慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	1次元時系列データの変換(I) : 移動平均からHodrick-Prescottフィルターまで
Sub Title	On data transformation of time series (I)
Author	伊藤, 幹夫(Ito, Mikio)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2008
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.101, No.2 (2008. 7) ,p.355(153)- 371(169)
JaLC DOI	10.14991/001.20080701-0153
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20080701-0153

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

「三田学会雑誌」101巻2号（2008年7月）

研究ノート

1次元時系列データの変換（I）

——移動平均からHodrick-Prescottフィルターまで——

伊　藤　幹　夫[†]

1　はじめに

データ変換は，計量経済分析において，庶子的な扱いを受け続けてきた。経済や金融の現実のデータを用いた，応用計量経済分析においては，元々のデータに対する集計化や平均化，欠損値処理，はずれ値処理，トレンド除去，季節性除去，次数の変換，対数変換，収益率への変換，など多くのデータ処理が一次元時系列データ，多次元時系列データ，パネルデータに対して，頻繁に行われる。

計量経済学において，データ変換の手法の表面的な紹介がなされることが多いとはいえ，その意義や統計理論上の問題が，真剣な議論の対象になることは，それほど多くない。しかし，データ変換に起因する誤った分析が問題になる事例は，Yule-Slutzky効果の典型例とみられるKuznetsの幻の建設循環の発見など有名なものに限らず相当数あると思われる。

Kuznetsの例のような時系列データに対する移動平均操作やクロスセクション・データに対する集計・平均が，観測誤差・システム誤差の関係を不明確にすることは，統計学を学んだものにとっては当然のことであることを思い起こすとき，上記の現状はやや不思議に思われる。汎用的な統計方法においては，データ変換の意味を計量経済学においてよりは慎重に考慮されることをあわせて考えると，不思議さに対する思いはいっそう増す。

この研究ノートは，一次元の時系列データに対するデータ変換に限って，変換をすることのデータ解析上の意義，代表的な変換の理論的構造，諸変換の関係をまとめることを目的とする。ただし紙数の都合上，2部にわける。本稿がカバーするのは，汎用的なデータ変換，

† *E-mail address*: ito@econ.keio.ac.jp

移動平均フィルター，Hodrick-Prescott フィルターまでであり，次の稿で，Baxter-King フィルターと Wavelet 解析をとりあげる。

2　時系列データの変換の実際

ここで，経済学において，時系列のデータ変換がどのように捉えられてきたかを概観しておく。

経済学に関連する分野で，研究者が関心をもつ 1 次元時系列の例として

1. マクロ経済　(a) 国民所得・国内総生産 (b) 物価水準 (c) 消費支出 (d) 投資支出 (e) 資本ストック (f) 輸入・輸出
2. 金融　(a) 貨幣供給 (b) 各種金利 (c) 集計株価 (d) 公社債価格
3. 財政　(a) 財政支出 (b) 国債発行額
4. 労働　(a) 労働人口 (b) 失業率 (c) 雇用者数 (d) 人口 (e) 賃金率
5. その他　(a) 不動産価格 (b) 原油など自然資源価格

が挙げられる。もちろん，他にも関心をもたれるデータはあろう。この中でも，国民経済の活動水準に関する，国民所得あるいは国内総生産については，相当以前から現在にいたるまで，とりわけ強い関心がもたれてきた。そのため，特定の経済理論とかならずしも密接に結びつかない形で，変動のパターンを要約する目的で多様なデータ変換が考案され試されてきた。

国民所得など，一変数時系列データに対して，Burns and Mitchell（1946）以降のトレンド除去や，循環成分の抽出・季節性の除去などのデータ変換が，理論なき計測といわれた理由は，そうした変換（そのほとんどが線形変換）の変換を特徴付けるパラメータが経済理論から独立であるという点に求められる。

データに対する何らかの統計処理（以下ではデータ解析とよぶ）が，確率モデルに依拠するデータ生成過程を想定して，何らかの統計モデルに対する解析を行うのか，データ生成過程の基本的な特性を捕捉するための要約統計量の獲得を目指すのかは，分析者の目的に依存する。

時系列データのデータ変換は，Burns-Mitchell のころから行われた。しかし，Koopmans（1947）による「理論なき計測」の非難の下で，片隅においやられた。Koopmans の批判の論旨がデータ解析に対する狭量ともいえる立場からの批判であるという Vining（1949）によるまっとうな指摘と，それに対する Koopmans（1949）の本来の発言に対する修正の顛末について，あまり知られることなく，多くの経済学者が長期間にわたって，何らかの経済理論にもとづかないデータ解析を冷遇してきた面がある。

そうした状況は，Lucas（1976）による計量経済学批判がなされたり，実景気循環理論が考案されるあたりから，徐々に変わっている。ルーカスの均衡景気循環理論の帰結を，Nelson and Plosser（1982）が GDP データの持続性を単位根検定をもちいて示して反駁するなど，計量経済分析で使用される時系列解析の内容も大きく変化したころである。

実景気循環理論を推進する経済学者は，自ら

の理論の検証を，既存の計量経済分析の枠組みで行わず，カリブレーションというコンピューター・シミュレーションを基礎とする方法で行ってきた。そのために，経済理論から独立に，時系列データの要約統計量を求めることが多いこともあり，経済学者のデータに向き合う姿勢も変化した。その後，実景気循環理論とその発展形として現代マクロ経済学の定番となったDSGEモデル（Dynamic Stochastic General Equilibrium model）による研究の興隆以降，何らかのフィルタリングによって時系列にデータ変換を行なうことへの偏見は少なくなっている。

1980年にHodrick and Prescott（1980）が考案した，Hodrick-Prescottフィルターは現在にいたるまで，トレンド抽出の方法として頻繁に使われてきた。そのデータ変換としての特性も，近年になって真剣に研究されるようになった。さらに，Hodrick-Prescottフィルターをde facto standardとして，それを大幅に改善することを目論んで，Baxter and King（1999）がトレンド成分の抽出を目的にして周波数領域の分析を基礎にした帯域フィルター（band-pass filter）を開発したことが注目を集めた。また近年，工学分野での応用例が急増しているWavelet解析を，経済・金融の分野で活用しようとする動きもある。

