき, 我々は \underline{B} を選ぶことができる。そのため B1 制約は, $B > \underline{B}$ という条件の下で, 平行四辺形内の任意の B_1 および S_1 に対して満たされる。これは補題 2 の証明を完全にする。■

補題 2 の結果を所与として, 基盤目の点を含んでいる平行四辺形についての次の補題を証明すれば十分である。補題 3 は幾つかの性質を満たしているある整数 B_1 および S_1 が存在することを結論付けている。これらの最初の二つは $(B_1/B, S_1/S)$ が補題 2 で描かれた平行四辺形に属しているということである。補題 2 は真の均衡は B_1 人の買い手と S_1 人の売り手が市場 1 にいることが真の均衡であることを導く。最後の二つは, そのような条件を満足し, 定理で確認されたプラトーの任意の点に近い均衡を我々が探すことができるということを指し示す。

補題 3 $\underline{\alpha} < 1/2$ と仮定する。このとき定数 k_1, k_2, k_3, k_4 が存在し, 任意の $\varepsilon > 0$, 任意の $\alpha \in [\underline{\alpha}, 1 - \underline{\alpha}]$ および (i) $S \leq B$, (ii) $S/B \in \Gamma$, (iii) 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して, $|B/S - n| > \varepsilon$, および (iv)

$S > k_1 + k_2/\varepsilon$ を満たしている任意の S, B に対して, 整数 S_1 および B_1 が存在し, $B_1/B \in [\underline{\alpha}, 1 - \underline{\alpha}]$, $|S_1/S - B_1/B| < 1/4B$, $|B_1/B - \alpha| < (k_3 + k_4/\varepsilon)(1/B)$ および $|S_1/S - \alpha| < (k_3 + k_4/\varepsilon)(1/S)$ が成立する。

補題 3 の証明

ある $\alpha \in [\underline{\alpha}, 1 - \underline{\alpha}]$ を固定する。我々は, ここで, $\alpha > 1/2$ を仮定する ($\alpha < 1/2$ に対しては対称的な議論が適用される)。

B_1^0 を, $B'/B \in (\alpha, 1 - \alpha)$ であるような整数 B' の集合の中で, αB に最も近い整数とする (この集合は, $S/B \in \Gamma$ という仮定を所与とすると, 十分大きな k_1 に対して空集合となるであろう)。

さて, 我々は次のように整数の組 (S_1^k, B_1^k) の点列を定義する。即ち, S_1 を 1 減らし, B_1 を B/S に近い整数によって減らすことを繰り返すことで, 上記の点列を定義する。我々は, (S_1, B_1) を $|S_1^k/S - B_1^k/B| < 1/4B$ を満たす点列における最初の点となるように選ぶであろう。重要な観察は, これは, $k \leq 4 + 1/\varepsilon$ となるある k に対して常に見出される。

$S_1^1 = \lfloor (B_1^0/B)S \rfloor$ とする。 $S_1^1/S \leq B_1^0/B$ であることに注意せよ。 B_1^1 を $B_1^1/B \leq S_1^1/S + 1/4B$ であるようなものの中で最も大きな整数とせよ。

もし $S_1^1/S < B_1^1/B + 1/4B$ ならば, 我々は $S_1 = S_1^1$ および $B_1 = B_1^1$ を選ぶだろう。この場合 S_1 および B_1 は $|S_1/S - B_1/B| < 1/4B$ を満たすことに注意せよ。

その他の場合, もしある $k \geq 1$ について $S_1^k/S \geq B_1^k/B + 1/4B$ ならば, S_1^{k+1} および B_1^{k+1} を $S_1^{k+1} = S_1^k - 1$ および

$$B_1^{k+1} = \begin{cases} B_1^k - \lfloor B/S \rfloor & \text{if } B/S - \lfloor B/S \rfloor \leq S_1^k/S - B_1^k/B + 1/4B, \\ B_1^k - \lfloor B/S \rfloor - 1 & \text{if } B/S - \lfloor B/S \rfloor > S_1^k/S - B_1^k/B + 1/4B \end{cases}$$

によって定義せよ。このとき我々は $(S_1, B_1) = (S_1^k, B_1^k)$ を選ぶ。但し, ここでの k は $|S_1^k/S - B_1^k/B| \leq 1/4B$ なるものの中で最も小さいものである。

主張 (S_1, B_1) のこの選び方は明確に定義でき, また k は $k \leq 3 + 1/\varepsilon$ を満たす。

これを示すために, 我々は x によって $B/S - \lfloor B/S \rfloor$ を書き表すこととし, $a^k \equiv B(S_1^k/S - B_1^k/B - 1/4B)$ と定義する。もし $a^k \in (-1/2, 0]$ ならば, (S_1^k, B_1^k) は所望の S_1, B_1 であることに注意せよ。

$B_1^1/B \leq S_1^1/S + 1/4B$ であるようなものの中で最も大きな整数であるとする B_1^1 の定義は, $(B_1^1 + 1)/B > S_1^1/S + 1/4B$ および $a^1 = B(S_1^1/S - B_1^1/B - 1/4B) \in [-1/2, 1/2)$ を導く。

もし (S_1^1, B_1^1) が所望の整数の組でないときは, $a^1 \in (0, 1/2)$ である。 $a^k \in (0, 1/2)$ に対して,

S_1^{k+1} および B_1^{k+1} の表現は,

$$S_1^{k+1} = S_1^k - 1, \\ B_1^{k+1} = \begin{cases} B_1^k - \lfloor B/S \rfloor & \text{if } x \leq a^k + 1/2, \\ B_1^k \lfloor B/S \rfloor - 1 & \text{if } x > a^k + 1/2 \end{cases}$$

のように書き換えることができる。よって

$$a^{k+1} = \begin{cases} B \left(\frac{S_1^{k+1}}{S} - \frac{B_1^{k+1}}{B} - \frac{1}{4B} \right) = B \left(\frac{S_1^k}{S} - \frac{1}{S} - \frac{B_1^k}{B} - \lfloor B/S \rfloor - \frac{1}{4B} \right) = a^k - x & \text{if } x \leq a^k + 1/2, \\ a^k + (1-x) & \text{if } x > a^k + 1/2 \end{cases}$$

である。我々は二つのケースを考えることによって我々の主張の証明を完了する。

ケース 1: $x \leq 1/2$.

この場合、ダイナミクスは $a^k > 0$ であるときは常に $a^{k+1} = a^k - x$ である。よって我々は、 $k = 1 + \lceil \frac{\alpha_1 - x}{x} \rceil < 2 + 1/x \leq 1 + 2\varepsilon$ に対して $a^k \in [-1/2, 0)$ を得る。

ケース 2: $x > 1/2$.

もし $a^1 \in [-1/2, 0]$ ならば、 (S_1^1, B_1^1) は所望の性質を有する。もし $a^1 \in [x - 1/2, 1/2)$ ならば、 $a^2 = a^1 - x \in [-1/2, 0]$ なので、 (S_1^2, B_1^2) が所望の性質を有する。最後に、もし $a^1 \in (0, x - 1/2)$ ならば、 $a^2 = a^1 + 1 - x$ 、および $a^j \in (0, x - 1/2)$ なる任意の j に対して $a^{j+1} = a^j + 1 - x$ となる。よって、 $a^{1 + \lceil (x - 1/2 - a^1)/(1-x) \rceil} \in (x - 1/2, 1/2)$ となる。ゆえに、 $k = 2 + \lceil (x - 1/2 - a^1)/(1-x) \rceil \leq 2 + \lceil 1/2(1-x) \rceil \leq 3 + 1/2\varepsilon$ について、 (S^k, B^k) は所望の性質を有する。

補題の主張は、 (S_1, B_1) が 4 つの性質を有することを要求する (k_1, k_2, k_3 および k_4 のある選択を所与として、それらの性質は一様に成立する)。

これらの性質の第一は $B_1/B \in [\underline{\alpha}, 1 - \underline{\alpha}]$ である。 $k \leq 3 + 1/\varepsilon$ に対して $B_1 \in [B_1^0 - k \lfloor B/S \rfloor, B_1^0]$ となることは構成から直ちに従う。 $B_1^0/B \leq 1 - \underline{\alpha}$ という事実は、 $B_1^1/B \leq 1 - \underline{\alpha}$ を導く。 $\alpha \geq 1/2$ を所与として、我々は $B_1/B \geq 1/2 - 1/B - (3 + 1/\varepsilon)(1/S + 1/B)$ を得る。これは、適切な k_1 および k_2 の選択を所与として、 $B > k_1 + k_2/\varepsilon$ であるとき $\underline{\alpha}$ よりも大きい。

