Title	荷重付きSobolev空間における非凸変分問題の存在定理と表現定理
Sub Title	Nonconvex variational problem with recursive integral functionals in Sobolev spaces : existence and representation
Author	佐柄, 信純(Sagara, Nobusumi)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2007
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.99, No.4 (2007. 1) ,p.759(153)- 778(172)
JaLC DOI	10.14991/001.20070101-0153
Abstract	本稿の目的は次の2つである。第1に, 荷重付きSobolev空間のノルム位相を用いて再帰的積分汎関数を目的関数とする非凸変分問題の最適経路の存在を証明する。この証明のために, 積分汎関数の連続性と許容可能経路集合のコンパクト性を示す。存在定理は古典解析学のWeierstrassの定理から従う。第2に, 最適経路の存在を保証する条件の下で再帰的被積分関数が正規被積分関数によって表現できることを証明する。また, 再帰的被積分関数が凸性の条件を満たせば, 正規被積分関数は凸関数であることを示す。これらの結果はLp空間上の非線形汎関数の表現定理を応用することによって得られる。
Notes	小特集 : 経済分析と最適化の数理
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20070101-0153

「三田学会雑誌」99 巻 4 号（2007 年 1 月）

荷重付きSobolev空間における非凸変分問題の存在定理と表現定理*

佐　柄　信　純

要　　旨

本稿の目的は次の 2 つである。第 1 に，荷重付き Sobolev 空間のノルム位相を用いて再帰的積分汎関数を目的関数とする非凸変分問題の最適経路の存在を証明する。この証明のために，積分汎関数の連続性と許容可能経路集合のコンパクト性を示す。存在定理は古典解析学の Weierstrass の定理から従う。第 2 に，最適経路の存在を保証する条件の下で再帰的被積分関数が正規被積分関数によって表現できることを証明する。また，再帰的被積分関数が凸性の条件を満たせば，正規被積分関数は凸関数であることを示す。これらの結果は L^p 空間上の非線形汎関数の表現定理を応用することによって得られる。

キーワード

非凸変分問題, 再帰的積分汎関数, 荷重付き Sobolev 空間, Carathéodory 被積分関数, Nemytskii 作用素

1.　はじめに

Ω を実数の有界開集合，f を $\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ で定義された増大条件[(1)]を満たす Carathéodory 関数[(2)]とする。このとき，

$$I(x) = \int_\Omega f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \qquad (x \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n))$$

で定義される Sobolev 空間 $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ 上の積分汎関数 I が弱下半連続であることは，各 $(t, x) \in$

＊　本稿は Sagara (2007) に若干の加筆を施したものである。本稿は法政大学エイジング総合研究所「人口高齢化に関する国際共同研究」の研究成果の一部であり，その執筆に際して私立大学学術研究高度化推進事業（学術フロンティア），文部科学省科学研究費補助金基盤研究 C（課題番号 18610003）による研究助成を受けた。

†　*E-mail address:* nsagara@hosei.ac.jp

(1)　f が増大条件を満たすとは，ある $\alpha \in L^p(\Omega)$ と非負の実数 β_1, β_2 に対して

$$-(\alpha(t) + \beta_1|x|^p + \beta_2|y|^p) \le f(t, x, y) \;\; \forall (t, x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

となるときをいう。

(2)　Carathéodory 関数の定義については，本稿第 5.1 節を参照せよ。

$\Omega \times \mathbb{R}^n$ に対して $f(t, x, \cdot)$ が $\mathbb{R}^n$ 上の凸関数であることと同値であることが知られている[(3)]。積分汎関数の弱下半連続性と Carathéodory 被積分関数の凸性との間の同値性の究明には長い歴史があるが，起源としては 20 世紀初めの Tonelli の研究にまで遡ることができ，この結果は様々な形で多くの数学者によって研究されてきた[(4)]。

この同値性によれば，Carathéodory 被積分関数の凸性が満たされぬ限り，積分汎関数が弱下半連続にはなり得ないため，非凸変分問題には，一般に最適経路の存在は保証されない。このことは，特に再帰的積分汎関数を扱うときに深刻な問題となる。何故なら，再帰的積分汎関数は非指数的な形で累積的に経路に依存する割引因子を持つため，積分汎関数の弱下半連続性を保証するために被積分関数の凸性を仮定するのは，考察する変分問題に強い制約を課すことになるからである[(5)]。この困難を回避するためには，$W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ の弱位相で非凸変分問題を分析することを断念せざるを得ない。

本稿の目的は次の 2 つである。第 1 に，荷重付き Sobolev 空間のノルム位相を用いて再帰的積分汎関数を目的関数とする非凸変分問題の最適経路の存在を証明する。採用するアプローチは，いわゆる「変分法の直接法」であり，積分汎関数の連続性と許容可能経路集合のコンパクト性が示される。存在定理は古典解析学の Weierstrass の定理から従う。本稿は L^2 ノルム位相を持つ Hilbert 空間で存在定理を証明した Chichilnisky（1977） と Sagara（2001）の結果をさらに拡張したものであるが，これらの研究よりも一般的な再帰的積分汎関数と遥かに弱い有界性条件を課した許容可能経路集合が分析される。

第 2 に，最適経路の存在を保証する条件の下で再帰的被積分関数が正規被積分関数[(6)]によって表現できることを証明する。したがって，最適経路の存在問題において再帰的積分汎関数を考察することは，通常の積分汎関数を考察することに帰着する。また，再帰的被積分関数が凸性の条件を満たせば，正規被積分関数は凸関数であることを示す。これらの結果は Buttazzo and Dal Maso（1983）による L^p 空間上の非線形汎関数の表現定理を応用することによって得られる。

弱位相の代わりにノルム位相を荷重付き Sobolev 空間に導入するのには 2 つの理由がある。第 1 に，一般に位相を強くすれば，関数の連続性を示すのは容易になるので，ノルム位相――実際，これは弱位相よりも強い――の導入によって，積分汎関数の連続性を証明するのに Carathéodory 被積分関数の凸性が不要になり，連続性の議論が比較的簡単になるからである[(7)]。これは Krasnosel'skii（1964）が分析した Carathéodory 関数で定義される Nemytskii 作用素の連続性についての重要な

(3)　Dacorogna（1989, Theorems 3.1 and 3.4）を参照せよ。

(4)　Dacorogna（1989, Chapters 3 and 4）の引用文献を参照せよ。

(5)　再帰的積分汎関数を導入する経済学的な動機付けについては，Becker et al.（1989）を参照せよ。

(6)　正規被積分関数の定義については，本稿第 3 節を参照せよ。

(7)　逆に位相を強めれば，一般にコンパクト性を示すのは難しくなる。

結果に依拠している。

第 2 に，本稿では非有界区間 $\Omega=[0,\infty)$ を考察するため，積分汎関数の可積分性について慎重な取り扱いを要するからである。分析する経路は $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ のノルムでは非有界性を許容するが，経路の成長率自体はある荷重関数で押さえられる。このような空間は荷重付き Sobolev 空間によって適切に表現されるが，これは L^p 空間の閉部分空間として同一視される。再帰的積分汎関数の可積分性は Carathéodory 被積分関数と割引因子の増大条件の下で荷重付き Sobolev 空間の許容可能経路集合の上で保証される。

