Title	ダイナミック· ゲームと環境経済学
Sub Title	Dynamic game and environmental economics
Author	赤尾, 健一(Akao, Kenichi)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2008
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.100, No.4 (2008. 1) ,p.951(67)- 967(83)
JaLC DOI	10.14991/001.20080101-0067
Abstract	このノートでは, ダイナミック· ゲームの基礎的な事柄を述べるとともに, その環境経済学への応用について紹介する。天然資源や環境資産, 汚染ストックは広い意味での資本であり, それらの所有権は多くの場合に曖昧である。ダイナミック· ゲームは, このような財の利用を分析するのに適当な分析枠組みである。他方, 環境経済学は, ダイナミック· ゲーム理論の主要な応用分野になっている。 This study, while discussing basic matters of dynamic games, introduces its application to environmental economics. In the context of natural resources and environmental assets, contaminated stock capital is, in a broad sense, capital, and its ownership is often obscure. A dynamic game is an appropriate analytical framework to analyze the use of such assets. On the other hand, the application of the dynamic game theory to environmental economics has become widespread.
Notes	小特集 : 環境経済学の新展開(下)
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20080101-0067

ダイナミック・ゲームと環境経済学
Dynamic Game and Environmental Economics

赤尾 健一(Kenichi Akao)

このノートでは，ダイナミック・ゲームの基礎的な事柄を述べるとともに，その環境経済学への応用について紹介する。天然資源や環境資産，汚染ストックは広い意味での資本であり，それらの所有権は多くの場合に曖昧である。ダイナミック・ゲームは，このような財の利用を分析するのに適当な分析枠組みである。他方，環境経済学は，ダイナミック・ゲーム理論の主要な応用分野になっている。

Abstract

This study, while discussing basic matters of dynamic games, introduces its application to environmental economics. In the context of natural resources and environmental assets, contaminated stock capital is, in a broad sense, capital, and its ownership is often obscure. A dynamic game is an appropriate analytical framework to analyze the use of such assets. On the other hand, the application of the dynamic game theory to environmental economics has become widespread.

「三田学会雑誌」100 巻 4 号（2008 年 1 月）

ダイナミック・ゲームと環境経済学

赤　尾　健　一†

要　　旨

このノートでは，ダイナミック・ゲームの基礎的な事柄を述べるとともに，その環境経済学への応用について紹介する。天然資源や環境資産，汚染ストックは広い意味での資本であり，それらの所有権は多くの場合に曖昧である。ダイナミック・ゲームは，このような財の利用を分析するのに適当な分析枠組みである。他方，環境経済学は，ダイナミック・ゲーム理論の主要な応用分野になっている。

キーワード

微分ゲーム，共有地の悲劇，国際環境協定，コミットメント，二重の不決定性

1　ダイナミック・ゲームについて

1.1　概略

ダイナミック・ゲームは時間を明示的に含むゲームである。それは，プレイヤーの行動に応じて，時間とともに変化する変数（状態変数）を含むという点で，繰り返しゲームと区別される。一方，プレイヤーの数や戦略の分布が，時間を通じて一定である点で，また，プレイヤーは注意深い推論の結果，最適な戦略を確実に選ぶと想定されている点で，動学的な進化ゲームと区別される。情報構造は，ほとんどのケースで完備かつ完全情報が仮定される。また，戦略プロファイルは通常，純粋戦略のみを考える。ダイナミック・ゲームの 2 分類として，連続時間を用いる場合は微分ゲーム，離散時間の場合は差分ゲーム（差分方程式 difference equation に由来する）と呼んでいる。この小論では，主に微分ゲームでダイナミック・ゲームを代表させることにする。ただし，以下の内容は，特に断らない限り，差分ゲームにそのまま翻訳できる。

ゲームのデータは，プレイヤーの集合 $N=\{1,2,...,n\}, 2\leq n<\infty$，各プレイヤー $i\in N$ のとりうる戦略の集合（戦略空間）Σ_i，各プレイヤーの利得を表す関数 J_i，状態変数（資本，天然資源や環境資産）の実現可能な値の集合（状態空間）X，その初期値 x_0，そしてその発展を表す方程式 F で

† *E-mail address*: akao@waseda.jp

ある。具体的には，次のような最適制御問題が，経済学で用いられる典型的な微分ゲームである：各プレイヤー $i \in N$ について

$$\max_{c(t)} J_i, \quad J_i = \int_0^\infty u_i(c(t), x(t)) e^{-\rho_i t} dt \tag{1}$$

$$\text{subject to } \dot{x}(t) = F(x(t), \{\sigma_j\}_{j \in N \setminus \{i\}}, c(t)), \quad c(t) \in U_i, x(t) \in X, \tag{2}$$

$$x(0) = x_0 \text{ given},$$

ただし U_i は Σ_i その他の条件によって与えられる制御の許容集合。

この問題の解 $c_i^*(t)$ を生み出すような戦略 $\sigma_i^* \in \Sigma_i$ が，戦略プロファイル $\{\sigma_j\}_{j \in N}$ に対する第 i プレイヤーの最適反応であり，戦略プロファイル $\{\sigma_i^*\}_{i \in N}$ が，各プレイヤーの最適反応で構成されているならば，それがナッシュ均衡である。

1.2　戦略空間

プレイヤー i の戦略 $\sigma_i(\cdot)$ とは，何かの関数であり，その関数の各時点での値 $c_i(t) = \sigma_i(\cdot)$ がプレイヤーの行動を表す。戦略空間とは，関数空間の一種と考えればよい。ただし，その第一の関心は，戦略＝関数がどのような変数をとるかにある。

経済学で最もなじみがあるのは，変数に状態変数の値をとること，つまり，$\sigma_i(x)$ と表される場合である。この場合，プレイヤーの行動は，時間とは独立で状態変数の値に応じて決まる。このような戦略は定常マルコフ戦略と呼ばれる(1)。次になじみのある戦略空間は，戦略が時点 t の関数となる場合（$\sigma_i(t)$）で，これはオープン・ループ戦略と呼ばれる。この用語は不確実性下での最適制御理論に由来する。将来何が起きようと各時点での行動を予め決めてしまうような制御の仕方をオープン・ループ制御と呼ぶ。一方，各時点での状況に応じて行動が条件付きで与えられる制御の仕方は，クローズド・ループ制御とかフィードバック制御と呼ばれる。定常マルコフ戦略は，クローズド・ループ／フィードバック戦略の一種である。