第二の性質は、 $|S_1/S - B_1/B| < 1/4B$ ということである。我々は (S_1, B_1) を選んだので、これが成立する。

第三の性質は、 $|B_1/B - \alpha B| < (k_3 + k_4/\varepsilon)(1/B)$ ということである。次のことから、我々は k_3 および k_4 を選ぶことができるので、これは真であることが従う。即ち $k \leq 3 + 1/\varepsilon$ について $B_1 \in [B_1^0 - k \lfloor B/S \rfloor, B_1^0]$ であることから上述の内容が成立する。上限は $B_1/B \leq B_1^0/B \leq \lceil \alpha B/B \rceil < \alpha + 1/B$

を与える。下限は $B_1/B < \alpha - 1/B - (3 + 1/\varepsilon)([B/S])$ を与える。 $[B/S] < 2(B/S)$ を用いることで、これは、 $k_3 = 7$ および $k_4 = 2$ について、 $\alpha - (k_3 + k_4/\varepsilon)(1/B)$ よりも大きくなる。

第四の性質についての議論は同様であるが、より容易である。なぜならば $S_1^k = S_1^1 - (k - 1)$ だからである。

以上で補題 3 の証明が完了する。これはまた定理も証明する。■

図 2 補題 3 の例

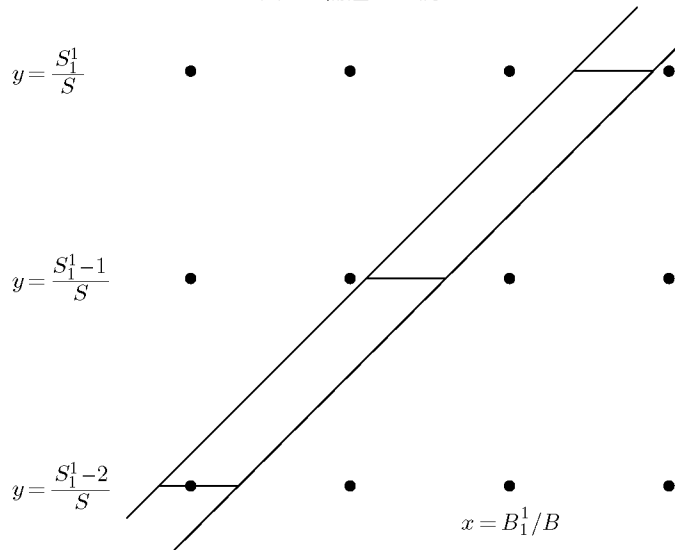


図 2 は補題 3 のある直観を提供する。それは格子 $\{(x, y) : \exists B_1, S_1 \text{ with } x = B_1/B, y = S_1/S\}$ を通過している平行四辺形 $\{(x, y) : x \in [\alpha, 1 - \alpha], |y - x| < 1/4B\}$ の拡大された展望を示す。平行四辺形は、隣接した x の間の隙間の半分の幅である。そのため、所与の y の値に対して、平行四辺形は任意の格子点を横切る必要がない。例えば、上の行格子では、平行四辺形は $(B_1^1/B, S_1^1/S)$ と $((B_1^1 + 1)/B, S_1^1/S)$ の間を通過している。 B/S は整数ではないので、異なる y の値において平行四辺形は格子に関連して動かされる。図は $B/S = 1.3$ としているので、交点は y が $(S_1^1 - 1)/S$ に減少するとき 1.3 格子点だけ左にずれる。これは、任意の隣り合う三つの行において平行四辺形が少なくとも一度格子と交叉することを導く。 B/S が整数から ε 離れているとき、連続する交点を有することがない行の数はより大きくなるが、まだ $1 + 1/2\varepsilon$ によって上から抑えられる。

我々の定理は、売り手の買い手に対する比率（および買い手の売り手に対する比率）が整数に余りに近いということがないときは常に我々が真の均衡のプラトーを得ることを示す。前節の例は 1 であった。但し、 S_n/B_n は n が増加するにつれてより 1 に近付いた。整数と正確に等しいことではなく、整数への接近が非存在を導くことができる。もし買い手対売り手比率が整数に正確に等しいな

らば、定理 2 と同様のものが成立するだろう。そして、実際、我々は更に強い結果を得るだろう。即ち、特定の範囲における任意の S_1 に対して、正確な均衡が存在するだろう⁽⁹⁾。我々はまた、買い手対売り手比率を整数に接近させることは分割された市場均衡の非存在を常に導く訳ではないことに注意すべきである。例えば、任意の n に対して $S_n + B_n$ が偶数であるという条件の下で、 $S_n/B_n \rightarrow 1$ のときでさえ均衡のプラトーが存在するだろう。なぜならばそれは我々に、準均衡の平行四辺形の中において整数の組を見つけ出すことを許すからである。

5. 均衡集合の密度

本節では、我々は有限ラージ・エコノミーについての均衡集合の特徴付けを行う。大雑把にいえば、我々は多くのラージ・エコノミーにおいて均衡集合は広範なプラトーを満たすことを示し、そのプラトーにおいて均衡の密度を特徴付ける。更に、より小さな市場における主体の割合が少なくとも α^* であるとき密度が可能な限り大きくなるような、 γ に依存したある $\alpha^{**} < 1/2$ が存在する。もし買い手よりもより少ない売り手が存在するならば、 $(S\alpha^{**}, S(1 - \alpha^{**}))$ に属する本質的にすべての整数 S_1 に対して、市場 1 において S_1 人の売り手がいるような均衡が存在する。もし売り手よりも少ない買い手が存在するならば、 $(B\alpha^{**}(\gamma), B(1 - \alpha^{**}(\gamma)))$ に属する本質的にすべての整数 B_1 に対して、市場 1 において B_1 人の売り手がいるような均衡が存在する。より正確に言えば、我々の定理はこのタイプの二つの結果を提供する。第一の結果は、 S_n/B_n がある無理数に収束するような任意の経済の点列 $\{B_n, S_n\}$ を所与として、 $n \rightarrow \infty$ のとき均衡のプラトーの幅とそこにおける均衡の密度が我々が同一視する関数に収束することを示す。第二は、次のことを示す。即ち、もし非原子的な分布から無作為抽出に接近させることで買い手の売り手に対する比率を選択することによってラージ・エコノミーが無作為に選ばれたならば、買い手の数が増加するにしたがい、均衡の集合が極限によって特徴付けられたものの ε 近傍に入るだろう確率は 1 に収束する。

証明は超準解析を用いるが、定理 3 の主張は完全に標準的で、超準解析の一切の知識なしで理解できるものである。補題の主張は超準解析を伴う。超準的な各主張の前に、我々は主張の背後にある直観を与える。これは超準解析に不慣れな読者を助けるためである。同様に、各証明の前に、我々は超準的な証明の背後にある直観のアウトラインを与える。

以下の定義において、 $\mathcal{N}(B, S)$ は本質的には次の条件を満たす B_1 の集合である。その条件とは、 B 人の買い手と S 人の売り手からなるモデルにおいて市場 1 に B_1 人の買い手がいるような均衡が存在することである⁽¹⁰⁾。

(9) もし $S \leq B$ ならば、これは真である。 $B \leq S$ のとき、先述の範囲における任意の B_1 に対して正確な均衡が存在するだろう。

(10) $\mathcal{N}(B, S)$ は、条件 2 があるため、実際のところここで説明したものより僅かに小さい集合である。

定義 1 $\mathcal{N}(B, S)$ を次の二つの条件を満たす $S_1 \in \{0, 1, \dots, S\}$ が存在するようなすべての $B_1 \in \{0, 1, \dots, B\}$ の集合とする。その条件とは、

1. B 人の買い手と S 人の売り手からなる市場が市場 1 に B_1 人の買い手と S_1 人の売り手がいるような Nash 均衡を持ち、
2. もし $S_2 = S - S_1$, $B_2 = B - B_1$ と定義するならば、

$$\left\{ \frac{S_1}{B_1}, \frac{S_2}{B_2}, \frac{S_1 + 1}{B_1}, \frac{S_2 + 1}{B_2}, \frac{S_1}{B_1 + 1}, \frac{S_1}{B_2 + 1} \right\} \subset \Gamma$$