なおフィルター（filter）という用語については，注意が必要である。Hodrick-Prescottフィルターにしろ，Baxter-Kingの帯域フィルターにしろ，これらは時間領域でみたとき加重移動平均であるが，変換対象の時点から対称な加重パターンをもつために，Wiener（1949）以来の信号抽出理論の枠組でいうフィルターでなく，スムーザー（smoother）になっている。

3　データ変換に関する一般的議論

1次元時系列のデータ変換（フィルター）に関する各種の理論を展開する前に，統計学におけるデータ変換のデータの変換を考える。この場合，以下の2つの考え方がある。

1. データ生成過程を事前に前提とせずに，データ要約の便宜として行う。
2. 想定されるデータ生成過程の変数変換（パラメータ変換を含む）の一種として，統計解析上の便宜として行う。

前者は，いわゆる記述統計上の手続きとして行われるものである。データ変換を行う当事者にとって，どういった変換を使用するかは，要約されたデータから読み取ろうとするものに依存する。時系列の推移かもしれないし，分散等のデータのばらつきの特性かもしれないし，解釈しやすい尺度への移行かもしれない。

これに対して後者は，統計モデルとしてとらえられるデータ生成過程において，

1. 変換後の分布の分散の安定性
2. 統計モデルの簡潔な線形構造
3. 変換後の分布の正規性

などを目論んで行われる。

データ変換には，ごく単純な操作からなる素朴なノンパラメトリック変換と，変換パラメータを導入してどのようなデータの変換を採用するかの選定を，変換パラメータの推定問題として包括的に捉えようとするパラメトリック変換がある。

パラメトリック変換は，データを用いた解析全体を，オリジナルのデータ周辺の統計モデルと，変換後のデータの上に展開される，分析の主目的とされる統計モデルの，二本立てとして考えることに，何らかの利便性を分析者が感じているから行われる。

汎用的なデータ変換手法として最も有名なものが，正の値をとる確率変数に対して行われる，次の Box-Cox 変換である。

$$X^* = \begin{cases} (X^\lambda - 1)/\lambda & (\lambda \neq 1) \\ \log X & (\lambda = 1) \end{cases}$$

パラメータの選択は，変換後のデータに関して，簡潔な構造，一定の分散および正規分布を想定して行うのが普通である。これらが同時に成立しそうもない場合には，次善の策として統計モデルにおけるなんらかの簡潔な構造が実現されるようにパラメータが選択される。

なお，パラメータの選択に関して，統計モデルの本体のパラメータと同時推定することが考えられるが，Box-Cox 変換のようによく知られた，ベキ正規変換の場合でも厳密な推定量を導出するのはたいていの場合やっかいであることから，統計モデルの本体のパラメータの推定と独立に選択してしまう場合も，現実には多い。

実際，対数変換は Box-Cox 変換において $\lambda = 0$ の場合であるが，Box-Cox 変換のパラメータ選択の結果，対数変換を選ぶという観点から，対数変換が選択されることはほとんどない。増加率の計算の便宜の観点，つまり対数変換後の階差によって増加率を得るという簡便さから，対数変換が選択される。

対数変換の場合，分散の均一化が期待される

$$V[X] = E[X]^2$$

のときであることが知られている。

データ変換後のデータが正規分布になることを期待して行われる変換には，2 つパラメータをもつ，次の変換

$$X^* = \gamma + \delta g((X - \mu)/\lambda)$$

がある。ここで，$g(y)$ として $\log x$ や $\log y - \log(1 - y)$ がよく使われる。

4　時系列の変換としての線形フィルター

経済やファイナンスにおける 1 次元時系列データ $x_1, x_2, \cdots, x_T$ に関しては，増加率に注目して，

$$y_t = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} = \frac{\Delta x_t}{x_{t-1}}$$

あるいは，

$$y_t = \Delta \log x_t = \log x_t - \log x_{t-1}$$

が用いられる。

1 次元時系列データを，有限次元ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_T)$ とみなすならば，データ変換は一般に，T 次元ユークリッド空間上の変換とみられる。

増加率を得るという変換は，$\boldsymbol{x}$ の各要素 x_t に対する対数変換 $y_t = \log x_t$ から得られる非線形変換 $G : \mathbf{R}^T \longrightarrow \mathbf{R}^T$ と，

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \boldsymbol{O} \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ \boldsymbol{O} & & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix}$$

という線形変換の合成変換だと考えてよい。ここで，階差変換に対応する線形変換では第 1 要素に限って恒等変換になっているが，このようにおくことで逆行列を考えることができる。以下では階差変換を表現する行列を $\mathcal{D}$ と記す。

実際，階差に対応するすぐ上の線形変換 $\mathcal{D}$ の逆行列として得られる線形変換

$$\mathcal{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

はデータの累積和をとる変換となる。これを $\mathcal{I}$ と記す。つまり $\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{I}$ である。

以上の議論は一般化できて，2 階階差は $\mathcal{D}^2 = \mathcal{D}\mathcal{D}$，$n$ 階階差は $\mathcal{D}^n$ となる。2 階階差の逆変換は，当然 $(\mathcal{D}^2)^{-1} = \mathcal{I}\mathcal{I} = \mathcal{I}^2$ になる。

階差や累積和（和分）をとるというデータ変換を表現する方法として，伝統的に

$$Lx_t = x_{t-1}$$

として定義されるラグ作用素 L が用いられてきた。つまり階差を

$$\Delta x_t = x_t - Lx_t = (1 - L)x_t$$

と表現する。同時に階差作用素の定義と考えてよい。これは，無限大の大きさをもつ仮想のサンプルに対して非常に有効な表現であり，工学においても離散線形システムの表現において長く使われてきた。また，加重移動平均などの表現をするときにも便利である。形式的に累積和は $\Delta^{-1} = (1 - L)^{-1}$ と表される。