以上の二つの戦略空間を一般化して，状態変数の値と時点の両者に依存する戦略（$\sigma_i(x, t)$）を考えることもできる。これもマルコフ戦略と呼ばれる。というのは，時間も状態方程式 $\dot{t} = 1$ で与えられる状態変数と解釈できるからである。このマルコフ戦略の観点からすると，オープン・ループ戦略は x が落ちたマルコフ戦略と考えられる。

さらに戦略が，初期値 $(x_0, t_0) = (x_0, 0)$ にもまた，依存する場合が考えられる。つまり戦略が，$\sigma_i(x, t; x_0, t_0)$ と表される場合である。このような戦略空間は，サブゲーム完全な戦略，つまり，いかなる時点，いかなる状態でも（他のプレイヤーの戦略が不変である限り）見直しの必要がないような戦略を選ぶうえで妥当なものである。ただし，ここまで複雑な戦略空間は，一般には用いない。経

(1)　「定常」を省略する方が一般的だが，混乱を避けるために本稿では省略しないことにする。

済動学モデルが，一般に，時間に依存しない自律的な連立微分／差分方程式に帰着することを思い出そう。このようなモデルの場合，各プレイヤーの戦略空間が定常マルコフ $\sigma_i(x)$ であれば，その均衡戦略はサブゲーム完全になる。このことが経済学において，定常マルコフ戦略が好まれてきた主要な理由である。そのナッシュ均衡は，サブゲーム完全であることを強調して，マルコフ完全ナッシュ均衡と呼ばれることがある。

これに対して，オープン・ループ戦略の場合，均衡経路から外れてしまうと，元の均衡戦略は望ましいものではなくなる[(2)]。つまり，サブゲーム完全性を満たさない。したがって戦略空間にオープン・ループを採用するには，プレイヤーは初期時点で決めた計画を決して変えない（完全なコミットメント）か，あるいは変えることができないと仮定しなければいけない。たとえば，Carraro and Topa（1995）による環境保全技術の開発競争の分析では，研究開発は多額の初期投資を要するために，いったん始めてしまうと撤退できないとして，戦略空間をオープン・ループで与えている。しかし，多くの場合，これらの想定は現実妥当性に欠けるために，最近の経済学ではオープン・ループ戦略は不人気である。

より複雑な戦略空間として，戦略が過去のプレイヤーの行動や状態変数の値を変数とする場合も考えられる。このような歴史依存的戦略は，フォーク定理を成立させるために必要になる。すなわち，あるプレイヤーの持続状態からの離脱に対して，それを認識して離脱のコストを課すには，過去のできごとを覚えておかねばならない。微分ゲームの場合，この戦略空間の拡大は，状態方程式をタイムラグをもつ微分方程式，関数微分方程式で表現することを要求する。しかし，関数微分方程式の応用は，一主体の最適化問題でも新しい試みである（たとえば Feichtinger et al., 2003）。このため，歴史依存的戦略を戦略空間にもつ微分ゲームは，ごく簡単なモデルが分析されているに過ぎない。なお，差分ゲームの場合には，その扱いははるかに容易だが，これまで微分ゲームの対応物のようなモデルしか分析されていないようである。

戦略空間の最後の話題として，微分ゲームにおいて，戦略 $\sigma_i(\cdot)$ に要求される関数としての重要な性質について触れたい。各プレイヤーは，（1），（2）で表される最適制御問題を解く。その基礎要件として，（2）の状態方程式に解が存在して一意である必要がある。問題は，この要件を満たそうとして，戦略空間を制限し過ぎる（状態方程式がリプシッツ条件を満たす等）と，均衡解を取りこぼす危険があることである。実際，後に見るように，ある研究（Dockner and Sorger, 1996; Sorger, 1998）では，戦略空間が区分的に連続な関数を許すことで，均衡の連続体の存在を確認している。一方で，仮に区分的に連続な関数のクラスに限るとしても，そのクラスにおけるすべての均衡解が知られているわけではない。微分ゲームで表現される経済モデルの均衡解の完全な特徴づけは，今のところ，

(2)　この性質を「弱い時間整合性」と呼ぶことがある。対応する「強い時間整合性」とはサブゲーム完全性のことである。

手のつけられないような難問である。

1.3　手番と均衡概念

微分ゲームの多くは，同時手番である。さらに言えば，その多くは自律系，同時手番，かつ戦略空間が定常マルコフのゲームである。そのマルコフ完全ナッシュ均衡は，環境経済学の文脈では，いわゆる共有資産（common property resource）の利用パターンを表すものと解釈されたり（Dutta and Sundaram, 1993b; Sorger, 1998 など多数），また国際環境協定の（自己拘束的な）交渉結果を表すものとして解釈されている（Dockner and Long, 1993）。

手番に先手，後手があるシュタッケルベルグ均衡も考察されている。環境問題では，特に気候変動に対する南北間の協力が，この均衡概念を用いて数多く分析されている。すなわち「北」が協力のオファーを出し，「南」がそれを受けるというものである。たとえば，Matsueda et al.（2006）や，Zaccour とその共同研究者による近年の一連の研究（Breton et al., 2006 など）を参照のこと。このような研究のほとんど全てがオープン・ループ戦略を用いた有限計画期間問題である。その計画期間はコミットメントが有効な期間と対応する。問題として，シュタッケルベルグ均衡は，特殊なモデルを除いて，一般に時間整合的ではない（Xie, 1997）。この問題は戦略空間が定常マルコフの場合でも生じる（Dockner et al., 2000, Chapter 5）。

差分ゲームに特有のモデルとして，ダイナミック・クールノー・ゲームと呼ばれる，複占市場でプレイヤーが交互に行動するモデルがある（Maskin and Tirol, 1987, 1988a,b）。Dana and Montrucchio（1986）はその逆問題（任意の解経路に対する標準的仮定を満たす経済モデルの存在）を分析している。環境経済学への応用はないようである。

2　マルコフ完全ナッシュ均衡

ここでは，経済学でもっともよく研究されている同時手番ゲームのマルコフ完全ナッシュ均衡について，具体的なモデルを用いて論じる。プレイヤーの選好，技術は同一であると仮定し，プレイヤーの均衡戦略も同じ場合（対称均衡）に考察を限定する。ゲームでの任意のプレイヤー $i \in N$ の問題が次の最適制御問題で表されるとする：

$$\max_{c(t)\geq 0} \int_0^\infty u(c(t), x(t))e^{-\rho t}dt \tag{3}$$

$$\text{subject to } \dot{x}(t) = f(x(t)) - (n-1)\sigma^*(x(t)) - c(t), x(t) \geq 0,$$

$$x(0) = x_0 > 0 \text{ given},$$

ここで瞬間的効用関数 $u : \mathsf{R}_+^2 \to \mathsf{R} \cup \{-\infty\}$ と（資本または天然資源の）成長関数 $f : \mathsf{R}_+ \to \mathsf{R}$ は，経