が成立する

ことである。

次の定義は、各 γ に対して、 $\alpha = 1/2$ を含む開区間上で厳密に正であるような α の区分線形関数を明示する。我々は、集合 $\mathcal{N}(B, S)$ の密度がこの区分線形関数に収束することを後で見る。

定義 2

$$\begin{aligned} T(\gamma) &= \frac{G_s(\gamma)}{F'_s(\gamma)} - \frac{G_b(\gamma)}{F'_b(\gamma)}, \\ \alpha^*(\gamma) &= \max \left\{ 0, \frac{1}{2} - \frac{\gamma + 1}{2|1 + \gamma - 2T(\gamma)|} \right\}, \\ \alpha^{**}(\gamma) &= \max \left\{ 0, \frac{1}{2} - \frac{|\gamma + 1|}{2|1 + \gamma - 2T(\gamma)|} \right\}, \\ H(\alpha, \gamma) &= \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha \in [0, \alpha^*(\gamma)], \\ \frac{(\alpha - \alpha^*(\gamma)) \min\{1, \gamma\}}{\alpha^{**}(\gamma) - \alpha^*(\gamma)} & \text{if } \alpha \in (\alpha^*(\gamma), \alpha^{**}(\gamma)), \\ \min\{1, \gamma\} & \text{if } \alpha \in [\alpha^{**}(\gamma), 1 - \alpha^{**}(\gamma)], \\ \frac{(1 - \alpha - \alpha^*(\gamma)) \min\{1, \gamma\}}{\alpha^{**}(\gamma) - \alpha^*(\gamma)} & \text{if } \alpha \in (1 - \alpha^{**}(\gamma), 1 - \alpha^*(\gamma)), \\ 0 & \text{if } \alpha \in [1 - \alpha^{**}(\gamma), 1] \end{cases} \quad (5) \end{aligned}$$

と定義する。

もし $S_1/B_1 \notin \Gamma$ または $S_2/B_2 \notin \Gamma$ であるか、あるいは一人のプレイヤーによる移動の結果そのプレイヤーの新しい市場における買い手に対する売り手の比率が Γ の外となるならば、仮定 1 は我々に利得上の操作を与えない。そしてそれによって、仮定 1 は所与の組 (B_1, S_1) が均衡でないことを証明することを不可能にする。我々が特定した集合は均衡の集合程大きくないので、 Γ の外の比率を伴う均衡を含めたすべての均衡の集合の密度は定理 3 で示唆されるものと比べて少なくとも同程度には大きくなるだろう。

我々の定理は、均衡プラトーを通しての均衡の局所的密度を特徴付ける。定理の主張を単純化するため、特徴付けの対象を初めに定義する。

定義 3 経済 $\{B, S\}$ と $B\varepsilon > 1$ となる $\varepsilon > 0$ を所与とするとき、経済の「 α における均衡の ε -局所的密度」を、

$$H_\varepsilon(B, S, \alpha) \equiv \text{Prob}\{B_1 \in \mathcal{N}(B, S) : B_1 \in \mathbf{N}, |B_1/B - \alpha| < \varepsilon\}$$

によって定義する。ここで確率は、制約 $|B_1/B - \alpha| < \varepsilon$ を満たすすべての整数 B_1 上の一様分布関数についてのものである。

定理 3 仮定 1 が成立し、 $B_n \in \mathbf{N}$, $B_n \rightarrow \infty$, $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ および $\varepsilon_n B_n \rightarrow \infty$ であるとする。このとき、次の二つの主張が成立する。

1. もし S_n が $S_n/B_n \rightarrow \gamma \in (\underline{\gamma}, \bar{\gamma}) \setminus \mathbf{Q}$ であるような正の整数の点列であるならば、 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} |H_{\varepsilon_n}(B_n, S_n, \alpha) - H(\alpha, \gamma)| \rightarrow 0$$

が成立する。

2. γ_n は同じ分布に従ったそれぞれ独立な確率変数で、その共通の分布は Lebesgue 測度について絶対連続かつその台 (support) が Γ に含まれるとし、 $S_n = \lfloor \gamma_n B_n \rfloor$ とする。このとき $n \rightarrow \infty$ とすると

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} |H_{\varepsilon_n}(B_n, S_n, \alpha) - H(\alpha, \gamma_n)| \rightarrow 0 \quad \text{in probability}$$

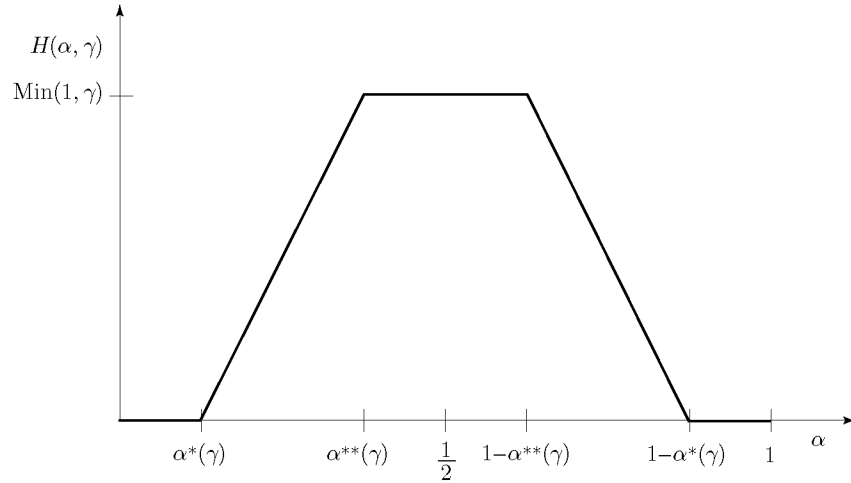
が成立する。即ち、各 $\delta > 0$ に対して、ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し、各 $n > N$ に対して

$$P \left(\sup_{\alpha \in [0,1]} |H_{\varepsilon_n}(B_n, S_n, \alpha) - H(\alpha, \gamma_n)| > \delta \right) < \delta$$

が成立する。

図 1 では EMF の $S/B = 1/2$ であるような競争的オークションを考えた。図 3 は、その応用に関する関数 $H(\alpha, \gamma)$ のグラフを描いている。この場合、我々は $\alpha^*(\gamma) = 1/8$, $\alpha^{**}(\gamma) = 3/8$ および $\text{Min}(1, \gamma) = 1/2$ という結果を得る。よって、買い手と売り手の数が大きいとき、均衡集合はおおよそ $1/8$ から $7/8$ の間に範囲を有するような B_1/B を伴った二つの活動的市場を伴う均衡を含む。 $3/8$ と $5/8$ の間の α の値に対して均衡集合は $1/2$ の最大密度を達成する。これはこの値域における B_1 のおおよそ半分に対して真の均衡が存在することを意味する。買い手の半分だけの量の売り手がいるので、これは $\frac{3}{8}S$ と $\frac{5}{8}S$ の間のほとんど任意の S_1 に対して均衡が存在することを意味する。

図3 均衡の密度関数 $H(\alpha, \gamma)$



定理を証明する前に、我々は幾つかの記号と二つの補題を初めに必要とする。我々は次のことを終始仮定する。即ち、 $B_1, B_2, S_1, S_2 \in \mathbf{N}$, $B_1 + B_2 = B$, $S_1 + S_2 = S$, $\gamma_1 = S_1/B_1$, $\gamma_2 = S_2/B_2$, および $\alpha_1 = B_1/B$ と仮定する。補題と定理の証明は超準解析を利用する。 ${}^*\mathbf{N}$ を超準非負整数の集合とする。これにより、各 $n \in {}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ は超準自然数を無限に含む集合である。任意の有限超準自然数 α を所与として、 ${}^\circ\alpha$ を α の標準部分、即ち、 α に限りなく近い唯一の標準的実数とする。我々は $x \simeq y$ と書くことによって $x - y$ が無限小であることを表す。

我々の最初の補題、補題 4 は、均衡集合の上限を決める。大雑把に言えば、もし B が大きいならば、任意の均衡において $S_1/B_1 \simeq S/B$ でなければならない。より形式的には、それは次の標準的な主張と同値である。即ち、