初期時点と終端時点をもつ，実際のサンプルに対しては，ラグ作用素をもちいて具体的な変換を初期データや終端データに依存した形で表現することはできないという不便さがある。われわれは，データの変換に関して，行列かラグ作用素・階差作用素を適宜用いる。

最近の統計パッケージは，行列計算を効率的に行うことを基礎に設計されているために，多くの統計処理を行列とベクトルに関する線形代数の演算として表現しておくことは，意義が大きい。この研究ノートでは，線形データ変換を出来るかぎり行列として表現する。

なおラグ作用素を，行列表現するときデータが循環するように考えて

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & \boldsymbol{O} \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ \boldsymbol{O} & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のように定義しておくと，有限サンプルに対する変換として，逆行列が考えられてリード作用素と考えられるが，実際の変換の計算の上で便利になることはない。

5　移動平均フィルター

さて，1次元時系列データに対する変換として，伝統的に行われてきたことは，上記に登場した対数変換や増加率を求めるという変換に加えて，移動平均があげられる。

単純な（過去）n 期移動平均は，データ $x_1, x_2, \cdots, x_T$ に対して

$$y_t = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x_{t-i}$$

となる。ラグ作用素に関する形式的な演算では，

$$1-L^{n+1}=(1+L+\cdots+L^n)(1-L)=(1+L+\cdots+L^n)\Delta$$

が成立することから，単純移動平均は $n+1$ 期階差 $x_t - x_{t-n-1}$ の累積和の n 期平均に等しい。

さらに，単純な（過去）n 期移動平均は，有限サンプルを考えるとき，逆変換をもつ行列とみなせる。例えば，$T=10$ のとき（過去）3期移動平均を表わす行列は，

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \end{pmatrix}$$

となるが，逆行列は

$$3\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ -1&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&-1&1&0&0&0&0&0&0 \\ -1&1&0&-1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&1&0&-1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&-1&1&0&-1&1&0&0&0 \\ -1&1&0&-1&1&0&-1&1&0&0 \\ 0&-1&1&0&-1&1&0&-1&1&0 \\ 1&0&-1&1&0&-1&1&0&-1&1 \end{pmatrix}$$

となる。

移動平均操作は，有限サンプルを考える場合，初期時点・終期時点を含む数期間のデータに関しては，厳密な意味での移動平均をとることはできず，実際上，変換後のデータのサンプルの大きさは小さくなる。上の例では，1期から2期，$T-1$ 期から T 期について，移動平均を得ることにならない。

興味深いのは，過去 n 期移動平均の線形作用素は，ラグ作用素にもとづく無限大サンプルの議論からも，行列にもとづく有限サンプルの議論からも分るように，逆変換によって変換後データを元のデータに戻すためには，過去の全サンプルが必要になるということである。

実際のデータ変換において，単純移動平均は当該時点の値を境に対称の形で，奇数個の値の平均をとる，次のような平均化操作を指す。

$$y_t = \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n} x_{t+i}$$

12ヶ月移動平均のように偶数期のデータの

移動平均をとる場合,

$$y_t = \frac{1}{12}\sum_{i=-6}^{6} w_i x_{t+i},$$

の加重 $\{w_i\}$ を

$$w_i = \begin{cases} 1 & |i| < 6 \text{ の時} \\ 0.5 & |i| = 6 \text{ の時} \end{cases}$$

とする。

対称的な単純移動平均の逆変換はどの時点の値に関しても全サンプルの値に依存する形になる。例えば，有限サンプルの場合に，対称移動平均に対して,

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}$$

という行列表現を考える。逆変換は

$$3\begin{pmatrix} 1&0&-1&1&0&-1&1&0&-1&1 \\ 0&0&1&-1&0&1&-1&0&1&-1 \\ -1&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&-1&0&1&0&-1&1&0&-1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&-1&0&1&-1 \\ -1&1&0&-1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&-1&0&1&-1&0&1&0&-1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1 \\ -1&1&0&-1&1&0&-1&1&0&0 \\ 1&-1&0&1&-1&0&1&-1&0&1 \end{pmatrix}$$

となる。

かつての季節調整法として使われたセンサス局法は，様々な期数の移動平均を組み合わせて，趨勢・循環・季節性などを抽出するものであった。Burns-Mitchell の景気循環の研究，Kuznets の景気変動の研究において，趨勢の抽出を目的として単純移動平均は多く使われた。これは周期（およびその整数倍）が移動平均項数に等しい周期的変動を，単純移動平均がほぼ除去し，加えて互いに独立な不規則変動を平均的に相殺することが，経験的に知られていたためである。

ここでは，移動平均フィルターが周期変動を除去する仕組みを周波数領域の議論からまとめてみよう。経済あるいは金融の諸変量が，厳密に規則的循環をすることはない。通常周期的な変動というとき，ある周波数を中心とした循環的な変動を指す。これは，異なる周波数をもつ，複数の変動の重ね合わせとして時系列をみていることになる。経験的に数種類の移動平均の逐次使用によって，周期的変動ならびに不規則変動を除去しようとした以前の経済学者のデータ変換の接近法を現代的に解釈すると，ある帯域の周波数をもつ変動を除去するような，時系列の線形変換を単純移動平均（あるいはすぐ下で述べる加重移動平均）の逐次使用で実現しようとする接近法だと要約することができる。

単純な移動平均法を一般化して，当該時点を中心として異なる加重を許すことで移動平均は一般化される。例えば

$$y_t = \frac{1}{35}(-3x_{t-2} + 12x_{t-1} + 17x_t + 12x_{t+1} - 3x_{t+2})$$

のような対称加重移動平均がよく使われた。形式的には

$$y_t = \sum_{j=-r}^{s} w_j x_{t-j}, \quad (\sum_{j=-r}^{s} w_j = 1) \qquad (1)$$

というものである。

ここで，不規則な周期的変動を表現するために，MA(∞) 過程を使う。

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_j. \qquad (2)$$

ただし，$\psi_0, \psi_1, \psi_2, \cdots$ は，$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ となる実数値である。また，$\{\varepsilon_j\}$ は白色雑音とする。