凸性を仮定せずに最適経路の存在を証明するため，Chichilnisky（1977）はノルム位相を持つ荷重付き Sobolev 空間を初めて最適成長論に導入した。Sagara（2001）は Chichilnisky の結果を再帰的積分汎関数のケースに拡張した。Maruyama（1981）は凸性の条件の下で弱位相を持つ荷重付き Sobolev 空間における存在定理を与えた。再帰的積分汎関数を目的関数とする存在定理に関する最初の厳密な取り扱いは Becker et al.（1989）であるが，彼らの証明は弱位相を持つ局所的絶対連続関数空間の許容可能経路集合の凸性と再帰的被積分関数の凸性に依拠している。Carlson（1990）と Balder（1993）は凸性の仮定の下で Cesari（1983）の下半閉包定理を援用し，Becker et al.（1989）の結果を再帰的積分汎関数を目的関数とする最適制御問題にまで一般化した。

本稿の構成は以下の通りである。第 2 節で荷重付き Sobolev 空間を導入し，その要素を一般化された導関数によって特徴付ける。第 3 節で再帰的積分汎関数を目的関数とする非凸変分問題を定式化し，本稿の目的である存在定理と表現定理を述べる。第 4 節では再帰的効用をともなう 1 部門最適成長モデルに存在定理を応用する。第 5 節では存在定理と表現定理の証明に専念する。

2. 荷重付き Sobolev 空間

$\Omega=[0,\infty)$ を $\mathbb{R}$ の半開区間，$\mathscr{F}$ を Ω の Borel 部分集合からなる σ 集合体とする。Ω から $\mathbb{R}^n$ への可測関数 u で $\|u\|_p=(\int_\Omega |u(t)|^p dt)^{1/p}<\infty\ (1\le p<\infty)$ となるもの全体を $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ と表す。ただし，$|\cdot|$ は $\mathbb{R}^n$ の Euclid ノルム，積分は Ω 上の Lebesgue 測度に関するものとする。Ω から $\mathbb{R}^n$ への無限回連続微分可能な関数で Ω においてコンパクトな台を持つもの全体を $C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$ と表す。関数 $u\in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ の**一般化された導関数** $\dot u$ が $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ に属するとき，すなわち，

$$\int_\Omega \langle u(t),\varphi'(t)\rangle dt=-\int_\Omega \langle \dot u(t),\varphi(t)\rangle dt \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$$

となる $\dot u\in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ が存在するとき，u のノルムを $\|u\|_{1,p}=(\|u\|_p^p+\|\dot u\|_p^p)^{1/p}$ で定義する。ここで，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の内積である。$L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ に属する関数 u で $\|u\|_{1,p}<\infty$ となるもの全体を **Sobolev 空間**といい，$W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ と表す。

ρ を正の値をとる Ω 上の可測関数とする。Ω から $\mathbb{R}^n$ への可測関数 u で $\|u\|_{p,\rho}=(\int_\Omega |u(t)|^p\rho(t)dt)^{1/p}<$

∞ となるもの全体を荷重関数 ρ を持つ荷重付き L^p 空間といい，$L^p_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ と表す。関数 $u \in L^p_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ の一般化された導関数 $\dot{u}$ が $L^p_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ に属するとき，u のノルムを $\|u\|_{1,p,\rho} = \|u\|_{p,\rho} + \|\dot{u}\|_{p,\rho}$ で定義する。関数 $u \in L^p_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ で $\|u\|_{1,p,\rho} < \infty$ となるもの全体を荷重関数 ρ を持つ荷重付き **Sobolev** 空間といい，$W^{1,p}_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ と表す。このノルムの下で $W^{1,p}_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ は可分な Banach 空間になる。[8] $W^{1,p}_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ の各要素 u を $(u,\dot{u})$ と同一視することにより，$W^{1,p}_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ はベクトル空間の直和 $L^p_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n) \oplus L^p_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n) = L^p_\rho(\Omega;\mathbb{R}^{2n})$ の閉部分空間になる。

次の定理は $W^{1,p}_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ の各要素を特徴付ける有用な結果であるが，これは $\rho \equiv 1$ のときに知られている結果の形式的な拡張である。

定理 2.1　$u \in L^p_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$ とする。$u \in W^{1,p}_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ であるための必要十分条件は，ある $\alpha \in L^p_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ と $a \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$u(t) = \int_0^t \alpha(s)ds + a \quad \text{a.e. } t \in \Omega \tag{2.1}$$

が成立することである。

証明　$u \in L^p_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ が(2.1)を満たすものとしよう。φ を $C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$ の任意の試料関数とする。$\int_\Omega \varphi'(t)dt = 0$ より，

$$\int_\Omega \langle u(t), \varphi'(t)\rangle dt = \int_\Omega \left\langle \int_0^t \alpha(s)ds, \varphi'(t) \right\rangle dt$$

である。関数 $t \mapsto \int_0^t \alpha(s)ds$ は Ω 上で局所的に絶対連続であるから，ほとんどすべての $t \in \Omega$ で（通常の意味での）導関数 $\alpha(t)$ を持つ。上の等式の右辺を部分積分すると

$$\int_\Omega \langle u(t), \varphi'(t)\rangle dt = -\int_\Omega \langle \alpha(t), \varphi(t)\rangle dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$$

となる。このことは，u の一般化された導関数 $\dot{u}$ が α に一致することを意味し，$\dot{u} = \alpha \in L^p_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ より，$u \in W^{1,p}_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ が従う。

逆に，$u \in W^{1,p}_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ とする。$v(t) = \int_0^t \dot{u}(s)ds$ $(t \in \Omega)$ とおくと，関数 v は(2.1)の形をしているから，上の議論より，$\dot{v} = \dot{u} \in L^p_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ となるような v の一般化された導関数 $\dot{v}$ が存在する。したがって，$u - v$ の一般化された導関数はゼロであり，$u - v$ は定値関数である。すなわち，ある $a \in \mathbb{R}^n$ に対して $u(t) = v(t) + a$ a.e. $t \in \Omega$ が成立する。ゆえに，$u(t) = \int_0^t \tilde{u}(s)ds + a$ a.e. $t \in \Omega$ である。　□

注意 2.1　定理 2.1 は $u \in W^{1,p}_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ ならば，$u(t) = \tilde{u}(t)$ a.e. $t \in \Omega$ となるような Ω 上の局所的絶対連続関数 $\tilde{u}$ が存在し，u の一般化された導関数 $\dot{u}$ が $\tilde{u}$ の通常の意味での導関数 $\tilde{u}'$ に等しいことを

(8)　Kufner et al.（1977, Theorem 8.10.2）を参照せよ。

意味する。したがって，一般性を失うことなく，任意の $u \in W^{1,p}_{\rho}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ は $u(t) = \int_0^t \tilde{u}'(s)ds + u(0)$ a.e. $t \in \Omega$ の形に表される。この事実は第 4 節と第 5 節で明示的に用いられる。

3.　主要定理

本稿で分析する変分問題は

$$I(x) = \int_{\Omega} \left[f(t, x(t), \dot{x}(t)) F\left(t, \int_0^t r(s, x(s), \dot{x}(s))ds\right)\right] dt$$

で与えられる再帰的積分汎関数 $I : W^{1,p}_{\rho}(\Omega; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を微分包含式

$$\dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t)) \qquad \text{a.e. } t \in \Omega,\ \ x(0) \in X_0 \subset \mathbb{R}^n$$