S_n 人の売り手と B_n 人の買い手からなるモデルの列を考えると、 $S_n \rightarrow \infty$ かつ $B_n \rightarrow \infty$ であるとする。 $S_{n1}, B_{n1} \in \mathbf{N}$, $S_{n1} \leq S_n$, $B_{n1} \leq B_n$ とする。ある $\varepsilon > 0$ が存在し、任意の n に対して、 $S_n/B_n \in [\underline{\gamma} + \varepsilon, \bar{\gamma} - \varepsilon]$ および $B_{n1}/B_n \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ が成立するとする。 S_n/B_n を γ_n と、 S_{n1}/B_{n1} を γ_{n1} と表記することとする。このとき、もし $B_n |\gamma_{n1} - \gamma_n| \rightarrow \infty$ ならば、ある N が存在し、任意の $n > N$ に対して、 S_n 人の売り手と B_n 人の買い手からなるモデルは、市場 1 に B_{n1} 人の買い手と S_{n1} 人の売り手がいるような均衡を持たない。

証明のために、売り手の買い手に対するの比率がより大きい市場にいる買い手を考える。その買い手がいる市場を、一般性を失うことなく、市場 1 と仮定する。任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $F'_s(\gamma) < 0$ であり、また Γ はコンパクトなので、 $F'_s(\gamma)$ はゼロから離れて一様に抑えられている。平均値定理によって、市場 2 への変更における売り手の利益は $(\min_{\gamma \in \Gamma} |F'_s(\gamma)|)(\gamma_{n2} - \gamma_{n1}) > 0$ によって下から抑えられた項を含む。この項は、 $B_n |\gamma_{n1} - \gamma_n| \rightarrow \infty$ なので、他の項よりも支配的である。そし

て売り手は市場を変更することにより利益を得る。

補題4 $S, B \in {}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$, ${}^\circ\gamma \in (\underline{\gamma}, \bar{\gamma})$, および ${}^\circ\alpha_1 \in (0, 1)$ とする。このとき, もし $\gamma_1 \neq \gamma + O(1/B_1)$ ならば, 市場1に B_1 人の買い手と S_1 の売り手がいるような均衡は存在しない。

補題4の証明

我々は一般性を失うことなく $\gamma_1 > \gamma_2$ と仮定する。市場1から市場2への変更を考えている売り手を考える。この変更による売り手の利得の変化は

$$\begin{aligned} & F_s\left(\gamma_2 + \frac{1}{B_2}\right) - \frac{G_s\left(\gamma_2 + \frac{1}{B_2}\right)}{B_2} - F_s(\gamma_1) + \frac{G_s(\gamma_1)}{B_1} + o\left(\frac{1}{B_1}\right) \\ & \geq \max\{F'_s(\gamma') : \gamma' \in \Gamma\}\left(\gamma_2 - \gamma_1 + \frac{1}{B_2}\right) + O\left(\frac{1}{B_1}\right) \\ & > 0 \end{aligned}$$

となる。但し, ${}^\circ\gamma_1 \in (\underline{\gamma}, \bar{\gamma})$ および ${}^\circ\gamma_2 \in (\underline{\gamma}, \bar{\gamma})$ である。これは市場1に B_1 人の買い手と S_1 の売り手がいるような均衡が存在しないことを示している。■

直前の補題は次の観察事実を形式化する。即ち, 準均衡の「菱形」は経済が拡大するときより平坦になるので $\gamma_{n1} \not\approx \gamma_n$ となる二つの市場間の主体のスプリットは均衡を与えない。次のステップは, $\gamma_{n1} \approx \gamma_n$ となるスプリットが誘因制約と両立することを特徴付けることである。EF は, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ と仮定して, 誘因両立性のための十分条件を与えた。次の補題は, 直前の補題と整合的な任意の γ_1 を考えることによって, EFの結果に改良を加える。

次の超準的な補題は, むしろ複雑な, 次の通常の主張と同値である。

S_n 人の売り手と B_n 人の買い手からなるモデルの列を考えるとする。ここで $S_n \rightarrow \infty$ かつ $B_n \rightarrow \infty$ とする。 $S_{n1}, B_{n1} \in \mathbf{N}$, $S_{n1} \leq S_n$, $B_{n1} \leq B_n$ とする。 S_n/B_n を γ_n によって, S_{ni}/B_{n1} を γ_{ni} によって, そして B_{ni}/B_n を $\hat{\alpha}_{ni}$ によって表記する。ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の n に対して $\gamma_n \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}]$ および $\hat{\alpha}_{n1} \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ が成立するとする。パート1では, 次のことが述べられる。即ち, もし点列 $\{B_n|\gamma_{n1} - \gamma_n|\}$ が一様有界かつ $\delta > 0$ ならば, S_{nm}/B_{nm} が極限 γ に収束するような各部分列 n_m に対して, ある N が存在して,

$$(S_{n_m1} - \gamma B_{n_m1}) - \frac{G_s(\gamma)(1 - 2\hat{\alpha}_{n_m1})}{F'_s(\gamma)} \in (\hat{\alpha}_{n_m1} - 1 + \delta, \hat{\alpha}_{n_m1} - \delta)$$

かつ

$$(S_{n_m1} - \gamma B_{n_m1}) - \frac{G_b(\gamma)(1 - 2\hat{\alpha}_{n_m1})}{F'_b(\gamma)} \in (-\hat{\alpha}_{n_m1}\gamma + \delta, (1 - \hat{\alpha}_{n_m1})\gamma - \delta)$$

であり、また $n_m > N$ であるときはいつでも、市場 1 に B_{n_m1} 人の買い手と S_{n_m1} 人の売り手がいるような均衡が存在する。パート 2 では、次のことが述べられる。任意の n に対して、 $\gamma_{n1} \in [\underline{\gamma} + \varepsilon, \bar{\gamma} - \varepsilon]$ かつ $\gamma_{n2} \in [\underline{\gamma} + \varepsilon, \bar{\gamma} - \varepsilon]$ であるとする。このとき各 $\delta > 0$ および S_{n_m}/B_{n_m} が極限 γ に収束するような各部分列 n_m に対して、ある N が存在して、

$$(S_{n_m1} - \gamma B_{n_m1}) - \frac{G_s(\gamma)(1 - 2\hat{\alpha}_{n_m1})}{F'_s(\gamma)} \notin (\hat{\alpha}_{n_m1} - 1 + \delta, \hat{\alpha}_{n_m1} - \delta)$$

または

$$(S_{n_m1} - \gamma B_{n_m1}) - \frac{G_b(\gamma)(1 - 2\hat{\alpha}_{n_m1})}{F'_b(\gamma)} \notin (-\hat{\alpha}_{n_m1}\gamma + \delta, (1 - \hat{\alpha}_{n_m1})\gamma - \delta)$$

であり、また $n_m > N$ であるときはいつでも、市場 1 に B_{n_m1} 人の買い手と S_{n_m1} 人の売り手がいるような均衡は存在しない。

補題 5 の超準的な証明は補題 1 の直接的な適用となる。標準的な主張における複雑さは、 N が δ と部分列 n_m の両方に依存することに由来する。そして標準的な証明は、主張における $\gamma_n = S_n/B_n$ を γ へ変化させるために γ_n の γ への収束を用いなければならない。

補題 5 $S, B \in {}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$, ${}^\circ\gamma \in (\underline{\gamma}, \bar{\gamma})$ および ${}^\circ\alpha_1 \in (0, 1)$ とする。このとき次の二つの主張が成立する。

1. もし $\gamma_1 = \gamma + O(1/B_1)$ であり、

$${}^\circ(S_1 - \gamma B_1) - \frac{G_s({}^\circ\gamma)(1 - 2{}^\circ\alpha_1)}{F'_s({}^\circ\gamma)} \in ({}^\circ\alpha_1 - 1, {}^\circ\alpha_1) \quad (6)$$

かつ

$${}^\circ(S_1 - \gamma B_1) - \frac{G_b({}^\circ\gamma)(1 - 2{}^\circ\alpha_1)}{F'_b({}^\circ\gamma)} \in (-{}^\circ\alpha_1{}^\circ\gamma, (1 - {}^\circ\alpha_1){}^\circ\gamma) \quad (7)$$