このとき

$$\gamma(\tau) = E(y_t y_{t-\tau}), \quad \tau = 0, 1, 2, \cdots$$

を自己共分散関数という。自己共分散関数 $\{\gamma(\tau)\}$ と $\{\psi_j\}$ は，密接な関連がある。実際，MA(∞) 過程が，逆転可能で AR(n) 過程（n は有限の自然数）による表現をもつとき，Yule-Walker 方程式により両者は，有限次元の線形方程式を通じて 1 対 1 に対応する。

不規則な周期的変動の表現としての MA(∞) 過程の性質を調べるときに便利なのは，自己共分散関数 $\{\gamma(\tau)\}$ を複素 Fourier 変換して得られるパワースペクトラム

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \gamma(\tau) e^{-\sqrt{-1}\lambda\tau}$$

である。これは次の逆変換によって自己共分散関数 $\{\gamma(\tau)\}$ と 1 対 1 に対応する。

$$\gamma(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\sqrt{-1}\lambda\tau} f(\lambda) d\lambda$$

（2）で定義される MA(∞) 過程を（1）で変換した MA(∞) 過程のそれぞれのパワースペクトラム $f(\lambda)$ と $g(\lambda)$ は，周波数応答関数

$$W(\lambda) = \sum_{j=-r}^{s} w_j e^{-\sqrt{-1}\lambda j}$$

を使うと

$$g(\lambda) = |W(\lambda)|^2 f(\lambda)$$

という関係で結ばれる。つまり，変換前のパワースペクトラムを変換後のパワースペクトラムに移す。パワースペクトラムは，周期変動に関するほぼ完全な情報を有するので，移動平均フィルターの周期変動の除去特性をみるためには，周波数応答関数 $W(\lambda)$ あるいは伝達関数とよばれる $|W(\lambda)|^2$ を調べることが重要である。

循環的な変動をもつ 1 次元時系列に対して循環的な変動ならびに不規則変動を除去したいとき，つまりトレンド成分を抽出するために，移動平均パラメータ $w_{-r}, w_{-r+1}, \cdots, w_0, \cdots, w_{s-1}, w_s$ を適当に選んで，特定の周波数の帯域を除去するような伝達関数 $|W(\lambda)|^2$ が得られるようにすればよい。ただし，その特定の周波数の帯域が何かは，多くの場合経済理論から独立に，分析者が恣意的に定めることは言うまでもない。

もともとの時系列の統計学的な特性が完全にわかっていることは少ない段階で，トレンド推定の目的で移動平均が使われる場合がほとんどであり，そうした状況では人為的に設計された移動平均フィルターが，特定の周波数を逆に強調した形で変換してしまう可能性がある。使用する移動平均フィルターが，どのような周波数特性をもっているかを確認しないと，変換されたデータが「幻の循環」を分析者

に示すこともありうる。これは Yule-Slutzky 効果として知られている。

有名な例としては，Kuznets（1961）による，約 20 年周期の長期景気変動仮説の提唱をめぐるものである。Kuznets は，年次データの短期の循環成分を取り除くために，単純な 5 期対称移動平均

$$y_t = \frac{1}{5}x_{t+2} + \frac{1}{5}x_{t+1} + \frac{1}{5}x_t + \frac{1}{5}x_{t-1} + \frac{1}{5}x_{t-2} \tag{3}$$

をとり，次に

$$y_t = x_{t+5} - x_{t-5} \tag{4}$$

という長期階差をとった。これもまた，線形変換である。これらは，汎用的な方法でいうところのノンパラメトリックなデータ変換になっている。ここで，変換を特徴付けるパラメータというものは存在しない。つまり Kuznets はデータが生成される過程とデータを変換する過程の結合としての統計モデルをまったく意識しないで，データ変換を行なっている。

ここで，（1）の周波数応答が

$$W(\lambda) = \sum_{j=-r}^{s} w_j e^{-j\sqrt{-1}\lambda}$$

であることから，上記の（3）と（4）の周波数応答は

$$W_1(\lambda) = \frac{1}{5}\sum_{j=-2}^{2} e^{-j\sqrt{-1}\lambda}$$

$$W_2(\lambda) = e^{5\sqrt{-1}\lambda} - e^{-5\sqrt{-1}\lambda}$$

となる。

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{-1}} + e^{-\sqrt{-1}})$$

$$\sin x = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{-1}} - e^{-\sqrt{-1}})$$

という基本的な関係を使った一部煩雑な計算を経て，

$$W_1(\lambda) = \frac{\sin(\frac{5}{2}\lambda)}{5\sin(\frac{1}{2}\lambda)}$$

となる。

$$W_2(\lambda) = 2\sqrt{-1}\sin(5\lambda)$$

となる。Kuznets の行ったデータ変換全体の周波数応答は $W(\lambda) = W_1(\lambda)\cdot W_2(\lambda)$ であるから，伝達関数は

$$|W(\lambda)|^2 = \left(\frac{2\sin(5\lambda)\sin(\frac{5}{2}\lambda)}{5\sin(\frac{1}{2}\lambda)}\right)^2$$

となる。これは Fishman（1969）によれば 20.3 年近辺の周期をもつ波動を中心に非常に高いピークをもつ。このことは，もともとのデータが循環成分をまったく持たない純粋な白色雑音だったとしても，変換されたデータが周期変動をもつと観察されることを意味する。

移動平均フィルターは時間不変（time invariant）な線形変換であるから，もともとの時系列が非定常である場合，変換されたデータも，単位根過程を別とすれば，なんらかの非定常な要素が残ることはやむをえない(1)。

1 次元時系列に対するデータ変換を表現する方法として，これまでラグ作用素，行列，周波数応答関数を示してきた。これらを適宜使用しながら，以下の議論を進めていく。

（1）　この点を改善することが期待されるデータ変換として Wavelet 解析があるが，これについては稿をあらためて論ずる予定である。

6　Hodrick-Prescott フィルター

すでに述べたように，Burns and Mitchell（1946）のように，形式的な経済理論に基づかず，時系列に対する素朴な観察から，趨勢（トレンド）・季節性・不規則変動・はずれ値・構造変化の影響，などを移動平均を中心としたデータ変換によって除去する接近法は，1980 年代に実景気循環の研究が盛んになるまで，学術研究においてあまり採用されない。