を満たす経路 $x \in W^{1,p}_{\rho}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ の集合上で最小化することである。ただし，f と r は $\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上の可測関数, F は $\Omega \times \mathbb{R}$ 上の可測関数，Γ は $\Omega \times X$ から $\mathbb{R}^n$ への多価写像, X は X_0 を含む $\mathbb{R}^n$ の部分集合である。多くの応用では，$t \in \Omega$ は時間，f は費用関数，r は割引関数，F は可変的割引因子，積分 $\int_0^t r(s, x(s), \dot{x}(s))ds$ は過去の経路への累積的な依存関係を明示的に導入したものである。

X_0 の中に初期条件を持つ許容可能経路集合を

$$\mathscr{X}_{\Gamma} = \left\{ x \in W^{1,p}_{\rho}(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid \dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t)) \ \text{ a.e. } \ t \in \Omega,\ x(0) \in X_0 \right\}$$

によって定義すると，考察する問題は

$$\min\{I(x) \mid x \in \mathscr{X}_{\Gamma}\} \tag{P}$$

の解を求めることである。

存在定理

次の仮定は再帰的積分汎関数の連続性と許容可能経路集合のコンパクト性を保証するものである。

仮定 3.1　(i)　ほとんどすべての $t \in \Omega$ に対して $f(t, \cdot, \cdot)$ は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ で連続，各 $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ に対して $f(\cdot, x, y)$ は Ω で可測である。

(ii)　ある $\alpha \in L^1_{\rho}(\Omega)$ と定数 $a_1, a_2 > 0$ に対して

$$|f(t, x, y)| \le \alpha(t) + a_1|x|^p + a_2|y|^p \quad \forall (t, x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

が成立する。

(iii)　ほとんどすべての $t \in \Omega$ に対して $F(t, \cdot)$ は $\mathbb{R}$ で連続，各 $z \in \mathbb{R}$ に対して $F(\cdot, z)$ は Ω で

可測である。

(iv)　ほとんどすべての $t \in \Omega$ に対して $r(t,\cdot,\cdot)$ は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ で連続，各 $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ に対して $r(\cdot,x,y)$ は Ω で可測である。

(v)　ある $\beta \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に対して

$$|r(t,x,y)| \leq \beta(t) \quad \text{a.e. } t \in \Omega \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

および

$$\left| F\left(t, \int_0^t \beta(s)ds\right)\right| \leq \rho(t) \quad \text{a.e. } t \in \Omega$$

が成立する。

仮定 3.2　(i)　$\mathscr{X}_\Gamma$ は $W^p_\rho(\Omega,\mathbb{R}^n)$ の閉集合である。

(ii)　ある $\lambda \in L^p_\rho(\Omega)$ に対して

$$\max\{|x(t)|, |\dot{x}(t)|\} \leq \lambda(t) \quad \text{a.e. } t \in \Omega \ \ \forall x \in \mathscr{X}_\Gamma$$

が成立する。

定理 3.1　荷重関数 ρ を連続とする。仮定 3.1 と仮定 3.2 の下で問題（P）の解が存在する。

一般には，仮定 3.2 が Γ にどのような条件を課すことになるのか明確ではない。仮定 3.2 が成立するための Γ に関する十分条件は，次の定理で与えられる。

定理 3.2　$A(t)$ を Γ の t での切り口，すなわち，

$$A(t) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid y \in \Gamma(t,x)\}$$

とする。次の 3 条件が満たされるものとする。

(i)　X_0 は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である.

(ii)　ほとんどすべての $t \in \Omega$ に対して $A(t)$ は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ の閉集合である。

(iii)　ある $\lambda \in L^p_\rho(\Omega)$ に対して

$$\max\{|x|, |y|\} \leq \lambda(t) \quad \text{a.e. } t \in \Omega \ \ \forall (x,y) \in A(t)$$

が成立する。

このとき，$\mathscr{X}_\Gamma$ は仮定 3.2 を満たす。

定理 3.1 は連続性を満たす任意の荷重関数について成り立つ。第 4 節の例で見るように，実際には，どのような荷重関数を選択するかは分析する応用問題に依存する。特に，荷重付き Sobolev 空間をできるだけ狭くしたければ，荷重関数をできるだけ大きくするのが望ましい。実際，$0 < \rho_1 \leq \rho_2$

ならば，$W^{1,p}_{\rho_2}(\Omega;\mathbb{R}^n) \subset W^{1,p}_{\rho_1}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ となるからである。

例 3.1　$\mathscr{X}_\Gamma$ が非空になるための十分条件の 1 つを以下で与える。この条件は第 4 節で検討する標準的な最適成長モデルで満たされる。

- 正の実数値をとるある関数 $\delta \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ と定数 $q > 0$ に対して
  （a）　$-\delta(t)x \in \Gamma(t,x)$ a.e. $t \in \Omega$ $\forall x \in X$
  （b）　$2\rho(t) + qt \leq \max\left\{p\int_0^t \delta(s)ds, \delta(t)^p\right\}$ a.e. $t \in \Omega$
  が成立する。

条件（a）は任意の初期条件 $x_0 \in X_0$ に対して $x(t) = x_0 \exp(-\int_0^t \delta(s)ds)$ で定義される経路が微分包含式 $\dot{x}(t) \in \Gamma(t,x(t))$ a.e. $t \in \Omega$ の解であることを意味する。条件（b）より

$$
\begin{aligned}
|x(t)|^p \rho(t) &= |x_0|^p \exp\left(-p\int_0^t \delta(s)ds\right)\rho(t) \\
&\leq |x_0|^p \exp(-2\rho(t) - qt)\exp(\rho(t)) \\
&= |x_0|^p \exp(-\rho(t) - qt)
\end{aligned}
$$

が a.e. $t \in \Omega$ で成立する。したがって，$x \in L^p_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ である。上の不等式と条件（b）より

$$
|\dot{x}(t)|^p \rho(t) = \delta(t)^p |x(t)|^p \rho(t) \leq |x_0|^p \exp(-\rho(t) - qt)\exp(\delta(t)^p) = |x_0|^p \exp(-qt)
$$

が a.e. $t \in \Omega$ で成立する。したがって，$\dot{x} \in L^p_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ である。ゆえに，$x \in \mathscr{X}_\Gamma$ となる。

注意 3.1　仮定 3.1 と仮定 3.2 は Chichilnisky（1977）と Sagara（2001）の仮定をかなり緩和したものである。特に，$\mathscr{X}_\Gamma$ のコンパクト性を保証するため，彼らは仮定 3.2 に加えて，ある $l \in L^p_\rho(\Omega)$ が存在して $x \in \mathscr{X}_\Gamma(x)$ ならば，$|\dot{x}(t+s) - \dot{x}(t)| \leq l(t)s$ $\forall t, s \in \Omega$ が成り立つことを必要とした. これは $\mathscr{X}_\Gamma$ において $\dot{x}$ に一様に課される Lipschitz 条件である。しかし，最適成長論におけるもっともらしい仮定の下で，この条件を保証するような多価写像 Γ を構築することは困難であり，この条件は $\mathscr{X}_\Gamma$ に対する厳しい制約になる。これに対し，本稿では標準的な最適成長モデルで仮定 3.2 を満たすような Γ の例を提示する（第 4 節を参照せよ）。

表現定理

表現定理を述べるために，$\mathbb{R}^n$ の原点は許容可能経路集合に属し，再帰的被積分関数の値は原点でゼロに正規化されるものとする。

仮定 3.3　（i）　$f(t,0,0)F(t,\int_0^t r(s,0,0)ds) = 0$ a.e. $t \in \Omega$.

（ii）　$0 \in \Gamma(t,0)$ a.e. $t \in \Omega$, $0 \in X_0$.