済学の標準的な仮定を満たすとする。特に $f(0)=0$ である。任意の初期条件 x_0 について，その最適解が $\sigma^*(x)$ で生成できるならば，戦略プロファイル $\sigma_i(x)=\sigma^*(x), \forall i \in N$ は，対称マルコフ完全ナッシュ均衡を構成する。これは考えられる限り最も単純な微分ゲームのモデルといえるが，それでも興味深い内容をもち，さまざまな未解明の問題が残されている。

2.1　均衡戦略の見つけ方

最適制御問題を解く方法として，変分法，ポントリャーギンの最大値原理，ハミルトン・ジャコビ・ベルマン方程式（以下，HJB 方程式）などがある[(3)]。前 2 者が，時間の関数として最適解の条件を求めるのに対して，HJB 方程式は時間と状態変数の関数として最適解の条件を求める。したがって，マルコフ完全ナッシュ均衡戦略を得るには，HJB 方程式に基づくのが自然なアプローチである。また，均衡戦略を見つけるには，それぞれの方法を十分条件として利用することになる。最大値原理の場合，Mangasarian 条件（ハミルトニアンが制御と状態変数に関して結合的に凹関数である）を使うにしろ，Arrow の十分条件（最大化ハミルトニアンが状態変数に関して凹関数である）を使うにしろ，その条件を満たすために戦略空間は著しく制限されてしまう。一方，HJB 方程式の場合，以上のような凹性は必ずしも必要ではない（Dockner et al., 2000, Lemma 3.1)。以下では，HJB 方程式を最適解の十分条件として利用できるとする。

さて，任意の正の初期値 $x_0>0$ について，上の問題（3）の解が存在して，その最大値を表す評価関数 $V:\mathsf{R}_{++} \to \mathsf{R}$ がうまく定義できると仮定する。さらに微分可能性その他，分析に都合のよいことを仮定する。すると HJB 方程式は

$$\rho V(x) = u(\sigma^*(x), x) + V'(x)(f(x) - n\sigma^*(x)) \tag{4}$$

$$= \max_{c \geq 0} u(c, x) + V'(x)(f(x) - (n-1)\,\sigma^*(x) - c) \tag{5}$$

と書ける。この 2 行目について，内点解 $c^*>0$ を仮定すれば，1 階の条件 $u_c(c^*, x) = V'(x)$ が成立する。陰関数定理が使えるとすれば，$c^* = \sigma^*(x)$ は，x と $V'(x)$ の関数として，$\sigma^*(x) = h(x, V'(x))$ と書ける。これを上式の（4）に代入して

$$\rho V(x) = u(h(x, V'(x)), x) + V'(x)(f(x) - nh(x, V'(x))) \tag{6}$$

を得る。これは $V(x)$ に関する（非正規型の）微分方程式である。これを解くことができれば，適当な初期値とセットで，均衡戦略の候補が見つかる。その候補について，以上の議論で用いた都合のよい仮定が成立することを確認すれば，その候補は実際に均衡戦略であるということになる。

---

(3)　経済学向けに書かれたこの分野のテキストは数多く存在するが，なかでも Dockner et al.（2000, Chapter 3）は，微分ゲームに有用な内容がコンパクトに解説されている。

以上の方法は，HJB 方程式から均衡戦略を見つけるためのもっとも素直な方法と考えられる。しかし，それよりもよく使われているのは，Tsutsui and Mino（1990）による次の方法である[(4)]。上式の（4）を微分して

$$\begin{aligned}\rho V'(x) &= u_c(\sigma^*(x),x)\sigma^{*\prime}(x) + u_x(\sigma^*(x),x)\\ &\quad + V''(x)(f(x)-n\sigma^*(x)) + V'(x)(f'(x)-n\sigma^{*\prime}(x)).\end{aligned} \tag{7}$$

（5）の 1 階の条件 $u_c(\sigma^*(x),x) = V'(x)$ と，それを微分した

$$u_{cc}(\sigma^*(x),x)\sigma^{*\prime}(x) + u_{cx}(\sigma^*(x),x) = V''(x)$$

を（7）に代入すれば，

$$\begin{aligned}\rho u_c(\sigma^*(x),x) &= u_c(\sigma^*(x),x)\sigma^{*\prime}(x) + u_x(\sigma^*(x),x)\\ &\quad + \left[u_{cc}(\sigma^*(x),x)\sigma^{*\prime}(x) + u_{cx}(\sigma^*(x),x)\right](f(x)-n\sigma^*(x))\\ &\quad + u_c(\sigma^*(x),x)(f'(x)-n\sigma^{*\prime}(x)).\end{aligned} \tag{8}$$

これは $\sigma^*(x)$ に関する（非正規型の）微分方程式であり，以下，（6）式の下に示した手順で均衡戦略を見つけることになる。ただし，ここでは 2 階の微分を用いているので，得られた解は（8）を満たすが，必ずしも HJB 方程式自身（4）を満たすことは保証されていない。よって，得られた解が HJB 方程式を満たすかをチェックする必要がある。このことは必ずしも行われていないように思われる。

Tsutsui and Mino（1990）の方法を用いた有名な環境経済学の研究は, Dockner and Long（1993）である。そこでは，マルコフ均衡の連続体が存在すること，そのなかには，割引率 ρ が十分に小さいならば，効率的定常解に十分近い定常均衡解を生成するものが含まれていることが示されている。この結果は，地球環境問題に関する国際交渉の意義に新しい光を当てる。すなわち，国際交渉のプロセスとは，マルコフ完全ナッシュ均衡の連続体のなかから，よりよい均衡解を選ぶものと見なせるのである。彼らは，コミットメントは期待できなくても，話し合いを通じて，よりよいマルコフ完全ナッシュ均衡を選ぶことは可能だと考えている。ただし，残念ながら，その均衡戦略の定義域は，状態空間全体をカバーしない。したがって，その均衡はサブゲーム完全ではない。Rubio and Casino（2002）と Wirl（2007）は，この問題を詳細に検討している。