実景気循環理論のカリブレーションによる実証研究では，時系列の特性の要約が必要となる。そこで，中心的なデータ変換を提供することになったのが Hodrick and Prescott（1980）による，Hodrick-Prescott フィルター（以下，HP フィルターとよぶ）である。

これは，フィルターの基礎の考え方の分りやすさと，フィルターそのものの簡便性，トレンド除去の「優れた」パフォーマンスによって，現在にいたるまで頻繁に使われている。また，1990 年代に入ってからは，データ変換の理論的特性が盛んに研究されている。例えば，King and Rebelo（1993）は，HP フィルターの周波数特性を調べている。また，Pedersen（2001）は HP フィルターの Yule-Slutzky 効果を検討している。ここでは HP フィルターをいくつかの観点から検討する。

HP フィルターは，元々の時系列 $(x_1, x_2, \cdots, x_{T-1}, x_T)$ に対して，

$$\sum_{t=1}^{t}(x_t - y_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1}(\Delta y_{t+1} - \Delta y_t)^2 \quad (5)$$

を最小にするように，変換された時系列 $(y_1, y_2, \cdots, y_{T-1}, y_T)$ を定めるものである。

（5）式から分るように，変換によってえられた時系列が元の時系列と乖離しないという要請と，変換によってえられた時系列が滑らかであるという要請を，フィルターに課している。また，それぞれの要請の重みを表現するのが，パラメータ λ である。特に第 2 項の括弧内を書き下すと

$$\begin{aligned}\Delta x_{t+1} - \Delta x_t &= (x_{t+1} - x_t) - (x_t - x_{t-1}) \\ &= x_{t+1} - 2x_t + x_{t-1}\end{aligned}$$

になっている。

HP フィルターは経済理論から独立なパラメータをもつデータ変換になっている。最小化基準を表わす（5）式は 2 次形式になっているので，HP フィルターは線形フィルターである。有限サンプル上の理論でこの点を確認しておく。

元々の時系列データを T 次元ベクトルとして $\boldsymbol{x} = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_{T-1}\ x_T)$，変換によってえられた時系列データを T 次元ベクトルとして $\boldsymbol{y} = (y_1\ y_2\ \cdots\ y_{T-1}\ y_T)$ と記すことにする。（5）式の第 1 項は，内積 $< \cdot, \cdot >$ を使って

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{t}(x_t - y_t)^2 &=< (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) > \\ &=< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} > -2 < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > + < \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} >\end{aligned}$$

と表せる。

（5）の定数 λ をのぞいた第 2 項は，$T-2$ 次元ベクトル

$$
\begin{pmatrix} y_3 - 2y_2 + y_1 \\ y_4 - 2y_3 + y_2 \\ \cdots \\ y_T - 2y_{T-1} + y_{T-2} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \boldsymbol{O} & \\ & \boldsymbol{O} & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{T-1} \\ y_T \end{pmatrix} \tag{6}
$$

の自分自身との内積に等しい。

この値は，すぐ上の $(T-2) \times T$ 行列を B と記すことにすると，B とその転置 ${}^tB$ から得られる非負定符号行列 ${}^tBB$ を使って，

$$
< \boldsymbol{y}, {}^tBB\boldsymbol{y} >
$$

という 2 次形式に書ける。結局（5）は

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{y}) := &< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} > -2 < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > + < \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} > \\
&+ \lambda < \boldsymbol{y}, {}^tBB\boldsymbol{y} >
\end{aligned}
$$

のように書ける。

ここで最小化のための 1 階の必要条件を考えると

$$
\frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{y}} = 2(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} + \lambda {}^tBB\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}
$$

となり，

$$
\boldsymbol{y} = (I + \lambda {}^tBB)^{-1}\boldsymbol{x}
$$

と解かれる。当然のことながら，変換行列 $H = (I + \lambda {}^tBB)^{-1}$ は元の時系列 $\boldsymbol{x}$ から独立である。

ここで有限次元の立場から変換行列 H を調べておこう。まず $H^{-1} = I + \lambda {}^tBB$ を調べるために $T = 8$ の場合に ${}^tBB$ を書き下してみる。

$$
\begin{pmatrix}
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1
\end{pmatrix}. \tag{7}
$$

3 行目から $T-2$ 行目まで，対角成分を中心に見た数字のパターンは全く同じである。このことは，T の大きさに依存しない。以上のことから，T が大きいとき，$H^{-1} = I + \lambda {}^tBB$ のほとんどの非対角成分がゼロとなる対称行列であることがわかる。また H も対称となる。

次に $T = 8$ の場合，H を書き下してみることは得策ではない，なぜならば各要素が λ に関する冗長な有理式だからである。実際に対角成分の $(4,4)$ 要素を計算すると

$$
\frac{44\lambda^6 + 954\lambda^5 + 2026\lambda^4 + 1293\lambda^3 + 310\lambda^2 + 30\lambda + 1}{336\lambda^6 + 3312\lambda^5 + 5140\lambda^4 + 2432\lambda^3 + 456\lambda^2 + 36\lambda + 1}
$$

となる。なお H の第 3 対角成分から第 $T-2$ 対角成分までが同じである。さらに，対角成分を中心に見た数字のパターンは，ほぼ等しい。

行列をデータ変換の表現として考えるのは，この段階であきらめて無限大サンプルを想定して，ラグ作用素 L とリード作用素 L^{-1} を用いたデータ変換を表現してみよう。(7) から

わかる行列 H^{-1} の性質から，

$$x_t = \lambda(L^{-2} - 4L^{-1} + (6 + 1/\lambda) - 4L + L^2)y_t$$

が分かる。この式に現われるラグ有理式を，$F(L)$ と書くことにすると，容易に

$$F(L) = \lambda\left((1-L)^2(1-L^{-1})^2 + \frac{1}{\lambda}\right)$$

であることに気づく。形式的には有理関数 $F(z)$ の複素平面での挙動を調べて $F^{-1}(z)$ の級数展開による表現を得ればよい。ここでの導出は King and Rebelo（1993）の議論に基づく。