関数 $g:\Omega\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ が正規被積分関数であるとは，ほとんどすべての $t\in\Omega$ に対して $g(t,\cdot,\cdot)$ が $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ で下半連続，各 $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ に対して $g(\cdot,x,y)$ が Ω で可測であるときをいう。

次の定理は，最適経路の存在を保証する条件の下で，任意の根元的要素 (f,r,F,Γ) に対して再帰的積分汎関数 I が正規被積分関数によって $\mathscr{X}_\Gamma$ 上で $I(x)=\int_\Omega g(t,x(t),\dot{x}(t))\rho(t)dt$ と表されることを意味する。

定理 3.3　荷重関数 ρ を連続とする。仮定 3.1 から仮定 3.3 が成り立つとき，次の 2 条件を満たす正規被積分関数 $g:\Omega\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ が一意に存在する。

(i)　ある $\alpha\in L^1_\rho(\Omega)$ と定数 $a_1,a_2\geq 0$ に対して

$$-(\alpha(t)+a_1|x|^p+a_2|y|^p)\leq g(t,x,y)\quad \text{a.e. } t\in\Omega\ \ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$$

が成立する。

(ii)　任意の $x\in\mathscr{X}_\Gamma$ と $A\in\mathscr{F}$ に対して

$$\int_A f(t,x(t),\dot{x}(t))F\left(t,\int_0^t r(s,x(s),\dot{x}(s))ds\right)dt=\int_A g(t,x(t),\dot{x}(t))\rho(t)dt$$

が成立する。

正規被積分関数 g の一意性の意味は次の通りである。h を定理 3.3 の条件（i）と（ii）を満たす正規被積分関数とすると，$h(t,x,y)=g(t,x,y)$ a.e. $t\in\Omega$ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ が成立する。

次の仮定は再帰的積分汎関数 I が $W^{1,p}_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 上の凸関数になるための十分条件である。

仮定 3.4　(i)　$f(t,x,y)\geq 0$ a.e. $t\in\Omega$ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

(ii)　$F(t,z)\geq 0$ a.e. $t\in\Omega$ $\forall z\in\mathbb{R}$，ほとんどすべての $t\in\Omega$ に対して $F(t,\cdot)$ は $\mathbb{R}$ 上の増加関数である。

(iii)　ほとんどすべての $t\in\Omega$ に対して $f(t,\cdot,\cdot)F(t,\cdot)$ は $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ 上の凸関数である。

(iv)　ほとんどすべての $t\in\Omega$ に対して $r(t,\cdot,\cdot)$ は $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上の凸関数である。

定理 3.4　荷重関数 ρ を連続とする。仮定 3.1 から仮定 3.4 が成り立つとき，定理 3.3 の正規被積分関数 g は凸被積分関数である。すなわち，ほとんどすべての $t\in\Omega$ に対して $g(t,\cdot,\cdot)$ は $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上の凸関数である。

注意 3.2　定理 3.3 の条件（ii）は

$$f(t,x(t),\dot{x}(t))F\left(t,\int_0^t r(s,x(s),\dot{x}(s))ds\right)=g(t,x(t),\dot{x}(t))\rho(t)\quad \text{a.e. } t\in\Omega\ \ \forall x\in\mathscr{X}_\Gamma$$

と同値である。ここで選択可能な ρ として，指数関数 $\rho(t) = \exp(-\delta t)$ $(t \in \Omega,\, \delta > 0)$ をとることができる。最適成長論の応用において，定理 3.3 の条件（ii）は再帰的効用は時間選好率一定の時間加法分離的効用として表現可能であり，再帰的効用を目的関数とする最適経路が存在するための十分条件は，上の表現の十分条件にもなることを意味する。したがって，時間加法分離的効用の使用は——少なくとも最適解の存在問題に関しては——先行研究で強調されるほど深刻な欠点にはならない。[(9)]

4.　再帰的効用をともなう最適成長への応用

本節では $n = 1$ のケースを扱う。再帰的効用

$$\int_\Omega \left[u(t, c(t)) \exp\left(\int_0^t \theta(s, c(s)) ds \right) \right] dt$$

をともなう標準的な 1 部門最適成長モデルを考える。ここで，Ω 上の可測関数 c は微分方程式

$$c(t) = \psi(t, x(t)) - \delta x(t) - \dot{x}(t) \geq 0 \quad \text{a.e. } t \in \Omega,\ x(0) = z > 0$$

によって生成される消費経路であり，$x \in W^{1,p}_\rho(\Omega)$ は資本ストック経路，$\dot{x}$ は資本ストックの蓄積経路，$\delta \in (0, 1]$ は資本ストックの減耗率，u, θ, ψ は $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上の可測関数で u は瞬時的効用関数，θ は割引関数，ψ は生産関数である。ただし，ρ は以下で特定化されるものとする。上の制約を満たす消費経路上で再帰的効用を最大化する問題を考える。以下では，根元的要素 (u, θ, ψ) へのもっともらしい仮定の下で適切な ρ を選ぶことにより，この最大化問題は解を持つことを示す。$p = 2$ のときは，この問題は Sagara（2001）が分析した最適成長モデルの特殊ケースである。

多価写像 $\Gamma : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to 2^{\mathbb{R}}$ を

$$\Gamma(t, x) = \{ y \in \mathbb{R} \mid -\delta x \leq y \leq \psi(t, x) - \delta x \}$$

によって定義する。Γ の構成の仕方より，任意の $x \in \mathbb{R}_+$ に対して $-\delta x \in \Gamma(t, x)$ であるから，例 3.1 の条件（a）が満たされる。また，例 3.1 の条件（b）を満たすように定数 $q > 0$ と荷重関数 ρ を容易に見付けることができる。[(10)]

次の条件を仮定する。

(i)　$u(t, 0) = 0$ a.e. $t \in \Omega$。

(ii)　ほとんどすべての $t \in \Omega$ に対して $u(t, \cdot)$ は $\mathbb{R}_+$ で連続，各 $z \in \mathbb{R}_+$ に対して $u(\cdot, z)$ は Ω で可測である。

---

(9)　Becker et al.（1989）の議論も参照せよ。

(10)　以下の議論から明らかなように，例 3.1 の条件（a），（b）を使わずに $\mathscr{X}_\Gamma$ の非空性を導けることにも注意せよ。

(iii)　Ω 上のある連続関数 α と定数 $a>0$ に対して

$$|u(t,z)| \le \alpha(t) + a\min\{z, z^p\} \quad \forall (t,z) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$$

が成立する。

(iv)　ほとんどすべての $t \in \Omega$ に対して $\theta(t,\cdot)$ は $\mathbb{R}_+$ で連続，各 $z \in \mathbb{R}_+$ に対して $\theta(\cdot,z)$ は Ω で可測である。

(v)　ψ は $\Omega \times \mathbb{R}_+$ で連続，$\psi(t,\cdot)$ は $\mathbb{R}_+$ 上の増加関数，$\psi(t,0)=0\ \forall t \in \Omega$ である。

(vi)　Ω 上のある連続関数 γ と定数 $b>0$ に対して

$$\psi(t,x) \le \gamma(t) + bx^p \quad \forall (t,x) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$$