ならば、市場 1 に B_1 人の買い手と S_1 人の売り手がいるような均衡が存在する。

2. 次の二つが成立しているとする。

$${}^\circ\left(\frac{S_1}{B_1}\right) \in (\underline{\gamma}, \bar{\gamma}) \quad \text{および} \quad {}^\circ\left(\frac{S_2}{B_2}\right) \in (\underline{\gamma}, \bar{\gamma})$$

もし $\gamma_1 = \gamma + O(1/B_1)$ であり、

$${}^\circ(S_1 - \gamma B_1) - \frac{G_s({}^\circ\gamma)(1 - 2{}^\circ\alpha_1)}{F'_s({}^\circ\gamma)} \notin ({}^\circ\alpha_1 - 1, {}^\circ\alpha_1)$$

あるいは

$${}^\circ(S_1 - \gamma B_1) - \frac{G_b({}^\circ\gamma)(1 - 2{}^\circ\alpha_1)}{F'_b({}^\circ\gamma)} \notin (-{}^\circ\alpha_1{}^\circ\gamma, (1 - {}^\circ\alpha_1){}^\circ\gamma)$$

ならば、市場 1 に B_1 人の買い手と S_1 人の売り手がいるような均衡が存在する。

補題 5 の証明

パート 1 の証明のために、

$$\begin{aligned} & \circ\gamma \in (\underline{\gamma} + \varepsilon, \bar{\gamma} - \varepsilon), \\ & \circ(S_1 - \gamma B_1) - \frac{G_s(\circ\gamma)(1 - 2\circ\alpha_1)}{F'_s(\circ\gamma)} \in (\circ\alpha_1 - 1 + \varepsilon, \circ\alpha_1 - \varepsilon), \\ & \circ(S_1 - \gamma B_1) - \frac{G_s(\circ\gamma)(1 - 2\circ\alpha_1)}{F'_s(\circ\gamma)} \in (-\circ\alpha_1 \circ\gamma + \varepsilon, (1 - \circ\alpha_1) \circ\gamma - \varepsilon) \end{aligned}$$

であるような $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$ を我々は見出すだろう。補題 1 の結果を満たしている \underline{B} を見つけよう。 G_s, F'_s, G_b, F'_b は連続なので、

$$\begin{aligned} & \gamma \in {}^*(\underline{\gamma} + \varepsilon, \bar{\gamma} - \varepsilon) = {}^*\Gamma_\varepsilon, \\ & (S_1 - \gamma B_1) - \frac{G_s(\gamma)(1 - 2\alpha_1)}{F'_s(\gamma)} \in {}^*(\alpha_1 - 1 + \varepsilon, \alpha_1 - \varepsilon), \\ & (S_1 - \gamma B_1) - \frac{G_s(\gamma)(1 - 2\alpha_1)}{F'_s(\gamma)} \in {}^*(-\alpha_1 \gamma + \varepsilon, (1 - \alpha_1)\gamma - \varepsilon) \end{aligned}$$

が成立する。 $\circ\alpha_1 \in (0, 1)$, $B_1, B_2 \in {}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ なので、 $B_1, B_2 > \underline{B}$ である。よって我々は補題 1 の仮説の移転を確認した。移転原理 (Transfer Principle) によって、補題 1 の移転が成立するので、補題 1 の移転の結論が成立する。しかしこの結論は、市場 1 に B_1 人の買い手と S_1 人の売り手がいるような準均衡が存在することを云うのみである。ここで $B_1, B_2, S_1, S_2 \in {}^*\mathbf{N}$ なので、この準均衡は均衡である。パート 2 の証明は、パート 1 と同様である。■

注意. 直前の補題は、誘因制約と整合的な、各市場に割り当てられた主体の配分を特徴付けている。結果は仮定 1 によって提供された効用関数の近似を用いているので、次のことに注意することは興味深いことである。即ち、それは EFM が彼らのオークションモデルにおいて適切な効用関数を用いて得た解の範囲を厳密に与えるということである。

定理 3 の主張は標準的なものである。しかし、証明は超準的なものによる。標準的な方法で証明を行う場合、非常に複雑な $\varepsilon - \delta$ 論法を用いる必要があるだろう。ここで、証明における我々の主なアイデアを略述しておく。補題 4 は、極限において、 $\gamma_{n1} = S_{n1}/B_{n1}$ が $\gamma_n = S_n/B_n$ から $O(1/B_{n1})$ の範囲内には限り均衡は存在しないことを示した。補題 5 は、 $\gamma_{n1} = S_{n1}/B_{n1}$ が $O(1/B_{n1})$ 以内であれば、極限において均衡が存在するか否かは、 $S_{n1} - \gamma_n B_{n1}$ と $\alpha_{n1} = B_{n1}/B_n$ との関係によって決まることを示した。準均衡集合の特徴付けにおいて我々が

$$T(\gamma) = \frac{G_s(\gamma)}{F'_s(\gamma)} - \frac{G_b(\gamma)}{F'_b(\gamma)}$$

と定義したことを思い出して欲しい。補題 5 における均衡が存在するための二つの条件は共に、十分大きな n に対して、もし $S_{n1} - \gamma_n B_{n1}$ が、区間

$$[(\alpha_{n1} - 1, \alpha_{n1}) + T(\gamma_n)(1 - 2\alpha_{n1})] \cap (-\alpha_{n1}\gamma_n, (1 - \alpha_{n1})\gamma_n) \quad (8)$$

に極めて近い区間に属するならば、 $(S_{n1}, S_{n2}, B_{n1}, B_{n2})$ が均衡となることを導く。(8) 式の右辺上の二つの区間の共通部分が長さ $H(\alpha_{n1}, \gamma_n)$ を有することが little algebra によって示される。

所与の B_{n1} に対して均衡が存在することの必要十分条件は、ある整数 S_{n1} が存在し、 $S_{n1} - \gamma_n B_{n1}$ がこの区間に入ることである。 α における ε_n 均衡密度は、上述の条件を満たすような S_{n1} が存在し、かつ $|B_{n1}/B_n - \alpha| < \varepsilon$ なる B_{n1} の割合である。

$r(x) = x - [x]$ によってリマインダー関数 $r : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ を定義する。 $K_n = [\varepsilon_n B_n]$, $\mathbf{K}_n = \{-K_n, -K_n + 1, \dots, K_n\}$ とする。所与の $k \in \mathbf{K}_n$ に対して、 $B_{nk} = [k\alpha B_n]$ および $\alpha_{nk} = B_{nk}/B_n$ とする。これらは、 B_{n1}/B_n が α に近いような B_{n1} の論理的に可能な選択肢である。区間 $[\alpha_{nk} - 1, \alpha_{nk})$ は長さ 1 を有するので、各 k に対して、整数 S_{nk} が唯一厳密に存在して、

$$S_{nk} - \gamma_n B_{nk} - \frac{G_s(\gamma_n)(1 - 2\alpha_{nk})}{F'_s(\gamma_n)} \in [\alpha_{nk} - 1, \alpha_{nk}) \quad (9)$$

が成立する。所与の $k \in \mathbf{K}_n$ に対して均衡が存在するだろうための必要十分条件は、小さい δ から離れて、 B_{nk} および (9) 式を満たす唯一の S_{nk} に対して (8) 式が満たされていることである。ある代数はこの条件を $r(\gamma_n B_{nk})$ についての条件に変える。 $B_{n(k+1)} = B_{nk} + 1$ なので、 $r(\gamma_n B_{n(k+1)k}) = r(\gamma_n B_{nk}) + \gamma_n \pmod{1}$ が成立する。パート 1 の仮定によって、ある無理数 $\gamma \in (\underline{\gamma}, \bar{\gamma})$ に対して、 $\gamma_n \rightarrow \gamma$ となる。 γ は無理数なので、よく知られていて、また示すことが難しいことだが、 $r(\gamma B_{nk})$ が任意の与えられた区間に入っているような比率 $k \in \mathbf{K}_n$ はその区間の長さ収束する。これについては、例えば Dunford and Schwartz [3] のエキササイズ VII.8.9 を見よ。⁽¹¹⁾エルゴード定理における収束の割合および所与の分母の有理数によって近似されることが出来る無理数における比率についての $\varepsilon - \delta$ 論法は、もしパート 1 を証明した γ_n によって γ を置き換えるならば、同じ結果を導く。