なお，級数展開による HP フィルターの表現を得る周波数領域での議論に入る前に，HP フィルターが単位根過程を含む時系列に対してどのように機能するかを確認しておく。$F(z)$ の形からみて，元の時系列から，循環成分 $c_t = x_t - y_t$ を得るフィルターを考えてみる。

$$x_t = \left(\lambda(1-L)^2(1-L^{-1})^2 + 1\right)y_t$$

に注意すると，

$$c_t = (\lambda(1-L)^2(1-L^{-1})^2)y_t$$

と

$$y_t = \frac{1}{(\lambda(1-L)^2(1-L^{-1})^2 + 1)}x_t$$

なので

$$c_t = \left(\frac{\lambda(1-L)^2(1-L^{-1})^2}{1 + \lambda(1-L)^2(1-L^{-1})^2}\right)x_t$$

を得る。この表現から，HP フィルターが元の時系列から，$I(1)$ から $I(4)$ の単位根過程を除去することがわかる。

再び HP フィルターの級数展開による表現の議論に戻る。$F(z)$ の形から z の対称式になることがわかる。また

$$F(z^*) = 0 \Longrightarrow F\left(\frac{1}{z^*}\right) = 0$$

も容易に確認できる。z が実数のとき $F(z) > 0$ であるから，$F(z)$ のゼロは，共役複素数しかありえない。その共役な複素数を θ_1, θ_2 とおく。

上のことから，

$$F(z) = \left(\frac{\lambda}{\theta_1\theta_2}\right)(1-\theta_1 z)(1-\theta_2 z)(1-\theta_1 z^{-1})(1-\theta_2 z^{-1}),$$
$$(|\theta_i| < 1, i = 1, 2)$$

なので $G(z) = F^{-1}(z)$ は定数項の逆数を別とすると

$$\frac{1}{(1-\theta_1 z)(1-\theta_2 z)(1-\theta_1 z^{-1})(1-\theta_2 z^{-1})} \tag{8}$$

という要素をもつから，これの部分分数展開

$$A_0 + \frac{A_1}{1-\theta_1 z} + \frac{A_2}{1-\theta_2 z} + \frac{A_3}{1-\theta_1 z^{-1}} + \frac{A_4}{1-\theta_2 z^{-1}} \tag{9}$$

を考えて未定係数 A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 を決定すればよい。あとは，各項有理式の級数展開をまとめて時間領域の移動平均フィルターの実係数を $F(z)$ の共役な 2 個のゼロを用いてあらわせば目的が達成される。

未定係数の決定のための条件は，(8) と (9) が等しいとおいた式で，$z = 1$ を代入して

$$\frac{1}{(1-\theta_1)(1-\theta_2)(1-\theta_1)(1-\theta_2)}$$
$$= A_0 + \frac{A_1}{1-\theta_1} + \frac{A_2}{1-\theta_2} + \frac{A_3}{1-\theta_1} + \frac{A_4}{1-\theta_2}$$

を得る。一方，(8) と (9) から得られる

$$1 = A_0(1-\theta_1 z)(1-\theta_2 z)(1-\theta_1 z^{-1})(1-\theta_2 z^{-1})$$

$$+A_1(1-\theta_2 z)(1-\theta_1 z^{-1})(1-\theta_2 z^{-1})$$
$$+A_2(1-\theta_1 z)(1-\theta_1 z^{-1})(1-\theta_2 z^{-1})$$
$$+A_3(1-\theta_1 z)(1-\theta_2 z)(1-\theta_2 z^{-1})$$
$$+A_4(1-\theta_1 z)(1-\theta_2 z)(1-\theta_1 z^{-1})$$

で $z=1/\theta_1, z=1/\theta_2, z=\theta_1,\theta_2$ を順次代入して，

$$A_1=\left(\left(1-\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)(1-\theta_1^2)(1-\theta_1\theta_2)\right)^{-1}$$
$$A_2=\left(\left(1-\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)(1-\theta_2^2)(1-\theta_1\theta_2)\right)^{-1}$$
$$A_3=\left(\left(1-\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)(1-\theta_1^2)(1-\theta_1\theta_2)\right)^{-1}$$
$$A_4=\left(\left(1-\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)(1-\theta_2^2)(1-\theta_1\theta_2)\right)^{-1}$$

を得る。このことから $A_1=A_3, A_2=A_4$，また $A_2=\bar{A}_1$ という関係も明らかである。そこで，θ_1,θ_2 が共役であったことに注意して，

$$\theta_1=re^{\sqrt{-1}m},\ \theta_2=re^{-\sqrt{-1}m}$$

と書くことにして A_1, A_2 を表すと，

$$A_1=\left((1-e^{-2\sqrt{-1}m})(1-r^2e^{2\sqrt{-1}m})(1-r^2)\right)^{-1}$$
$$A_2=\left((1-e^{2\sqrt{-1}m})(1-r^2e^{-2\sqrt{-1}m})(1-r^2)\right)^{-1}$$

ここで

$$G(z)=\left(\frac{\theta_1\theta_2}{\lambda}A_0+\frac{A_1}{1-\theta_1 z}+\frac{A_2}{1-\theta_2 z}+\frac{A_1}{1-\theta_1 z^{-1}}+\frac{A_2}{1-\theta_2 z^{-1}}\right)$$

であることと，$\theta_1=\bar{\theta_2}, A_1=\bar{A_2}$ に注意すると

$$y_t=\frac{\theta_1\theta_2}{\lambda}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(A_1\theta_1^j+A_2\theta_2^j)x_{t-j}+\sum_{j=0}^{\infty}(A_1\theta_1^j+A_2\theta_2^j)x_{t+j}\right) \qquad (10)$$