および

$$\int_\Omega \exp\left(-\int_0^t \gamma(s)ds\right)dt < \infty$$

が成立する。

Γ が定理 3.2 の条件 (ii) を満たし，$\mathscr{X}_\Gamma$ が仮定 3.2 の条件 (i) を満たすことは明らかである。Peano の存在定理[(11)]より，常微分方程式 $x'(t)=\psi(t,x(t)),\ x(0)=z$ の区間 $[0,T)$ 上の解は区間 $[0,\infty)$ に延長できる。この解を $x(t \mid z)$ と表す。ただし，x' は x の通常の意味での導関数である。条件（v）より，$\psi(t,\cdot)$ は増加関数であるから，この解は一意的である[(12)]。また，$x'(t) \le \psi(t,x(t)),\ x(0)=z$ ならば，$x(t) \le x(t \mid z)$ である[(13)]。

$$\lambda(t) = \max\{x(t \mid z), \gamma(t) + bx(t \mid z)^p\}$$

とする。$x'(t) \in \Gamma(t,x(t))$ a.e. $t \in \Omega$ ならば，$\max\{|x(t)|,|x'(t)|\} \le \lambda(t)$ a.e. $t \in \Omega$ である。荷重関数 ρ を

$$\rho(t) = \frac{\exp(-\int_0^t \gamma(s)ds)}{1+\max\{\alpha(t),\gamma(t),\lambda(t)^p\}}$$

で定義する。条件（vi）より，$\int_\Omega \lambda(t)^p\rho(t)dt \le \int_\Omega \exp(-\int_0^t \gamma(s)ds)dt < \infty$ であり，$\lambda \in L^p_\rho(\Omega)$ となる。また，$\alpha,\gamma \in L^1_\rho(\Omega)$ にも注意する。したがって，微分包含式 $x'(t) \in \Gamma(t,x(t))$ a.e. $t \in \Omega$, $x(0)=z$ の解となる Ω 上の任意の局所的絶対連続関数 x に対して $x, x' \in L^p_\rho(\Omega)$ である。定理 2.1 と注意 2.1 より，$W^p_\rho(\Omega)$ の任意の要素に対して一般化された導関数と通常の意味での導関数はほとんどすべての点で一致するから，$\mathscr{X}_\Gamma$ は仮定 3.2 の条件（ii）を満たす。

---

(11)　Hartman（1982, Theorem II.2.1）を参照せよ。
(12)　Hartman（1982, Corollary III.6.3）を参照せよ。
(13)　Hartman（1982, Theorem III.4.1）を参照せよ。

上で選んだ ρ が与えられたとき，θ に次の条件を課す。

（vi）　$\hat{\theta}(t) = \sup_{z\in\mathbb{R}_+} \theta(t,z)$ とする。

$$\hat{\theta} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), \quad \exp\left(\int_0^t \hat{\theta}(s)ds\right) \leq \rho(t) \quad \text{a.e. } t \in \Omega$$

が成立する。

以上で必要な仮定はすべて述べたので，最適消費経路の存在証明に移る。

G_Γ を Γ のグラフとする。すなわち，

$$G_\Gamma = \{(t,x,y) \in \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y \in \Gamma(x,y)\}$$

である。$\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ の部分集合 G_1, G_2, G_3 を

$$G_1 = \{(t,x,y) \notin G_\Gamma \mid x \geq 0,\ y < -\delta x\}$$

$$G_2 = \{(t,x,y) \notin G_\Gamma \mid y > \psi(t,x) - \delta x,\ y \geq 0\}$$

$$G_3 = \{(t,x,y) \notin G_\Gamma \mid x < 0,\ y < 0\}$$

で定義すると，$\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ は互いに共通部分を持たない集合 G_Γ, G_1, G_2, G_3 に分割される（図 1 を参照せよ）。$\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上の関数 f と r を

$$f(t,x,y) = \begin{cases} -u(t, \psi(t,x) - \delta x - y) & (t,x,y) \in G_\Gamma \text{ のとき} \\ -u(t,\psi(t,x)) & (t,x,y) \in G_1 \text{ のとき} \\ -u(t,0) & (t,x,y) \in G_2 \text{ のとき} \\ -u(t,-y) & (t,x,y) \in G_3 \text{ のとき} \end{cases}$$

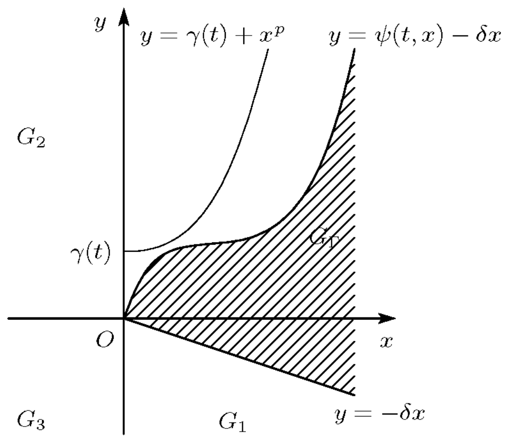

図 1　$\{t\}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$の分割

および

$$r(t,x,y)=\begin{cases}\theta(t,\psi(t,x)-\delta x-y) & (t,x,y)\in G_\Gamma \text{ のとき}\\ \theta(t,\psi(t,x)) & (t,x,y)\in G_1 \text{ のとき}\\ \theta(t,0) & (t,x,y)\in G_2 \text{ のとき}\\ \theta(t,-y) & (t,x,y)\in G_3 \text{ のとき}\end{cases}$$

で定義すると，f と r は Carathéodory 関数である。$(t,x,y)\in G_\Gamma\cup G_1$ のとき，$|f(t,x,y)|\leq\alpha(t)+a\min\{|\psi(t,x)|,|\psi(t,x)|^p\}\leq\alpha(t)+a|\psi(t,x)|\leq\alpha(t)+a\gamma(t)+ab|x|^p$ である。$(t,x,y)\in G_2$ のとき，$|f(t,x,y)|\leq\alpha(t)$ である。$(t,x,y)\in G_3$ のとき，$|f(t,x,y)|\leq\alpha(t)+a\min\{|y|,|y|^p\}\leq\alpha(t)+a|y|^p$ である。したがって，

$$|f(t,x,y)|\leq\alpha(t)+a\gamma(t)+ab|x|^p+a|y|^p\quad\forall(t,x,y)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

である。$\Omega\times\mathbb{R}$ 上の関数 F を $F(t,z)=\exp(z)$ とする。$\alpha,\gamma\in L^1_\rho(\Omega)$ より，f は仮定 3.1 の条件（i）と（ii）を満たす。上の条件（i）–（vi）より，(f,r,F) は仮定 3.1 を満たす。

ゆえに，ある $x^*\in\mathscr{X}_\Gamma$ に対して $I(x^*)\leq I(x)\ \forall x\in\mathscr{X}_\Gamma$ である。したがって，消費経路 $c^*(t)=\psi(t,x^*(t))-\delta x^*(t)-\dot{x}^*(t)$ は最適成長問題の最適解である。上の条件 (ii) と (iii) より，$f(t,0,0)=0$, $0\in\Gamma(t,0)$ a.e. $t\in\Omega$ となるから，仮定 3.3 は満たされる。ゆえに，ある正規被積分関数 $g:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ に対して

$$u(t,c(t))\exp\left(\int_0^t\theta(s,c(s))ds\right)=g(t,x(t),\dot{x}(t))\rho(t)\quad\text{a.e. } t\in\Omega$$