（4）　Tutui and Mino（1990）は，工学分野で好んで用いられてきた linear-quadratic model（状態方程式が一次式で，目的関数の非積分関数が二次式）について，従来知られていた均衡解（リカッチ微分方程式の解の一つで線形）以外に，均衡解の連続体が存在することを示した。Rowat （2007） もまた参照のこと。

さて，以上のような方法にしたがって，（6）や（8）の微分方程式を，状態空間全体に渡って解くと，連続微分可能なクラスでの均衡戦略を得ることになる。しかし，戦略空間をそのようなクラスに限定する必要はない。状態空間の一部について，これらの微分方程式を解いて，それをつなぎ合わせる，というアイデアが，Dockner and Sorger（1996）と Sorger（1998）で用いられている。そうすることで，彼らは区分的に連続なマルコフ「完全」ナッシュ均衡戦略の連続体を得ている。

均衡戦略を見つけるための別のアプローチとして，特定のマルコフ戦略を指定して，それが均衡戦略となるようなモデルのクラスを求める研究も存在する。代表的なマルコフ戦略は，線形戦略

$$\sigma(x) = ax, a > 0 \tag{9}$$

と最速枯渇戦略

$$\sigma(x) = \begin{cases} k \text{ if } x > 0 \\ 0 \text{ if } x = 0 \end{cases}, k > 0 \tag{10}$$

である。ただし，k は各プレイヤーの最大可能資源収穫量を示し，問題（3）は修正されて，制約条件 $c(t) \leq k$ が追加される。最速枯渇戦略の名前の由来は，もし，$\sup\{f(x)|x \geq 0\} - nk < 0$ ならば，初期条件 x_0 の状態によらず，資源は有限時間のうちに最速スピードで枯渇することによる。線形戦略が得られるモデルのクラスについては Long and Shimomura（1998）と Akao（2007, Appendix A）を参照。また，最速枯渇戦略が均衡戦略となるための必要十分条件は Sorger（1998）によって得られている。[(5)]

2.2　協力解，オープン・ループ均衡との比較

協力解と，オープンループやマルコフ完全ナッシュ均衡のような非協力解の社会厚生上の優劣を論じるというのは，多くの経済学者が思いつくことであろう。Cesar（1994）は，そのような研究の典型例である。彼は，地球温暖化問題に関する国際交渉を考察の対象として，協力が行われる場合，非協力だがコミットメントは完全で約束は必ず守られる場合，そして，非協力かつコミットメントも存在しない状況を，協力解，（特定の）オープン・ループ均衡解，（特定の）マルコフ完全ナッシュ均衡解のそれぞれに対応させ，その厚生水準を調べている。しかし，非協力解は一意的ではなく多均衡が存在する。このため，特定の均衡解の厚生水準を比較することの意味はほとんどない。このような研究は，現在ではあまり重要性を認められていないと考えられる。

特にオープン・ループ均衡に関しては，どのプレイヤーも戦略 $\sigma(t)$ の実行可能性を他のプレイヤーに脅かされない場合，協力解は常にオープン・ループ均衡を構成する。[(6)] よって，オープンルー

（5）　Sorger（1998）は瞬間的効用がストックに依存しないケース（$u(c)$）を扱っている。しかし，その結果を $u(c, x)$ のケースに拡張することは難しくない。Akao（2001）を参照。

（6）　実行可能性が脅かされる場合とは，たとえば他のプレイヤーの過剰採取の結果，資源が有限期間のうちにゼロになってしまい，それ以降の収穫計画が実行できない，といった状況を指す。

プ均衡のうち社会厚生上もっとも望ましいものは，常に社会的最適性を実現していることになる。オープンループ均衡のこの性質に関する注意深い議論として，Dockner et al.（2000, Chapter 12）を参照のこと。また，Dockner and Nishimura（2005）はその具体的な適用例の一つである。

オープン・ループ均衡解とマルコフ完全ナッシュ均衡解の関係を調べるものとして，Reinganum and Stokey（1985）は，一定期間でコミットメントが解かれる区分的オープン・ループ均衡を考察している。コミットメントの期間が十分に長くて計画期間と一致すれば，その均衡はオープン・ループ均衡であり，一方，マルコフ完全ナッシュ均衡は，コミットメントの期間をゼロとした極限のケースと見なせる。彼女たちは，枯渇性資源に関するゲームで，コミットメントの有効期間が短くなるほど資源の収奪は激しくなることを証明している。その結果は示唆的かつもっともらしいが，多均衡の問題は考慮されていない。

協力解とマルコフ完全ナッシュ均衡解の関係については，次のような興味深い結果が知られている。Dockner and Nishimura （2005）は，協力解では資源が最終的に枯渇する（$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$）状況において，非協力解（マルコフ完全ナッシュ均衡解）のなかに，資源が枯渇しないものが存在しうることを示した。これは Hardin の共有地の悲劇（Hardin, 1968）とは全く反対の状況である。差分ゲームでも，Dutta and Sundaram（1993b）が，マルコフ完全ナッシュ均衡の定常解で協力解より大きな資源ストックをもつものが存在すること（過剰蓄積）を示している。やはり差分ゲームについてだが，協力解が単調に定常状態に収束するのに対して，マルコフ完全ナッシュ均衡解はカオスになる可能性も報告されている。（Dutta and Sundaram, 1993a はエルゴード・カオスを，Dockner and Nishimura 1999 は Li-Yorke の意味でのカオスを得ている。）

2.3　多均衡

マルコフ完全ナッシュ均衡の連続体の存在を, 一般的なモデルで示したのは, Sorger（1998）である。問題 (3) を, 瞬間的効用が資源ストック x を含まず ($u(c)$), 収穫量に上限が存在する ($c(t) \leq k$) ように修正すると, 彼の「資源ゲーム」になる。協力解の効率的定常状態を x_ρ で表し, (α_0, α_1) は開区間とする。一人のプレイヤーの努力では資源枯渇を防ぐことができないこと ($\sup\{f(x)|x \geq 0\} < (n-1)\,k$) を含む，ある緩やかな条件[(7)]の下で，任意のパラメター値 $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$ に対応する対称マルコフ完全ナッシュ均衡戦略

$$\sigma^*(x) = \begin{cases} \phi(x;\alpha) & \text{if } x \in [0, x_\rho] \\ k & \text{if } x > x_\rho \end{cases} \tag{11}$$

（7）　制約的な仮定を挙げるとすれば，限界効用の弾力性が $-cu''/u \leq (n-1)/n$ を満たすことである。それによって，対数関数など下に有界でない効用関数は排除される。なお，最速枯渇戦略がナッシュ均衡を構成するためには，効用関数は下に有界でなければならないことに注意。