となる。

最終的に

$$A_1=Re^{\sqrt{-1}M},\quad A_2=Re^{-\sqrt{-1}M}$$

とおいて，実係数の移動平均の形

$$G(L)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}g_jL^j$$

に表現すればよい。

以下，煩雑な計算は飛ばして，無限大サンプルに対する対称移動平均となるHPフィルターの実係数の結果のみを示しておく。

$$g_j=\begin{cases} r^j a_1\cos(bj)+a_2\sin(bj) & (j\geq 0)\\ g_{-j} & (j<0)\end{cases} \qquad (11)$$

なお，

$$a_1=\frac{2r^2R}{\lambda}\cos M,\quad a_2=\frac{2r^2R}{\lambda}\sin M,\quad b=|m|$$

である。

ここで，無限大サンプルについて考える限り，HPフィルターが無限大の次数をもった対称移動平均となっていることに注意しなくてはならない。このことは，HPフィルターに限らず有限次数の移動平均の逆変換は一般に無限次数となることからみて，不思議ではない。

この節の前半で示したように，有限サンプルに対する線形変換としてのHPフィルター H は，λ の値に依存する行列 $I+\lambda^tBB$ の逆行列として得られる。現在のPCの能力では，サンプルサイズ 10^4 のオーダーまでは数値的

に問題なく，ほぼ厳密なフィルターが得られる。もちろん，すぐ上に示した，無限大サンプルの場合の移動平均ラグ多項式（10）の加重の有限階数での切り捨てでも実用的に十分であろう。もっとも無限大サンプルの下でのHPの厳密解の無限多項式表現の実際的な（切り捨てによる）近似と，有限サンプルの厳密解Hの誤差評価，また，有限サンプルに対するHPの厳密解HのサイズTに対する依存性といった問題は残るが，実際のHPフィルターの使用からかんがえて，いずれもやや瑣末な問題かもしれない。

無限大サンプルに対して周波数解析の観点から理想的な移動平均係数が，解析的に得られたが，（11）に現われる各種の変数はすべて，$F(z)$のゼロ，つまり$F(z)=0$の解θ_1, θ_2に依存している。θ_1, θ_2自体はHPフィルターのパラメータλに依存している。実際に用いる移動平均係数を（11）に基づいて計算するとしても，数値解析上のテクニックが必要なことは言うまでもない。どの次数で切り捨てるべきかの基準も，この段階では示されない。

HPフィルターは，単純移動平均フィルターと異なり，パラメトリックなデータ変換であるが，普通使われる場合，月次データで14400，四半期データで1600，年次データで100が推奨されている。これらは，Hodrick and Prescott（1980）の原論文における記述

> ⋯ prior view that a five percent cyclical component is moderately large as is a one-eighth of one percent change in the rate of growth in a quarter. This led us to select $\lambda^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{(1/8)}$ or $\lambda = 1600$ as a value for the smoothing parameter.

に基づいている。ある意味フォークロア（folklore），民間伝承である。

HPフィルターのパラメータλの選択を考えてみよう。Ito（2007）に従って，もともとの時系列$\boldsymbol{x}$に対するHodrick-PrescottのHPフィルターによるデータ変換を状態空間モデルに従う推定問題の解だと解釈する。具体的には，HPフィルターによるデータ変換を，以下の回帰モデル（Ito回帰）のOLSとみなす。

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = Z\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sigma^2 I & O \\ O & \lambda\sigma^2 I \end{pmatrix} \tag{12}$$

ここで

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2T-2},$$

$$Z = \begin{bmatrix} I \\ B \end{bmatrix}$$

である。Bは（6）の右辺に登場する行列である。この回帰モデルのOLS推定量はHPフィルターによるデータ変換$H\boldsymbol{x}$に等しい。平滑度を決めるパラメータλは，循環成分と見なせる$x_t - y_t$と「推定された」成分の2階変化$\Delta y_{t+1} - \Delta y_t$の分散の比に等しいことがこれで理解できる。

Hodrick-Prescottによるλの選択の推奨基準はアメリカ合衆国のGDPデータに対する大雑把な観察に基づくものである。対象データが変わるとき，上記の基準を盲目的に採用することは適切でない。たとえば，民間投資

データとGDPデータでは，変動の特性が異なるために，四半期データに対して $\lambda = 1600$ を適用することはできない。

「民間伝承」としての λ の選択基準は，上に示したように，対象データに対する観察に依存している。そこで，データに依存して以下に平滑度パラメータを選択するかを議論してみる。次に挙げる選択方法が考えられる。

1. Ito 回帰（12）の OLS 推定を行なった場合の推定残差 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ と $\tilde{\boldsymbol{v}}$ の分散 σ_u^2, σ_v^2 の比率をとる。
2. Akaike Bayes 情報量基準（ABIC）にもとづくモデル選択による。

前者を行なった場合，平滑度パラメータ λ が求まる前に，状態空間推定に基づくフィルタリングが終わっているとみるべきであり，残差の比として得られる λ を用いての HP フィルターによるデータ変換の結果との比較は，興味深い。また，Ito 回帰を行なった場合の残差の特性を調べることは，HP フィルターのそもそもの適用が適切だったか否かに関する判断の材料を提供することに注意しよう。この方法は，簡便性が高く，実際的な平滑度パラメータ λ として強く推奨できる。

後者は前者の考え方をより体系的に Bayes 統計学の枠組みで発展させたものである。最小 2 乗法（OLS）と正規分布の間の密接な関係を使う。回帰モデル（12）の最小 2 乗基準を $\boldsymbol{u}$ の分散 $-2\sigma^2$ で割り，指数変換すると以下を得る。

$$e^{-\frac{1}{-2\sigma^2}<\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}>} \times e^{-\frac{1}{-2\sigma^2}<\boldsymbol{y},\lambda^t BB\boldsymbol{y}>} \tag{13}$$

第 1 項は正規化定数を付加してパラメータ $\boldsymbol{y}$ が与えられたときの $\boldsymbol{x}$ の密度関数と解釈できる。

$$f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y},\sigma^2) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{T}{2}} e^{-\frac{1}{-2\sigma^2}<\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}>} \tag{14}$$