が制約条件を満たす任意の経路 c,x について成り立つ。

5. 主要定理の証明

定理 3.1 は古典解析学における Weierstrass の定理の直接的な帰結であり，その証明には $\mathscr{X}_\Gamma$ が $W^{1,p}_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ のコンパクト集合，I が $\mathscr{X}_\Gamma$ で連続であることを示せばよい。コンパクト性の議論には $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ のコンパクト部分集合の特徴付けを用いる。連続性の議論には Carathéodory 関数によって定義される Nemytskii 作用素の連続性を必要とする。Nemytskii 作用素の連続性に関する一般的な結果は Krasnosel'skii（1964）によって与えられた。Buttazzo and Dal Maso（1983）は L^p 空間上の非線形汎関数が Carathéodory 関数，したがって，Nemytskii 作用素によって表現できるための十分条件を与えた。定理 3.3 の証明はこの Buttazzo and Dal Maso の結果に依拠している。

5.1　再帰的積分汎関数の連続性

$\Omega \times \mathbb{R}^n$ 上の関数 f が **Carathéodory 関数**であるとは，ほとんどすべての $t \in \Omega$ に対して $f(t, \cdot)$ は $\mathbb{R}^n$ で連続，各 $u \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\cdot, u)$ は Ω で可測であるときをいう。Carathéodory 関数は $(t, u) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ について両可測である[14]。f を $\Omega \times \mathbb{R}^n$ 上の Carathéodory 関数とするとき，$(T_f u)(t) = f(t, u(t))$ で定義される **Nemytskii 作用素** T_f は $\mathbb{R}^n$ に値をとる Ω 上の可測関数 u を Ω 上の可測関数に写す。μ を Borel 可測空間 $(\Omega, \mathscr{F})$ の原子[15]を持たない測度とする。$\mathbb{R}^n$ に値をとる Ω 上の可測関数 u で $\int_\Omega |u|^p d\mu < \infty$ となるもの全体を $L^p(\Omega, \mu; \mathbb{R}^n)$ と表す。

命題 5.1（Krasnosel'skii, Nemytskii, Vainberg）[16]　$1 \leq p < \infty$ とする。

(i)　Nemytskii 作用素 T_f が $L^p(\Omega, \mu; \mathbb{R}^n)$ に属する各関数を $L^1(\Omega, \mu)$ の中に写すならば, T_f は $L^p(\Omega, \mu; \mathbb{R}^n)$ から $L^1(\Omega, \mu)$ への有界連続作用素である。

(ii)　Nemytskii 作用素 T_f が $L^p(\Omega, \mu; \mathbb{R}^n)$ に属する各関数を $L^1(\Omega, \mu)$ の中に写すための必要十分条件は，ある $\alpha \in L^1(\Omega, \mu)$ と定数 $a > 0$ に対して

$$|f(t, u)| \leq \alpha(t) + a|u|^p \quad \forall (t, u) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$$

が成立することである。

定理 5.1　I は $\mathscr{X}_\Gamma$ 上で連続である。

証明　Nemytskii 作用素 $T_f : L^p_\rho(\Omega; \mathbb{R}^{2n}) \to L^1_\rho(\Omega)$ を $(T_f u)(t) = f(t, u(t))$ によって定義する。仮定 3.1 の条件（ii）より，ある $\alpha \in L^1_\rho(\Omega)$ と定数 $a > 0$ に対して $|f(t, u)| \leq \alpha(t) + a|u|^p \ \forall (t, u) \in \Omega \times \mathbb{R}^{2n}$ が成立するから，各 $u \in L^p_\rho(\Omega; \mathbb{R}^{2n})$ に対して $T_f u \in L^1_\rho(\Omega)$ は矛盾なく定義される。$\mu_\rho(A) = \int_A \rho(t) dt$ $(A \in \mathscr{F})$ で定義される測度 μ_ρ は Lebesgue 測度に関して密度関数 ρ を持つから，$L^p_\rho(\Omega; \mathbb{R}^{2n}) = L^p(\Omega, \mu_\rho; \mathbb{R}^{2n})$, $L^1_\rho(\Omega) = L^1(\Omega, \mu_\rho)$ となるのは明らかである。Lebesgue 測度が原子を持たないことから，μ_ρ も原子を持たず，命題 5.1 より，T_f は連続である。

$\Omega \times L^p_\rho(\Omega; \mathbb{R}^{2n})$ 上の関数 R を $R(t, u) = F(t, \int_0^t r(s, u(s)) ds)$ によって定義する。R が Carathéodory 関数であること，すなわち，ほとんどすべての $t \in \Omega$ に対して $R(t, \cdot)$ は $L^p_\rho(\Omega; \mathbb{R}^{2n})$ で連続，各 $u \in L^p_\rho(\Omega; \mathbb{R}^{2n})$ に対して $R(\cdot, u)$ は Ω で可測であることを示す。最初に, 仮定 3.1 の条件 (iii) より, F は Carathéodory 関数であり, $\Omega \times \mathbb{R}$ で両可測であることに注意する。したがって, 各 $u \in L^p_\rho(\Omega; \mathbb{R}^{2n})$ に対して関数 $t \mapsto R(t, u)$ の可測性は明らかである。$\{u_k\}$ を u に収束する $L^p_\rho(\Omega; \mathbb{R}^{2n})$ の点列とす

(14)　Aliprantis and Border（1999, Lemma 4.50）を参照せよ。

(15)　$A \in \mathscr{F}$ が μ の原子であるとは，$\mu(A) > 0$ ならば，任意の可測集合 $B \subset A$ に対して $\mu(A \setminus B) = 0$ または $\mu(B) = 0$ のどちらか一方が成立するときをいう。

(16)　この命題は原子を持たない任意の測度空間で成り立つ。Krasnosel'skii（1964, Theorems 2.1–2.3）を参照せよ。

ると，$\{u_k\}$ のある部分列 $\{u_{k_j}\}$ に対して $u_{k_j}(t) \to u(t)$ μ_ρ-a.e. $t \in \Omega$ である。μ_ρ は Lebesgue 測度に関して絶対連続であるから，$u_{k_j}(t) \to u(t)$ a.e. $t \in \Omega$ である。仮定 3.1 の条件（iv）と（v）より，各 j に対して $|r(t, u_{k_j}(t))| \le \beta(t)$ a.e. $t \in \Omega$, $r(t, u_{k_j}(t)) \to r(t, u(t))$ a.e. $t \in \Omega$ であるから，Lebesgue の有界収束定理より，

$$\lim_{j\to\infty} \int_0^t r(s, u_{k_j}(s))ds = \int_0^t r(s, u(s))ds \quad \forall t \in \Omega$$

が成立する。したがって，

$$\lim_{j\to\infty} F\left(t, \int_0^t r(s, u_{k_j}(s))ds\right) = F\left(t, \int_0^t r(s, u(s))ds\right) \quad \text{a.e. } t \in \Omega$$

であり，ほとんどすべての $t \in \Omega$ に対して $u \mapsto R(t, u)$ は連続である。

作用素 $\Phi : \mathscr{X}_\Gamma \to L^1(\Omega)$ を

$$(\Phi x)(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t))F\left(t, \int_0^t r(s, x(s), \dot{x}(s))ds\right)$$

で定義すると，仮定 3.1 の条件（ii）と仮定 3.2 の条件（iv）より，任意の $x \in W^{1,p}_\rho(\Omega; \mathbb{R}^n)$ に対して

$$\begin{aligned} |(\Phi x)(t)| &\le (\alpha(t) + a_1|x(t)|^p + a_2|\dot{x}(t)|^p)\rho(t) \\ &\le (\alpha(t) + a_1|\lambda(t)|^p + a_2|\lambda(t)|^p)\rho(t) \quad \text{a.e. } t \in \Omega \end{aligned}$$