が存在する。ただし，$\phi(\cdot;\alpha):[0,x_\rho]\to[0,k]$ は連続微分可能な関数で，

(a) $\phi(0;\alpha)=0$;

(b) $\exists x_\alpha\in(0,x_\rho),\phi(x,\alpha)\leqslant f(x)/n$ if $0<x\leqslant x_\alpha$;

(c) $\partial\phi/\partial\alpha<0$ and $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\phi(x_\rho,\alpha)=f(x_\rho)/n$,

を満たす。ここで（b）の性質は，各均衡が大域的に漸近安定な正の（ただし効率的水準よりは小さな水準の）定常状態をもつことを意味している。また，（c）の意味は，パラメター値が十分 α_0 に近い均衡解を選べば，その均衡解は効率的定常状態の近くに十分に長い時間（ただし有限時間）とどまるということである。このことはさらに，仮に初期資源状態が効率的定常状態の十分近くにあるならば，そのような均衡解から得られる生涯効用は，協力解で得られる生涯効用とほとんど同じになることも意味している。この結果は，サブゲーム完全な均衡戦略であることと，ゼロから離れて正の割引率を許すという点で，先に紹介した，Dockner and Long（1993）の結果の 1 つの一般化となっている。

戦略（11）は，資源枯渇を引き起こさないという意味で「持続可能な」戦略である。Sorger（1998）はまた，非持続的な戦略である最速枯渇戦略（10）がマルコフ完全ナッシュ均衡を構成するための必要十分条件も導出している。その条件は，戦略（11）がマルコフ完全ナッシュ均衡を構成するための条件と両立する。Akao and Farzin（2007）は，CIES 効用関数とロジスティック成長関数をもちいたパラメトリック・モデルで，この 2 つの戦略が均衡戦略として十分に広いパラメター値の範囲で共存することを確認している。

以上の Sorger（1998）の研究は，共有地の問題に関して，広く深い含意をもっている。

かつて Partha Dasgupta は，Hardin の共有地の悲劇の有名な一節：「自由の存在を信じる社会では，人々は自らの最大の利益を求めて，荒廃への道を全員で突き進む。共有地における自由は全ての人に荒廃をもたらす。」を引用して，「同じ長さの文章で，これほど有名で，かつ誤りの多い一文を見つけることは難しいだろう。」と評した（Dasgupta, 1982, Chapter 2)。理由は異なるが，Dasgupta の指摘は正しい。すなわち，自由な社会における共有地は，持続的にも非持続的にも利用される可能性がある。さらに，共有地の非協力的利用から，人々がほぼ協力解と同じ生涯利得を得る可能性もあるのである。

問題は，そのいずれの均衡もサブゲーム完全であり，かつ，強（strict）ナッシュ均衡であることである。したがって，どの均衡が選ばれるかを説得的に予測することは難しい[(8)]。このことを具体的

(8)　自律的最適制御問題で表現されるダイナミック・ゲームは，関数空間から戦略（政策関数）を選ぶ静学的なゲームと見なせる。したがって問題は，戦略型で表される協調ゲームの多均衡と形式的に一致する。その均衡選択の議論の応用可能性を探ることは，今後のダイナミック・ゲームの重要課題と考えられる。

な共有地の利用問題に翻訳すると，次のような可能性が示唆される：

(a) 全く同じ条件の 2 つの共同体が，一方は持続的な資源利用を行い，もう一方は破滅的な資源利用を行うことがありうる。このため，「よいコモンズ」と「ダメな共有地」を区別するものを探しても，何も出てこないかもしれない。
(b) ある共同体が，外生的条件の変化なしに，突然それまでの持続的資源利用をやめて荒廃への道を突き進むこともありうる。したがって，これまで賢明な資源利用が行われてきたことを理由に，共有地をそのままの状態においておくという政策は危険かもしれない。

多均衡の問題から離れても，Sorger が導出したマルコフ完全ナッシュ均衡（11）は，面白い解釈を許す。すなわち，その均衡経路は，非常に長い時間，協力解の定常状態の近くにとどまるが，やがてはそこを離れ，より劣った水準（より小さな x）の定常状態に移行する。ダイナミック・ゲームで表現できるような単純な経済があって，何百年も賢明な資源利用を続けているとしよう。しかし，その賢明な資源利用は，永遠には続かないように運命付けられているかもしれない。特に社会経済の構造に何ら変化がなくても，かつての古代文明のように，やがては天然資源の誤った利用によって滅んでゆくかもしれない。Hardin の荒廃の予想は，超長期的には実現するかもしれないのである。

2.4　フォーク定理

フォーク定理に関しては，トリガー戦略を用いた分析が行われている。すでに述べたように，その戦略空間は歴史依存的戦略を含み，歴史に反応して，各プレイヤーは戦略を切り替える。このように，ここでは戦略の切り替えという「戦略の戦略」を考えることになる。協力解その他ナッシュ均衡ではない経路，すなわち，その持続は望ましいが，それから離脱することで（他のプレイヤーの戦略が不変である限り）より大きな利得を得る経路がプレーされている状態から始める。そこから離脱するプレイヤーを発見すると，すべてのプレイヤーは，離脱したプレイヤーが長期的には損をすることになるナッシュ均衡戦略に戦略を切り替える。このとき，ナッシュ均衡の定義により，離脱したプレイヤーも対応する均衡プレーを採用せざるを得ないことに注意しよう。この戦略切り替えの脅しが信頼性をもつ状況において，フォーク定理が成立する。たとえば離脱とその認識のタイムラグが一瞬であれば，離脱の利益はごく小さくなり，定理成立の可能性は高くなる。

漁業を対象にした Kaitala and Pohjola（1988）は，微分ゲームにおけるフォーク定理の代表的な研究である。Dockner et al.（2000, Chapter 6）は，一般的な枠組みで，適切な情報構造，サブゲーム完全性，離脱とその認識のタイムラグ，脅しの信頼性など，このトピックに関する重要な論点を解説している。Benhabib and Radner （1992）は，資源ストックの水準が小さい場合には，トリガー戦略は使えないかもしれないことを発見している。最近の研究では，Polasky et al.（2006）が，状態変数のジャンプを許すという野心的な仮定をおいて，フォーク定理を構成している。

2.5　政策手段

ダイナミック・ゲームにおけるプレイヤー間の戦略的依存関係のために，マルコフ完全ナッシュ均衡は効率的ではない。そこで効率性を実現するために，いかなる政策手段が有用かという問いが生じる。