こう考えることで，HP フィルターはデータ $\boldsymbol{x}$ にもとづいて（14）のパラメータを推定する問題とみなせる。

一方第 2 項についても正規化定数 C を付加してパラメータ $\boldsymbol{y}$ の分布を表現する密度関数

$$\pi(\boldsymbol{y}|\sigma^2,\lambda) = Ce^{-\frac{1}{-2\sigma^2}<\boldsymbol{y},\lambda^t BB\boldsymbol{y}>} \tag{15}$$

を考える。

さて $h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y},\sigma^2)\pi(\boldsymbol{y}|\sigma^2,\lambda)$ とすると，これは $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ の同時密度関数となり，もともとの HP フィルターの最小 2 乗基準は h の最大化と等価である。

ここで，HP フィルターの平滑度パラメータ λ の選択の問題を，$\boldsymbol{x}$ が知られたときの $\boldsymbol{y}$ の事後分布を

$$\frac{f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y},\sigma^2)\pi(\boldsymbol{y}|\sigma^2,\lambda)}{\int f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y},\sigma^2)\pi(\boldsymbol{y}|\sigma^2,\lambda)d\boldsymbol{y}} \tag{16}$$

とみなす Bayes 統計学の観点からみてみる。$\boldsymbol{x}$ がえられたときの $\boldsymbol{y}$ の事後分布のモードを推定値としている。HP フィルターの λ の選択の問題は $\boldsymbol{y}$ の事前分布の形状パラメータ（超パラメータ）の問題となる。これについては，Akaike（1980）による Bayes 情報量基準

$$\mathrm{ABIC} = -2\ln\int f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y},\sigma^2)\pi(\boldsymbol{y}|\sigma^2,\lambda)d\boldsymbol{y}$$

を最小にするものを選べばよい。もっともABIC を計算するのはやっかいであるので，実用的ではないかもしれない。はっきり言ってしまえば，そこまで平滑度パラメータ選択にこだわる必要はないと思われる。

7　まとめ

データ変換は，計量分析において頻繁に行なわれる操作であるが，変換を行なう応用計量経済学者が，データ変換そのものの意義や問題点を意識しているとは限らない。時系列に関しては伝統的にデータ変換の応用例が多く，一部の研究者たちが深い研究を行なっている。

時系列に対するデータ変換は工学上の信号推定の意味での平滑化（smoothing）にあたるが，慣用としてフィルタリング（filtering）というよばれかたをする。フィルタリングは，多くの場合経済理論から独立な形で行なわれるために，その意義への誤解から「理論なき計測」とのいわれのない批判を受けることがある。フィルタリングを含む様々なデータ変換を抜きに計量分析が成り立たないという必要悪としてデータ変換を捉えるのではなく，よりよい理論構築のための定型化された事実の発見の有力な手段としてデータ変換（フィルタリング）を捉えることが，実景気循環理論とその発展形として現代マクロ経済学の定番となったDSGE モデル（Dynamic Stochastic General Equilibrium model）による研究の興隆以降，当然視されるようになっている。

時系列データの変換（フィルター）は，有限サンプルを有限次元ベクトルと見なす場合には行列として表現される。これは，実際の数値計算の際に，有用な表現である。無限大サンプルを想定する場合には，ラグ作用素の多項式としての表現をもち，周波数領域においてフィルターを議論する場合に便利である。周波数領域での議論は，移動平均フィルターのように頻繁に使われるフィルターの特性を理解する場合，特に Yule-Slutzky 効果のような根本的な問題点を把握するときに有用である。

Hodrick-Prescott による HP フィルターは，マクロ経済時系列に対するトレンド除去フィルターとして頻繁に使われるが，本質は移動平均フィルターである。その移動平均係数は，行列表現から効率的に計算できる。同時に，周波数領域の議論からも計算するための式が解析的に求められるが，実際にその式によって移動平均係数を数値的に求めることは実用的でない。HP フィルターは，かつて使われた恣意的な移動平均フィルターと異なり，平滑度パラメータをもつパラメトリックなフィルターであるが，パラメータの合理的な選択が真剣に吟味されることは応用上少ない。パラメータの選択の方法として，Ito 回帰によって計算される２種類の分散の比によるものと，Akaike の ABIC によるものが考えられる。

次の稿では，Baxter-King による帯域フィルターと Wavelet 変換を取り上げる。

（経済学部准教授）

参 考 文 献

Akaike, H. (1980) "Likelihood and the Bayes procedure," *TEST*, Vol. 31, No. 1, pp. 143–166.

Baxter, M. and R.G. King (1999) "Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 81, No. 4, pp. 575–593.

Burns, A.F. and W.C. Mitchell (1946) *Measuring Business Cycles*: Natl Bureau of Economic Res.

Fishman, G.S. (1969) *Spectral methods in econometrics*: Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Hodrick, R.J. and E.C. Prescott (1980) "Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation." Carnegie-Mellon University, Working Paper.

Ito, M. (2007) *A New Method for Estimating Economic Models with General Time-varying Structures*: Keio Economic Society, Discussion Paper Series, KESDP 07-8.

King, R.G. and S.T. Rebelo (1993) "Low Frequency Filtering and Real Business Cycles," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 17, No. 1-2, pp. 207–31.

Koopmans, T.C. (1947) "Measurement without Theory," *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 29, No. 3, pp. 161–172.

—— (1949) "Koopmans on the Choice of Variables to be Studied and of Methods of Measurement: A Reply," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 31, No. 2, pp. 86–91.

Kuznets, S. (1961) *Capital in the American economy: its formation and financing*: Princeton: Princeton Univ. Press.

Lucas, R.E. (1976) "Economic Policy Evaluation: A Critique," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 1, No. 2, pp. 19–46.

Nelson, C.R. and C.I. Plosser (1982) "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series: Some Evidence and Implications," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 10, No. 2, pp. 139–62.

Pedersen, T.M. (2001) "The Hodrick–Prescott filter, the Slutzky effect, and the distortionary effect of filters," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 25, No. 8, pp. 1081–1101.

Vining, R. (1949) "Koopmans on the Choice of Variables to be Studied and of Methods of Measurement," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 31, No. 2, pp. 77–86.

Wiener, N. (1949) *Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series*: Wiley.