である。したがって，各 $x \in \mathscr{X}_\Gamma$ に対して Φx は Ω で可積分，$\{\Phi x \mid x \in \mathscr{X}_\Gamma\}$ は $L^1(\Omega)$ で有界である。$\{x_k\}$ を $x \in W^{1,p}_\rho(\Omega; \mathbb{R}^n)$ に収束する $\mathscr{X}_\Gamma$ の点列とすると，$L^p_\rho(\Omega; \mathbb{R}^{2n})$ において $u_k = (x_k, \dot{x}_k) \to (x, \dot{x}) = u$ である。$L^1_\rho(\Omega)$ において $T_f u_k \to T_f u$ であるから，点列 $\{T_f u_k\}$ のある部分列 $\{T_f u_{k_j}\}$ に対して $(T_f u_{k_j})(t) \to (T_f u)(t)$ μ_ρ-a.e. $t \in \Omega$, したがって, $(T_f u_{k_j})(t) \to (T_f u)(t)$ a.e. $t \in \Omega$ となる。各 j に対して $(\Phi x_{k_j})(t) = (T_f u_{k_j})(t)R(t, u_{k_j})$, $(\Phi x_{k_j})(t) \to (\Phi x)(t)$ a.e. $t \in \Omega$ となるから，Lebesgue の有界収束定理より，

$$\lim_{j\to\infty} I(x_{k_j}) = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega (\Phi x_{k_j})(t)dt = \int_\Omega (\Phi x)(t)dt = I(x)$$

である。ゆえに，I は $\mathscr{X}_\Gamma$ で連続である。 □

5.2　許容可能経路集合のコンパクト性

次の命題は L^p 空間の部分集合がノルム・コンパクトかどうかを判定するための有用な基準である。

命題 5.2[17]　$1 \le p < \infty$ とする。$L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ の有界部分集合 K が相対コンパクトであることは，次の 2 条件と同値である。

（17）Dunford and Schwartz (1958, Theorem IV.8.20) を参照せよ。元の定理は $L^p(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ に対して成立するものであるが，$L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ に属する各関数を Ω の外でゼロに拡張し，$L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ が $L^p(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ の中に等距離に埋め込まれることに注意すれば，上の命題を容易に導くことができる。

(i)　$\displaystyle\lim_{s\to 0}\sup_{u\in K}\int_\Omega |u(t+s)-u(t)|^p dt = 0.$

(ii)　$\displaystyle\lim_{T\to\infty}\sup_{u\in K}\int_T^\infty |u(t)|^p dt = 0.$

補助定理 5.1　$\varphi:\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ を Carathéodory 関数，すなわち，ほとんどすべての $t\in\Omega$ に対して $\varphi(t,\cdot)$ は Ω で連続，各 $s\in\Omega$ に対して $\varphi(\cdot,s)$ は Ω で可測であるとする。$\varphi(t,0)=0$ a.e. $t\in\Omega$ ならば，ある $v\in L^1(\Omega)$ と定数 $\delta>0$ に対して $0\le s<\delta$ のとき，$|\varphi(t,s)|\le v(t)$ a.e. $t\in\Omega$ が成立する。

証明　$\varphi(t,0)=0$ a.e. $t\in\Omega$ とする。結論を否定すると，任意の正値関数 $v\in L^1(\Omega)$ に対してゼロに収束する Ω の点列 $\{s_k\}$ が存在し，正の Lebesgue 測度を持つ可測集合の上で $|\varphi(t,s_k)|>v(t)>0$ が各 k について成立する。したがって，$0=|\varphi(t,0)|=\lim_k|\varphi(t,s_k)|\ge v(t)>0$ となり，矛盾が生じる。 □

定理 5.2　$\mathscr{X}_\Gamma$ は $W^{1,p}_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ でコンパクトである。

証明　$L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ の部分集合 K_1,K_2 を

$$K_1=\{x\rho^{\frac{1}{p}}\in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)\mid x\in\mathscr{X}_\Gamma\},\quad K_2=\{\dot{x}\rho^{\frac{1}{p}}\in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)\mid x\in\mathscr{X}_\Gamma\}$$

とする。$\mathscr{X}_\Gamma$ は直積空間 $K_1\times K_2$ と同一視されるから，K_1 と K_2 がそれぞれ $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ でコンパクトであることを示せば十分である。仮定 3.2 より，K_1 と K_2 は $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ の有界閉集合である。したがって，K_1 と K_2 がそれぞれ命題 5.2 の条件（i）と（ii）を満たすことを示せばよい。仮定 3.2 の条件（ii）より，任意の $x\in\mathscr{X}_\Gamma$ に対して $|x(t)\rho(t)^{1/p}|^p\le\lambda(t)^p\rho(t)$, $|\dot{x}(t)\rho(t)^{1/p}|^p\le\lambda(t)^p\rho(t)$ a.e. $t\in\Omega$ が成立するから，明らかに命題 5.2 の条件（ii）は K_1 と K_2 について満たされる。したがって，命題 5.2 の条件（i）が K_1 と K_2 について満たされることを示す。

仮定 3.2 の条件（ii）より，

$$\begin{aligned}&\sup_{x\rho^{\frac{1}{p}}\in K_1}\int_\Omega |x(t+s)\rho(t+s)^{\frac{1}{p}}-x(t)\rho(t)^{\frac{1}{p}}|^p dt\\ \le&\sup_{x\rho^{\frac{1}{p}}\in K_1}\left\{\int_\Omega |x(t+s)|^p\rho(t+s)dt+\int_\Omega |x(t)|^p\rho(t)dt\right\}\\ \le& 2\int_\Omega\lambda(t)^p\rho(t)dt<\infty\end{aligned}$$

となることに注意する[18]。このとき，Ω 上のある連続関数 q と正数 $\delta > 0$ に対して $0 \leq s < \delta$ のとき，

$$\sup_{x\rho^{\frac{1}{p}} \in K_1} \int_\Omega |x(t+s)\rho(t+s)^{\frac{1}{p}} - x(t)\rho(t)^{\frac{1}{p}}|^p dt \leq \int_\Omega |q(t+s) - q(t)| dt$$

となることを示す。上の主張が成り立たないとすると，Ω 上の任意の連続関数 q に対してある $x\rho^{1/p} \in K_1$ と $s \in \Omega$ が存在して

$$\int_\Omega |q(t+s) - q(t)| dt < \int_\Omega |x(t+s)\rho(t+s)^{\frac{1}{p}} - x(t)\rho(t)^{\frac{1}{p}}|^p dt < \infty \tag{5.1}$$

が成立する。q を正値をとる Ω で連続な加法関数とすると，$\int_\Omega |q(t+s) - q(t)| dt = \int_\Omega |q(s)| dt = \infty$ となり，不等式(5.1)と矛盾する。

$\Omega \times \Omega$ 上の Carathéodory 関数 φ を $\varphi(t,s) = |q(t+s) - q(t)|$ で定義すると，φ は補助定理 5.1 の仮定を満たす。Lebesgue の有界収束定理より，

$$\lim_{s\to 0} \sup_{x\rho^{\frac{1}{p}} \in K_1} \int_\Omega |x(t+s)\rho(t+s)^{\frac{1}{p}} - x(t)\rho(t)^{\frac{1}{p}}|^p dt \leq \lim_{s\to 0} \int_\Omega \varphi(t,s) dt = 0$$