非効率是正のために，伝統的な経済的政策手段である税／補助金制度の採用を提案する研究がいくつか存在する。微分ゲームでは，Clemhout and Wan（1985），Karp（1992），Benchekroun and Long （1998），Mäler et al.（2003），Sorger （2006）などが，差分ゲームでは，Hoel （1993），Krawczyk and Tidball（2006），Yanase（2006）などが税／補助金制度の分析を行っている。しかし，税／補助金制度は，一般にダイナミック・ゲームでは有効ではない。その税率は，理論上，効率的価格と均衡価格の差を埋めるように設定される。しかし，すでに見たように，ダイナミック・ゲームでは多均衡が一般的であり，したがって適切な税率は一意的には定まらない。仮に特定の均衡解を想定して，特定の税率（資本ストック x に対する非線形関数となる）を設定しても，必ずしも協力解が実現されるとは限らない。税／補助金制度は，非効率的な望ましくない均衡解の実現可能性を排除できないためである。この問題の詳細は Akao （2007）によって分析されている。

上述の諸研究のなかで，唯一，Krawczyk and Tidball （2006）は，多均衡の問題を意識し，マルコフ完全ナッシュ均衡が一意的に決まるモデルを用いている。彼らは，有限計画期間，離散時間モデルを選ぶことで解の一意性を保証した。すなわち，このようなモデルでは，各プレイヤーは計画期間の終わりから後ろ向きにベルマン方程式を解く。有限期間問題なので，その最初の問題（最終期）では，評価関数は一意的に決まって，ゼロである。次に Rosen （1965）による静学モデルのナッシュ均衡の一意性の十分条件を期間効用関数に課す。そうすることで，最終期の均衡戦略が一意的に決まる。その結果，最終期の一つ前の期で用いる評価関数も一意的に決まる。以下，反復的にすべての期のマルコフ完全均衡戦略が一意的に決まる。以上の説明から明らかなように，この仕掛けは，無限計画期間問題では使えない。

税／補助金制度がうまく働かないのは，非効率の原因であると同時に多均衡の原因でもある各プレイヤーの戦略的依存関係を排除できないためである。許可証制度の場合は，状況は少し異なる。Akao （2001, 2007）は，瞬間的効用がストック効果をもたず $u(c)$ と表される場合の（3）の問題で，一定の要件を満たす汚染許可証制度が，プレイヤー間の戦略的依存関係を解消し，その結果，確実に効率的な協力解を均衡で実現できることを示している。ただし，その効率的な均衡経路は弱時間整合的である。また，資本ストック x が効用関数や採取コストに影響する場合には，戦略的依存関係を解消することはできない。

2.6　逆問題と二重の不決定性

ここで逆問題と呼んでいるのは，生産技術が既知で，実現された均衡に関するデータが十分にある状況で，その均衡経路を生成する各プレイヤーの選好を特徴付ける問題のことである。古典的な経済学的逆問題は，積分可能性問題（Samuelson, 1950）である。最近の研究では，複雑な競争均衡経路の可能性を示す研究（Boldrin and Montrucchio, 1986; Mitra and Sorger, 1999）が，逆問題を扱っている。

微分ゲームにおいても，Akao （2007）のテクニックを使って，特定のマルコフ完全ナッシュ均衡経路を生成する，問題 (3) の瞬間的効用関数 $u(c, x)$ を見つけることができる。ただし，そのような効用関数は複数存在し，連続体の濃度で存在する場合もある。このように，ダイナミック・ゲームでは，特定のゲームから多均衡が生じる一方で，特定の均衡を生み出すゲームも一意的には定まらない。このことを Clemhout and Wan（1994）は，「マルコフ均衡の二重の不決定性」と呼んでいる。前者の不決定性は，既に見たように税／補助金制度の有用性を減じるものとして，政策担当者にとって深刻な問題となりうる。一方，後者はより本質的な問題を提起する。すなわち，観察された均衡経路が非効率であることがわかっているにも関わらず，プレイヤーの選好が特定化できないので，何が効率的な経路であるかわからない。

2.7　確率的モデル

これまで決定論的なモデルのみを論じてきたが，確率的微分ゲームもまた研究されている。たとえば，共有資源の時間変化が確率微分方程式で表現されるケースなどである。基本的な方針は，HJB 方程式（（4），(5)）の確率版を用いることである。確率的 HJB 方程式を満たす連続微分可能な評価関数が存在することを前提に分析が行われる。その概説は Dockner et al.（2000, Chapter 8）を参照のこと。最近の研究として，Petrosyan and Yeung（2007）は，マルコフ完全ナッシュ均衡解を導出するとともに，プレイヤー間の所得移転を組み込むことで，常に協力解の持続がその非協力解よりも望ましい状況を作り出せることを示している。彼らは，その結果を，再生可能資源のモデル（連続時間有限計画期間パラメトリック・モデル）によって例示している。

3　環境及び資源経済学への応用

天然資源は資本の一種であり，環境資産もそうである。蓄積性の汚染もまた資本として扱われる。たとえば，酸性雨問題の原因物質である硫黄や窒素の酸化物は，比較的短時間に分解されるが，その分解過程で生じる光化学オキシダント汚染（フローとしての汚染）とともに，それらの降下沈着によって生じる土壌や湖沼の酸性化が深刻な問題となっている。天然資源や汚染を含む環境資産はま

た，多くの場合，制度的あるいは物理的な理由によって所有権が曖昧である。しばしば，その利用者は，自由にそれを利用できる。たとえば，これまで我々は二酸化炭素の捨て場として地球大気を無料で利用してきた。このような財と状況をモデル化するならば，それはダイナミック・ゲーム・モデルになるだろう。反対に，ダイナミック・ゲームの側からすれば，環境および資源経済学の諸問題は，ダイナミック・ゲーム理論の主要な応用分野になっている。

ダイナミック・ゲームの環境及び資源経済学への応用は，もし，それが汚染を扱うならば汚染ゲームになり，資源を扱うならば資源ゲームになる。ローカル・コモンズを対象とするならば，それは共有地の悲劇を論じることになり，地球大気のような地球公共財を対象とするならば，それは国際環境協定を論じることになる。このような環境問題や資源問題に応用されたダイナミック・ゲームについては，これまでにも言及してきた。ここでは，最後に，近年の研究のなかから，上で言及していない特徴的な研究をいくつか紹介する。