パート 2 の結果は、標準的な議論によってパート 1 の結果から導き出すことができる。これを確認するために、 $x \in \Gamma$ に対して $Y_n(x) = \sup_{\alpha} |H_{\varepsilon_n}(B_n, [xB_n], \alpha) - H(\alpha, x)|$ と置く。パート 1 の結果

(11) これはエルゴード定理の非常に特殊なケースである。 γ が無理数であるとき、 $\gamma \pmod{1}$ による平行移動は、 $[0, 1)$ から $[0, 1)$ へのエルゴード的かつ測度保存的変換 (measure-preserving transformation) となる。即ち、もし可測集合 V が $V + \gamma = V \pmod{1}$ を満たすならば、 V の測度は 0 か 1 のどちらかであり、任意の可測集合 $W \subset [0, 1)$ に対して、 $W - \gamma \pmod{1}$ は W と同じ測度を有する。もし γ が有理数ならば、共通の約数を持たない整数 a と b によって $\gamma = a/b$ と書くことに注意せよ。このとき $\gamma \pmod{1}$ による平行移動は、エルゴード的ではない。それは次のような理由による。もし $W = [0, 1/2b) \cup [1/b, 3/2b) \cup \dots \cup [1 - 1/b, 1 - 1/2b)$ ならば、 $W + \gamma = W \pmod{1}$ である。 W の測度は $1/2$ なので、 $\gamma \pmod{1}$ の平行移動はエルゴード的でない。

より, x が無理数であるときはいつでも $\lim Y_n(x) = 0$ となるので, ほとんど至るところで $Y_n(x) \rightarrow 0$ となる。 Γ はコンパクトなので, このことは $Y_n(x)$ が 0 に測度収束することを導く。確率変数 γ_n の共通の分布は Lebesgue 測度について絶対連続なので, $\sup_\alpha |H_{\varepsilon_n}(B_n, [xB_n], \alpha) - H(\alpha, x)|$ は 0 に確率収束する。

定理 3 の証明

定理の仮定を満たす三つの点列 S_n, B_n, ε_n を考える。任意の $n \in {}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ を選んで固定する。 $S = S_n, B = B_n, \hat{\gamma} = S_n/B_n, \varepsilon = \varepsilon_n, K = \lfloor \varepsilon_n B_n \rfloor$ および $\mathbf{K} = \{-K, -K+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, K-1, K\}$ とする。 $B \in {}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ であることに注意せよ。そのため, $S \geq \underline{\gamma}B \in {}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ となる。また, パート 1 では ${}^\circ\hat{\gamma} = \gamma \in (\underline{\gamma}, \bar{\gamma}) \setminus \mathbf{Q}$ であることに注意せよ。パート 2 では, Loeb 確率 1 で ${}^\circ\hat{\gamma} = \gamma \in (\underline{\gamma}, \bar{\gamma}) \setminus \mathbf{Q}$ であることに注意せよ。よって我々は差し当たり ${}^\circ\hat{\gamma} = \gamma \in (\underline{\gamma}, \bar{\gamma}) \setminus \mathbf{Q}$ と仮定し, その仮定からの結果について検討する。

$\alpha \in {}^*[0, 1]$ に対して, $L(\alpha)$ によって次の集合

$$[(\alpha - 1, \alpha) + T(\hat{\gamma})(1 - 2\alpha)] \cap (-\alpha\hat{\gamma}, (1 - \alpha)\hat{\gamma})$$

の Lebesgue 測度を表す。 L は α について区分線形で, $L(1/2) = \min\{1, \hat{\gamma}\}$ であることに注意せよ。二つの区間 $[(\alpha - 1, \alpha) + T(\hat{\gamma})(1 - 2\alpha)]$ および $(-\alpha\hat{\gamma}, (1 - \alpha)\hat{\gamma})$ は長さ 1 および $\hat{\gamma}$ であり, それらは共に $\alpha_1 = 1/2$ のとき 0 を中心とする。最初の区間は, α における変化に対応して傾き $1 - 2T(\hat{\gamma})$ で線形に移動する。一方二つ目の区間は傾き $-\hat{\gamma}$ で移動する。そのため, 最初の区間の二つ目の区間から見た相対的な移動は, 最初の区間は, α における変化に対応して $1 + \hat{\gamma} - 2T(\hat{\gamma})$ を傾きとするような線形となる。相対的な移動の大きさが $|1 - \hat{\gamma}|/2$ と等しくなるとき, 即ち,

$$\alpha = \frac{1}{2} \pm \frac{|1 - \hat{\gamma}|}{2|1 + \hat{\gamma} - 2T(\hat{\gamma})|}$$

となるとき, 二つの区間は次第に入れ子状とならなくなる。相対的な移動の大きさが $1 + \hat{\gamma}/2$ と等しくなるとき, 即ち,

$$\alpha = \frac{1}{2} \pm \frac{1 - \hat{\gamma}}{2|1 + \hat{\gamma} - 2T(\hat{\gamma})|}$$

となるとき, 二つの区間は次第に共通部分を持たなくなる。よって, 任意の $\alpha \in {}^*[0, 1]$ に対して,

$$L(\alpha) = {}^*H(\alpha, \hat{\gamma})$$

となる。

$\alpha \in {}^*[0, 1]$ を固定する。所与の $k \in \mathbf{K}$ に対して,

$$B_k = \lfloor \alpha B \rfloor + k \quad \text{および} \quad \alpha_k = \frac{B_k}{B}$$

とおく。 $r(x) = x - [x]$ によってリマインダー関数 $r : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ を表す。区間 $[\alpha_k - 1, \alpha_k)$ は長さ 1 なので、

$$S_k - \hat{\gamma}B_{\alpha_k} - \frac{G_s(\hat{\gamma})(1 - 2\alpha_k)}{F'_s(\hat{\gamma})} \in [\alpha_k - 1, \alpha_k)$$

であるような S_k が必ず一つ存在する。またこの S_k に対して我々は

$$\begin{aligned} & S_k - \hat{\gamma}B_k - \frac{G_s(\hat{\gamma})(1 - 2\alpha_k)}{F'_s(\hat{\gamma})} - \alpha_k + 1 \\ &= -^*r \left(\hat{\gamma}B_k - \frac{G_s(\hat{\gamma})(1 - 2\alpha_k)}{F'_s(\hat{\gamma})} - \alpha_k + 1 \right) \\ &\simeq -^*r \left(\hat{\gamma}B_k - \frac{G_s(\hat{\gamma})(1 - 2\alpha)}{F'_s(\hat{\gamma})} - \alpha + 1 \right) \\ & S_k - \hat{\gamma}B_k - \frac{G_b(\hat{\gamma})(1 - 2\alpha_k)}{F'_b(\hat{\gamma})} - \alpha_k + 1 \\ &= -^*r \left(\hat{\gamma}B_k - \frac{G_b(\hat{\gamma})(1 - 2\alpha_k)}{F'_b(\hat{\gamma})} - \alpha_k + 1 \right) \\ &\simeq -^*r \left(\hat{\gamma}B_k - \frac{G_b(\hat{\gamma})(1 - 2\alpha)}{F'_b(\hat{\gamma})} - \alpha + 1 \right) \end{aligned}$$

を得る。 $k_0 \in \mathbf{K}$ および $k \in \mathbf{N}$ に対して

$$\hat{\gamma}B_{k_0+k} = \hat{\gamma}B + \hat{\gamma}(k_0 + k) = \hat{\gamma}B_{k_0} + \hat{\gamma}k \simeq \hat{\gamma}B_{k_0} + \gamma k$$

なので、

$$\left\{ K_1 \in {}^*\mathbf{N} : \forall k_0 \in \mathbf{K} \forall k \in \{-K_1, -K_1 + 1, \dots, K_1 - 1, K_1\} |\hat{\gamma}B_{k_0+k} - \hat{\gamma}B_{k_0} + \gamma k| < \frac{1}{K_1}, K_1^2 < K \right\} \supseteq \mathbf{N}$$

となる。ここで描写した集合は内的であるので、スピルオーバー原理より、それは ${}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ の元を含む。よって我々は $k \in \mathbf{K}_1 = \{-K_1, -K_1 + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, K_1 - 1, K_1\}$ および $k_0 \in \mathbf{K}$ に対して $\hat{\gamma}B_{k_0+k_1} \simeq \hat{\gamma}B_{k_0} + \gamma k_1$ となるような $K_1 \in {}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$, $K_1/K \simeq 0$ を選び取るだろう。

${}^\circ\hat{\gamma}$ は無理数なので、Dunford and Schwartz [3] のエキササイズ VII.8.9 から次のことが導かれる。⁽¹²⁾ 即ち、任意の区間 $(a, b) \subset [0, 1)$ および任意の $k_0 \in \mathbf{K}$ に対して

$$\frac{|\{k \in \mathbf{K}_1 : {}^\circ r(\hat{\gamma}B_{k_0+k}) \in (a, b)\}|}{2K_1 + 1} \simeq b - a$$

が成立する。だから

$$\begin{aligned} & \frac{|\{k \in k_0 + \mathbf{K}_1 : B_k \in \mathcal{N}(B, S)\}|}{2K_1 + 1} \\ & \simeq \frac{|\{k \in k_0 + \mathbf{K}_1 : {}^\circ \left(S_k - \hat{\gamma}B_k - \frac{G_b(\hat{\gamma})(1 - 2\alpha)}{F'_b(\hat{\gamma})} + \alpha\gamma \right)\}|}{2K_1 + 1} \\ & \simeq L(\alpha) = {}^*H(\alpha, \hat{\gamma}) \simeq H({}^\circ\alpha, {}^\circ\hat{\gamma}) \end{aligned}$$

(12) 上述のように、これはエルゴード定理の非常に特殊なケースである。

が成立する。我々は \mathbf{K} を $k_0 + \mathbf{K}_1$ という形をした集合の和として書き表すので、

$${}^*H_\varepsilon(B, S, \alpha) = \frac{|\{k \in \mathbf{K} : B_k \in \mathcal{N}(B, S)\}|}{2K+1} \simeq H({}^\circ\alpha, {}^\circ\hat{\gamma})$$

となる。

さて α を ${}^*[0, 1]$ 上で変化させてみよう。我々は任意の $\alpha \in {}^*[0, 1]$ に対して、 H が連続であることから、

$$\begin{aligned} & |{}^*H_\varepsilon(B, S, \alpha) - {}^*H(\alpha, \hat{\gamma})| \\ & \leq |{}^*H_\varepsilon(B, S, \alpha) - H({}^\circ\alpha, {}^\circ\hat{\gamma})| + |H({}^\circ\alpha, {}^\circ\hat{\gamma}) - {}^*H(\alpha, \hat{\gamma})| \\ & \simeq 0 \end{aligned}$$

であることを示した。

パート 1 では、任意の $n \in {}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ に対して、 $\hat{\gamma} \simeq \gamma$ および $\varepsilon_n = \varepsilon$ となる。これより、 H が連続であることから、

$$\sup_{\alpha \in {}^*[0, 1]} |{}^*H_{\varepsilon_n}(B_n, S_n, \alpha) - {}^*H(\alpha, \gamma)| \simeq 0$$

となるので、

$$\sup_{\alpha \in [0, 1]} |H_{\varepsilon_n}(B_n, S_n, \alpha) - H(\alpha, \gamma)| \rightarrow 0$$

となる。これはパート 1 の結論である。

パート 2 では、任意の $n \in {}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ に対して、 $\hat{\gamma} = S_n/B_n = \lfloor \gamma_n B_n \rfloor / B_n \simeq \gamma_n$ となることに注意せよ。よって、 H が連続であることから、Loeb 確率が 1 である集合上で

$$\sup_{\alpha \in {}^*[0, 1]} |{}^*H_{\varepsilon_n}(B_n, S_n, \alpha) - {}^*H(\alpha, \gamma_n)| \simeq 0$$

を得る。これより任意の $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ に対して、

$${}^*P \left(\sup_{\alpha \in {}^*[0, 1]} |{}^*H_{\varepsilon_n}(B_n, S_n, \alpha) - {}^*H(\alpha, \gamma)| > \delta \right) < \delta$$

となる。この主張が真となる任意の n の集合は、内的でありかつ任意の $n \in {}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ を含むので、スピルオーバー原理によって、ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し、

$$n > N \implies P \left(\sup_{\alpha \in [0, 1]} |H_{\varepsilon_n}(B_n, S_n, \alpha) - H(\alpha, \gamma)| > \delta \right)$$

が成立する。これはパート 2 の結論である。■

6. 結 語

経済学の文献の多くでは、人口が非常に多い状況を連続体の主体を用いてモデル化することが習慣的となっている。Ellison and Fudenberg [4] は、二面的立地選択のモデルにおいては、連続による極限を用いることで、総数が多い有限人の主体を伴う均衡を確認することは難しいことを論じた。特に、彼らは次のことを注意した。即ち、連続体によって主体を近似した分析を行うとき完全偏在のみの帰結と見做せるようなある種の状況においては、帰結の幅広い範囲は非逸脱制約と整合的である。⁽¹³⁾ [4] は誘因制約のみを検討し、また各市場における各タイプの主体の数が整数でなければならないという制約を無視した。本稿では、離散的状況を完全に説明するように彼らの分析を拡張した。我々は、一般的なケースにおいて、EF において記述された「準均衡」集合を厳密に含むように均衡集合は区間を膨らませることを見つけた。しかしまた、均衡集合がより小さくなるような非一般的なケースを見つけた。先行研究の結果の拡張に加えて、本稿は離散的状況を説明することは非常に大きい経済を考慮する場合でさえ重要であるというメッセージを支持する。将来の研究に対しての一つの示唆は、他のクラスのモデルにおいて主体の離散性の含意を検討することである。もう一つは、ここで議論したタイプのモデルにおいて均衡選択について検討することである。これらのモデルは均衡の稠密なプラトーを持っていることを我々は知っている。より進んだ議論によって幾つかの均衡を他の均衡よりもより好ましいものと判別できるか否かについてより多くのことを知ることは興味深いことだろう。

付 録

補題 1 の証明

1 の証明。我々は S_1 , S_2 , B_1 および B_2 の 4 つの誘因整合性制約を考える必要がある。最初に、市場 1 から市場 2 への変更を考えている売り手を考える。変更による結果としての売り手の利得における変化は、 $o(1/B)$ のオーダーで $\Delta_{S_1} \equiv F_s \left(\gamma_2 + \frac{1}{B_2} \right) - \frac{G_s(\gamma_2 + \frac{1}{B_2})}{B_2} - F_s(\gamma_1) + \frac{G_s(\gamma_1)}{B_1}$ によって近似される。もし B_1 および B_2 が大きいとき、 Δ_{S_1} が負であり、また $O(1/B)$ の (あるいはより大きい) 項によってゼロから離れて抑えられているならば、 S_1 制約は大きい B_1 と B_2 について満たされる。

条件 (2) より γ_1 と γ_2 が共に $\gamma + O(1/B)$ と等しいことが導かれる。よって我々は上記の F_s と

(13) 連続体モデルでは、(二つの市場の) 買い手の売り手に対する比率が等しくどちらの市場も主体の連続体を有する限り、市場サイズの任意の比率は二市場均衡と整合的である。

G_s の値を、それらの γ における値と導関数を用いて近似することができる。これにより

$$\begin{aligned}
\Delta_{S1} &= \left(F_s(\gamma) + F'_s(\gamma)(\gamma_2 - \gamma + \frac{1}{B_2}) - F_s(\gamma) - F'_s(\gamma)(\gamma_1 - \gamma) \right) \\
&\quad - \left(\frac{G_s(\gamma) + (\gamma_2 - \gamma + 1/B_2)G'_s(\gamma)}{B_2} - \frac{G_s(\gamma) + (\gamma_1 - \gamma)G'_s(\gamma)}{B_1} \right) \\
&\quad + o\left(\gamma_2 - \gamma_1 + \frac{1}{B_2}\right) + o(\gamma_1 - \gamma) + o\left(\frac{1}{B_2}\right) + o\left(\frac{1}{B_1}\right) \\
&= F'_s(\gamma) \left(\gamma_2 - \gamma_1 + \frac{1}{B_2} \right) + G_s(\gamma) \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_2} \right) + o\left(\frac{1}{B}\right) \\
&= F'_s(\gamma) \left(\frac{\gamma - \gamma_1}{1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_1}{(1 - \alpha_1)B_2} \right) + G_s(\gamma) \left(\frac{1 - 2\alpha_1}{(1 - \alpha_1)B_1} \right) + o\left(\frac{1}{B}\right)
\end{aligned}$$