貿易と環境の問題を扱うものとして，Batabyal and Beladi（2006）は天然資源が買手独占の状態にあるときの天然資源の保全と輸入関税の関係を議論している。モデルは一般的な関数型を用いた連続時間有限期間モデルであり，均衡概念はオープンループ・シュタッケルベルグ均衡である。Cabo and Martín-Herrán（2006）も貿易と環境の問題を扱っている。そこでは生物多様性が「南」の生産要素の一つであり，その生産物を「北」は輸入している。「北」からの所得移転が生物多様性に影響すると仮定して，いくつかのシナリオの下でオープン・ループ・ナッシュ均衡が分析されている。モデルは，連続時間有限期間パラメトリック・モデルである。[9] Fernandez（2002）はアメリカ・メキシコ間の貿易自由化が両国国境を流れる国際河川の汚染にどのように影響するかを分析している。その特徴は，具体的なデータによってモデルをカリブレーションし，数値解を示していることである。彼女は，協力解と非協力解（マルコフ完全ナッシュ均衡）の両方で，貿易自由化はメキシコの汚染を減少させるという結果を得ている。モデルは，連続時間無限計画期間の linear-quadratic モデルである。

Long（2006）は資本の利用効率（capacity utilization）が汚染発生量に影響するモデルで，2 国の非協力解（マルコフ完全ナッシュ均衡）と所得移転による両国の厚生改善の可能性を分析している。モデルは連続時間無限計画期間パラメトリック・モデルである。同じく 2 国間の所得移転を論じる研究として，Jørgensen and Zaccour（2001）は，サブゲーム完全性を満たす所得移転政策を導出している。ダイナミック・ゲームでは珍しい一方向の汚染外部性（汚染国と被害国が完全に分かれている）を取り上げている点も特徴である。連続時間有限計画期間の一般的な関数型のモデルが用いられ，均衡概念はマルコフ完全ナッシュ均衡である。

(9)　ここでは特定の関数型を用いた linear-quadratic モデル以外をパラメトリック・モデルと呼ぶことにする。

Dechert and Brock（2000）は湖の汚染問題を扱っている。モデルは，連続時間無限計画期間パラメトリック・モデルおよびその離散時間バージョンである。興味深い点は，湖の浄化能力に関する力学系であり，非凸性の存在によって，生態学的なレジームシフト，すなわち，汚染の少ない均衡からそうでない均衡への急速な転換が生じる可能性がある。彼らは，湖の非協力的利用をオープンループ・ナッシュ均衡によって表している。そして，協力解が大域的に漸近安定な内点定常状態をもつ一方で，非協力解に汚染の臨界点（Skiba point あるいは DNS point と呼ばれる）があって，初期の汚染水準によっては，ひどく汚染された状態に均衡経路が収束する可能性があることを示している（Mäler et al., 2003; Brock and Starrett, 2003 もまた参照のこと）。彼らのモデルは，上で紹介した Dockner and Nishimura（2005）と形式的に共通しているが，議論されている解経路の性質は全く異なる。

生態系に関係する論文のなかでも研究対象がユニークなのが，Bhat and Huffaker（2007）である。彼らは，ビーバー（ダムを作って，時々氾濫を起こすため農業者にはやっかいものの野生生物）に関して，その共同管理を分析している。モデルは，連続時間無限計画期間パラメトリック・モデルであり，均衡概念はマルコフ完全ナッシュ均衡である。彼らのビーバーは，形式的には負の双方向外部性の一種であり，隣接する各地域の個体群は，拡散し，空間的な化学平衡関係をもつ汚染物質に対置される。研究では，各地域の個体数を協力的にコントロールするためのトリガー戦略（歴史依存的戦略）が考察されている。ただし，協力解の持続のためには所得移転が必要であり，その必要額はストック量（ビーバー個体数）に応じて変化する。彼らはマルコフ的にデザインされた所得移転スキームで，再交渉防止性（renegotiation-proofness）を満たすものが存在することを示している。

（早稲田大学社会科学部教授）

参 考 文 献

[1] Akao, K. (2007) “Tax schemes in a class of differential games,” *Economic Theory* (forthcoming).

[2] Akao, K. (2001) “Some results for resource games,” *Waseda University IRCPEA Working Paper Series* **2009**.

[3] Akao, K. and Y. H. Farzin (2007) “When is it optimal to exhaust a resource in a finite time?” *Ecological Research* **22**, 422–430.

[4] Batabyal and Beladi (2006) “A Stackelberg game model of trade in renewable resources with competitive sellers,” *Review of International Economics* **14**, 136–147.

[5] Benchekroun, H. and N. V. Long (1998) “Efficiency inducing taxation for polluting oligopolists,” *Journal of Public Economics* **70**, 325–342.

[6] Benhabib, J. and R. Radner (1992) “The joint exploitation of a productive asset: a game-theoretic approach,” *Economic Theory* **2**, 155–190.

[7] Bhat, M. G. and R. G. Huffaker (2007) "Management of a transboundary wildlife population: a self-enforcing cooperative agreement with renegotiation and variable transfer payments," *Journal of Environmental Economics and Management* **53**, 54–67.

[8] Boldrin, M. and L. Montrucchio (1986) "On the indeterminacy of capital accumulation paths," *Journal of Economic Theory* **40**, 26–39.

[9] Breton, M., G. Martín-Herrán, and G. Zaccour (2006) "Equilibrium investment strategies in foreign environmental projects," *Journal of Optimization Theory and Applications* **130**, 23–40.

[10] Brock, W. A. and D. Starrett (2003) "Managing systems with non-convex positive feedback," *Environmental and Resource Economics* **26**, 575–602.

[11] Cabo, F. and G. Martín-Herrán (2006) "North-south transfers vs biodiversity conservation: a trade differential game," *Annals of Regional Science* **40**, 249–278.

[12] Carraro, C. and G. Topa (1995) "Taxation and environmental innovation," *in* Carraro, C. and J. A. Filar (eds.): *Control and Game-Theoretic Models of the Environment* (*Annals of the International Society of Dynamic Games* **2**), 109–139, Birkhäuser.

[13] Cesar, H. S. J. (1994) *Control and Game Models of the Greenhouse Effect: Economics Essays on the Comedy and Tragedy of the Commons* (*Lecture notes in economics and mathematical systems* **416**). Springer-Verlag.

[14] Clemhout, S. and H. Y. Wan (1994) "The non-uniqueness of Markovian strategy equilibrium: the case of continuous time models for nonrenewable resources," *in* Başar, T. and Haurie, A. (eds.): *Advances in Dynamic Games and Applications* (*Annals of the International Society of Dynamic Games* **1**). Birkhäuser. 339–355 (1994)

[15] Clemhout, S. and H. Y. Wan (1985) "Dynamic common property resources and environmental problems," *Journal of Optimization Theory and Applications* **46**. 471–481.

[16] Dana, R.-A. and L. Montrucchio (1986) "Dynamic complexity in duopoly games," *Journal of Economic Theory* **40**, 40–56.

[17] Dasgupta, P. (1982) *The Control of Resources.* Harvard University Press.

[18] Dechert, W. D. and W. A. Brock (2000) "The lake game," *University of Wisconsin, Madison, Department of Economics Working Paper* **2003–24**.

[19] Dockner, E. J., Jørgensen, S., Long, N. V. and Sorger, G. (2000) *Differential Games in Economics and Management Science*. Cambridge University Press.

[20] Dockner, E. J. and N. G. Long (1993) "International Pollution Control: Cooperative versus Noncooperative Strategies," *Journal of Environmental Economics and Management* **24**, 13–29.

[21] Dockner, E. J. and K. Nishimura (2005) "Capital accumulation games with a non-convex production function," *Journal of Economic Behavior and Organization* **57**, 408–420.

[22] Dockner, E. J. and K. Nishimura (1999) "Transboundary pollution in a dynamic game model," *Japanese Economic Review* **50**, 443–456.

[23] Dockner, E. J. and G. Sorger (1996) "Existence and properties of equilibria for a dynamic game on productive assets," *Journal of Economic Theory* **71**, 209–227.

[24] Dutta, P. K. and R. K. Sundaram (1993a) "How different can strategic models be?" *Journal of Economic Theory* **60**, 42–61.

[25] Dutta, P. K. and R. K. Sundaram (1993b) "The tragedy of commons?" *Economic Theory* **3**, 413–426.

[26] Feichtinger, G., G. Tragler, and V. M. Veliov (2003) "Optimality conditions for age-structured control systems," *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **288**, 47-68.

[27] Fernandez, L. (2002) "Trade's dynamic solutions to transboundary pollution," *Journal of Environmental Economics and Management* **43**, 386–411.

[28] Jørgensen, S. and G. Zaccour (2001) "Time consistent side payments in a dynamic game of downstream pollution," *Journal of Economic Dynamics and Control* **25**, 1973–1987.

[29] Hardin, G. (1968) "The tragedy of the commons," *Science* **162**, 1243-1248.

[30] Hoel, M. (1993) "Intertemporal properties of an international carbon tax," *Resource and Energy Economics* **15**, 51–70.

[31] Kaitala, V. and M. Pohjola (1988) "Optimal recovery of a shared resource stock: a differential game model with efficient memory equilibria," *Natural Resource Modeling* **3**, 91–119.

[32] Karp, L. (1992) "Efficiency inducing tax for a common property oligopoly," *Economic Journal* **102**, 321–332.

[33] Krawczyk, J. B. and M. Tidball (2006) "A discrete-time dynamic game of seasonal water allocation," *Journal of Optimization Theory and Applications* **128** 411–429.

[34] Long, N. V. (2006) "Capacity utilization and investment in environmental quality," *Environmental Modeling and Assessment* **11**, 169–177.

[35] Long, N. V. and K. Shimomura (1998) "Some results on the Markov equilibria of a class of homogenous differential games," *Journal of Economic Behavior and Organization* **33**, 557–566.

[36] Mäler, K.-G., A. Xepapadeas, and A. de Zeeuw (2003) "The economics of shallow lakes," *Environmental and Resource Economics* **26**, 603–624.

[37] Maskin, E. and J. Tirole (1988a) "A theory of dynamic oligopoly, I: Overview and quantity competition with large fixed costs," *Econometrica* **56**, 549–569.

[38] Maskin, E. and J. Tirole (1988b) "A theory of dynamic oligopoly, II: Price competition, kinked demand curves and Edgeworth cycles.," *Econometrica* **56**, 571–599.

[39] Maskin, E. and J. Tirole (1987) "A theory of dynamic oligopoly, III: Cournot Competition," *European Economic Review* **31**, 947–968.

[40] Matsueda, N., K. Futagami, and A. Shibata (2006) "Environmental transfers against global warming: a credit-based program," *International Journal of Global Environmental Issues* **6**, 47–72.

[41] Mitra, T. and G. Sorger (1999) "Rationalizing policy functions by dynamic optimization," *Econometrica* **67**, 375–392.

[42] Petrosyan, L. A. and D.W.K. Yeung (2007) "Subgame-consistent cooperative solutions in randomly furcating stochastic differential games," *Mathematical and Computer Modelling* **45**, 1294–1307.

[43] Polasky, S., N. Tarui, G. M. Ellis, and C. F. Mason (2006) "Cooperation in the commons," *Economic Theory* **29**, 71–88.

[44] Reinganum, J. F. and N. Stokey (1985) "Oligopoly extraction of a common property natural resource: The importance of the period of commitment in dynamic games," *International Economic Review* **26**, 161–173.

[45] Rosen, J. B. (1965) "Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games," *Econometrica* **33**, 520–534.

[46] Rowat, C. (2007) "Non-linear strategies in a linear quadratic differential game," *Journal of Economic Dynamics and Control* **31**, 3170–3202.

[47] Rubio, S. J. and B. Casino (2002) "A note on cooperative versus non-cooperative strategies in international pollution control," *Resource and Energy Economics* **24**, 251–261.

[48] Samuelson, P. A. (1950) "The problem of integrability in utility theory," *Economica* **17**, 355–385.

[49] Sorger, G. (2006) "A dynamic common property resource problem with amenity value and extraction costs," *International Journal of Economic Theory* **1**, 3–19.

[50] Sorger, G. (1998) "Markov-perfect Nash equilibria in a class of resources games," *Economic Theory* **11**, 78–100.

[51] Tsutsui, S. and K. Mino (1990) "Nonlinear strategies in dynamic duopolistic competition with sticky prices," *Journal of Economic Theory* **52**, 136–161.

[52] Wirl, F. (2007) "Do multiple Nash equilibria in Markov strategies mitigate the tragedy of the commons?" *Journal of Economic Dynamics and Control* **31**, 3723–3740.

[53] Xie, D. (1997) "On time inconsistency: a theoretical issue in Stackelberg differential games," *Journal of Economic Theory* **76**, 412–430.

[54] Yanase, A. (2006) "Dynamic voluntary provision of public goods and optimal steady-state subsidies," *Journal of Public Economic Theory* **8**, 171–179.