を得る。条件 (2) より $S_1 - \gamma B_1 - \frac{G_s(\gamma)(1-2\alpha_1)}{F'_s(\gamma)} < \alpha_1 - \varepsilon$ が導かれる。よって

$$\begin{aligned}
\gamma_1 - \gamma - \frac{G_s(\gamma)(1-2\alpha_1)}{F'_s(\gamma)B_1} &< \frac{\alpha_1}{B_1} - \frac{\varepsilon}{B_1} \\
-\frac{G_s(\gamma)(1-2\alpha_1)}{F'_s(\gamma)(1-\alpha_1)B_1} - \left(\frac{\gamma - \gamma_1}{1-\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{(1-\alpha_1)B_1} \right) &< -\frac{\varepsilon}{(1-\alpha_1)B_1} \\
G_s(\gamma) \left(\frac{1-2\alpha_1}{(1-\alpha_1)B_1} \right) + F'_s(\gamma) \left(\frac{\gamma - \gamma_1}{1-\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{(1-\alpha_1)B_1} \right) &< \frac{\varepsilon F'_s(\gamma)}{(1-\alpha_1)B_1}
\end{aligned}$$

を得る。最後の方程式は次のことを導く。即ち、 Δ_{S1} は負であり、またゼロから望まれたオーダーまで離れたところで抑えられている。これは、十分大きな B について S1 制約が満たされていることを示す。

さて、市場 2 から市場 1 への変更を考えている買い手を考える。対称的に、次の式が成立するとき、S2 制約が十分大きな B について成立する。

$$\begin{aligned}
\gamma_2 - \gamma - \frac{G_s(\gamma)(1-2\alpha_2)}{F'_s(\gamma)B_2} &< \frac{\alpha_2}{B_2} - \frac{\varepsilon}{B_2} \\
\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}(\gamma - \gamma_1) - \alpha_1 \frac{G_s(\gamma)(2\alpha_1-1)}{(1-\alpha_1)F'_s(\gamma)B_1} &< \frac{\alpha_1}{B_1} - \varepsilon \frac{\alpha_1}{(1-\alpha_1)B_1} \\
\gamma - \gamma_1 - \frac{G_s(\gamma)(2\alpha_1-1)}{F'_s(\gamma)B_1} &< \frac{1-\alpha_1}{B_1} - \frac{\varepsilon}{B_1} \\
S_1 - \gamma B_1 - \frac{G_s(\gamma)(1-2\alpha)}{F'_s(\gamma)} &> \alpha_1 - 1 + \varepsilon.
\end{aligned}$$

よって、

$$(S_1 - \gamma B_1) - \frac{G_s(\gamma)(1-2\alpha)}{F'_s(\gamma)} \in (\alpha_1 - 1 + \varepsilon, \alpha_1 - \varepsilon)$$

が成立するとき、即ち (2) 式が成立するとき、売り手についての誘因両立制約は共に満たされる。

(3) 式が成立し B が大きいとき、B1 および B2 制約が満たされることを示す計算は同様である。市場 1 から市場 2 への変更による結果としての買い手の利得の変化は、

$$\begin{aligned}
& F_b\left(\frac{B_2}{B_2+1}\gamma_2\right) - \frac{G_b\left(\frac{B_2}{B_2+1}\gamma_2\right)}{B_2+1} - F_b(\gamma_1) + \frac{G_b(\gamma_1)}{B_1} + o\left(\frac{1}{B_1}\right) \\
&= F'_b(\gamma)\left(\gamma_2 - \gamma_1 - \frac{\gamma_2}{B_2+1}\right) + o\left(\gamma_2 - \gamma_1 - \frac{\gamma_2}{B_2+1}\right) \\
&\quad + G_b(\gamma)\left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_2+1}\right) + o\left(\frac{1}{B_2+1}\right) + o\left(\frac{1}{B_1}\right) \\
&= F'_b(\gamma)\left(\frac{\gamma - \gamma_1}{1 - \alpha_1} - \frac{\alpha_1\gamma_2}{(1 - \alpha_1)B_1}\right) + G_b(\gamma)\left(\frac{1 - 2\alpha_1}{(1 - \alpha_1)B_1}\right) + o\left(\frac{1}{B}\right)
\end{aligned}$$

である。これが非正となることを B1 制約は要求する。条件 (3) は $(S_1 - \gamma B_1) - \frac{G_b(\gamma)(1-2\alpha_1)}{F'_b(\gamma)} > -\alpha_1\gamma + \varepsilon$ となることを導く。これはまた

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma - \gamma_1}{1 - \alpha_1} - \frac{\alpha_1\gamma}{(1 - \alpha_1)B_1} + \frac{G_b(\gamma)(1 - 2\alpha_1)}{F'_b(\gamma)(1 - \alpha_1)B_1} < -\frac{\varepsilon}{B_1(1 - \alpha_1)} \\
& F'_b(\gamma)\left(\frac{\gamma - \gamma_1}{1 - \alpha_1} - \frac{\alpha_1\gamma_2}{(1 - \alpha_1)B_1}\right) + G_b(\gamma)\left(\frac{1 - 2\alpha_1}{(1 - \alpha_1)B_1}\right) < -\frac{\varepsilon}{B_1(1 - \alpha_1)}
\end{aligned}$$

を導く。そのため、任意の十分大きな B に対して B1 制約が満たされるような B が存在する。市場 2 における買い手についての誘因両立制約に適用された対称的な議論によって、大きな B に対して条件 (3) は誘因制約を導くことが示される。これにより主張 1 が証明される。

主張 1 の仮説は $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^\varepsilon$ を導く。これは我々に仮定 1 における利得の近似を適用することを許すものである。主張 2 では、我々は $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^\varepsilon$ を直接仮定する。上述の議論は今や、 $(S_1 - \gamma B_1) - \frac{G_b(\gamma)(1-2\alpha_1)}{F'_b(\gamma)} \notin [a_1 - 1 - \varepsilon, \alpha_1 + \varepsilon]$ あるいは $(S_1 - \gamma B_1) - \frac{G_b(\gamma)(1-2\alpha_1)}{F'_b(\gamma)} \notin [-\alpha_1\gamma - \varepsilon, (1 - \alpha_1)\gamma + \varepsilon]$ であるときに、準均衡が存在しないことを示している。

(Robert M. Anderson, 州立カリフォルニア大学バークレー校教授)

(Glenn Ellison, マサチューセッツ工科大学教授)

(Drew Fudenberg, ハーバード大学教授)

(訳者 経済学研究科後期博士課程)

参 考 文 献

- [1] Anderson, Robert M., “Nonstandard Analysis with Applications to Economics,” in: Werner Hildenbrand and Hugo Sonnenschein (editors), *Handbook of Mathematical Economics*, volume IV, North Holland Publishing Company, Amsterdam (1991), 2145–2208.
- [2] Dierker, Hildegard, “Equilibria and Core of Large Economies,” *Journal of Mathematical Economics* 2 (1975), 155–169.
- [3] Dunford, Nelson and Jacob T. Schwarz, *Linear Operators Part I: General Theory*, John Wiley and Sons, New York (1957).
- [4] Ellison, Glenn and Drew Fudenberg, “Knife-Edge or Plateau: When do Market Models Tip,” *Quarterly Journal of Economics* 118 (2003), 1249–1278.
- [5] Ellison, Glenn, Drew Fudenberg and Markus Möbius, “Competing Auctions,” *Journal of the European Economic Association* 2 (2004), 30–66.

- [6] Grodal, Birgit, "The Rate of Convergence of the Core for a Purely Competitive Sequence of Economies," *Journal of Mathematical Economics* 2 (1975), 171–186.
- [7] Hurd, Albert E. and Peter A. Loeb, *An Introduction to Nonstandard Real Analysis*, Academic Press, New York (1985).
- [8] Hildenbrand, Werner, *Core and Equilibria of a Large Economy*, Princeton University Press, Princeton (1975).
- [9] Krugman, Paul, "Increasing Returns and Economic Geography," *Journal of Political Economy* 99 (1991), 483–499.
- [10] Krugman, Paul, *Geography and Trade*, MIT Press, Cambridge, MA (1991).
- [11] Pagano, Marco, "Trading Volume and Asset Liquidity," *Quarterly Journal of Economics* 104 (1989), 255–274.