が成立する。等式

$$\lim_{s\to 0} \sup_{\dot{x}\rho^{\frac{1}{p}} \in K_2} \int_\Omega |\dot{x}(t+s)\rho(t+s)^{\frac{1}{p}} - \dot{x}(t)\rho(t)^{\frac{1}{p}}|^p dt = 0$$

の証明も上の議論とまったく同様である。ゆえに，K_1 と K_2 は $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ でコンパクトである。□

定理 3.2 の証明　仮定 3.2 の条件 (ii) が成立することは自明である。$\mathscr{X}_\Gamma$ が $W^{1,p}_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ の閉集合であることを示す。$\{x_k\}$ を x に収束する $\mathscr{X}_\Gamma$ の点列とすると，$L^p_\rho(\Omega;\mathbb{R}^{2n})$ において $(x_k, \dot{x}_k) \to (x, \dot{x})$ であるから，$\{(x_k, \dot{x}_k)\}$ のある部分列に対して $(x_{k_j}(t), \dot{x}_{k_j}(t)) \to (x(t), \dot{x}(t))$ μ_ρ-a.e. $t \in \Omega$，したがって $(x_{k_j}(t), \dot{x}_{k_j}(t)) \to (x(t), \dot{x}(t))$ $\forall t \in \Omega \setminus N$ が成立する。ただし，N は Lebesgue 測度に関する零集合である。各 $t \in \Omega \setminus N_0$ に対して $A(t)$ は閉集合，各 $t \in \Omega \setminus N_j$ に対して $(x_{k_j}(t), \dot{x}_{k_j}(t)) \in A(t)$ である（ただし，N_0 と N_j は零集合）から，各 $t \in \Omega \setminus (N \cup \bigcup_{j=0}^\infty N_j)$ に対して $(x(t), \dot{x}(t)) \in A(t)$ が成立する。$(x_{k_j}(t), \dot{x}_{k_j}(t)) \to (x(t), \dot{x}(t))$ a.e. $t \in \Omega$ であるから，

$$\begin{aligned} |x_{k_j}(0) - x(0)| &= \left| x_{k_j}(t) - x(t) - \int_0^t \dot{x}_{k_j}(s) ds + \int_0^t \dot{x}(s) ds \right| \\ &\leq |x_{k_j}(t) - x(t)| + \int_0^t |\dot{x}_{k_j}(s) - \dot{x}(s)| ds \end{aligned}$$

より，$x_{k_j}(0) \to x(0)$ を得る。各 j に対して $x_{k_j}(0) \in X_0$ であり，X_0 は $\mathbb{R}^n$ の閉集合であるから，$x(0) \in X_0$ が従う。ゆえに，$x \in \mathscr{X}_\Gamma$ である。□

---

(18)　最後の不等式は次のようにして示される。λ と ρ を Ω の外でゼロに拡張しておくと，Lebesgue 積分の不変性より，$\int_\Omega \lambda(t+s)^p \rho(t+s) dt \leq \int_\mathbb{R} \lambda(t+s)^p \rho(t+s) dt = \int_\mathbb{R} \lambda(t)^p \rho(t) dt = \int_\Omega \lambda(t)^p \rho(t) dt$ となり，所望の不等式が従う。

5.3　正規被積分関数による再帰的被積分関数の表現

命題 5.3（Buttazzo and Dal Maso）[19]　$1 \leq p < \infty$ とする。$G : L^p(\Omega, \mu; \mathbb{R}^n) \times \mathscr{F} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を次の 4 条件を満たす汎関数とする。

(i)　$G(\,\cdot\,, \Omega)$ は $L^p(\Omega, \mu; \mathbb{R}^n)$ で下半連続である。

(ii)　ある $u_0 \in L^p(\Omega, \mu; \mathbb{R}^n)$ に対して $G(u_0, A) < +\infty\ \forall A \in \mathscr{F}$ が成立する。

(iii)　G は $\mathscr{F}$ で局所的である。すなわち，$u, v \in L^p(\Omega, \mu; \mathbb{R}^n)$ に対して $A \in \mathscr{F}$ の上で $u = v$ μ-a.e. ならば，$G(u, A) = G(v, A)$ である。

(iv)　G は $\mathscr{F}$ で有限加法的である。すなわち，$u \in L^p(\Omega, \mu; \mathbb{R}^n)$, $A, B \in \mathscr{F}$ に対して $A \cap B = \emptyset$ ならば，$G(u, A \cup B) = G(u, A) + G(u, B)$ である。

このとき，次の 2 条件を満たす正規被積分関数 $g : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ が一意に存在する。

(1)　ある $\alpha \in L^1(\Omega, \mu)$ と定数 $a \geq 0$ に対して

$$-(\alpha(t) + a|x|^p) \leq g(t, x) \quad \mu\text{-a.e. } t \in \Omega\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

が成立する。

(2)　任意の $u \in L^p(\Omega, \mu; \mathbb{R}^n)$ と $A \in \mathscr{F}$ に対して

$$G(u, A) = \int_A g(t, u(t)) d\mu(t) + G(u_0, A)$$

が成立する。

さらに，$G(\,\cdot\,, \Omega)$ が $L^p(\Omega, \mu; \mathbb{R}^n)$ で弱下半連続ならば，g は凸被積分関数である。すなわち，ほとんどすべての $t \in \Omega$ に対して $g(t, \cdot\,)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の凸関数である。

<u>定理 3.3 の証明</u>　$L^p_\rho(\Omega; \mathbb{R}^{2n})$ の部分集合 $\mathscr{U}_\Gamma$ を

$$\mathscr{U}_\Gamma = \{u \in L^p_\rho(\Omega; \mathbb{R}^{2n}) \mid u = (x, y),\, x \in \mathscr{X}_\Gamma,\, y = \dot{x}\}$$

で定義すると，写像 $\mathscr{X}_\Gamma \ni x \mapsto (x, \dot{x}) \in \mathscr{U}_\Gamma$ によって $\mathscr{X}_\Gamma$ は $\mathscr{U}_\Gamma$ と位相同型になることが分かる。$G : L^p_\rho(\Omega; \mathbb{R}^{2n}) \times \mathscr{F} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を

$$G(u, A) = \begin{cases} \int_A [f(t, u(t)) F(t, \int_0^t r(s, u(s)) ds)] dt & u \in \mathscr{U}_\Gamma \text{ のとき} \\ +\infty & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

で定義する。μ_ρ を定理 5.1 の証明に現れた原子を持たない測度とする。$L^p(\Omega, \mu_\rho; \mathbb{R}^{2n}) = L^p_\rho(\Omega, \mathbb{R}^{2n})$ より，G は $L^p(\Omega, \mu_\rho; \mathbb{R}^{2n})$ 上で定義される。定理 5.1 より $G(\,\cdot\,, \Omega)$ は $\mathscr{U}_\Gamma$ で連続，仮定 3.2 より $\mathscr{U}_\Gamma$

(19)　この命題は原子を持たない任意の σ 有限完備測度空間で成立する。Buttazzo and Dal Maso (1983) を参照せよ。

は $L^p(\Omega,\mu_\rho;\mathbb{R}^{2n})$ で閉集合であるから，その構成の仕方より $G(\,\cdot\,,\Omega)$ は $L^p(\Omega,\mu_\rho;\mathbb{R}^{2n})$ で下半連続である。G は可算加法性と局所性を満たし，任意の $A\in\mathscr{F}$ に対して $G(0,A)=0$ であることに注意する。G は命題 5.3 の条件を満たすから，次の 2 条件を満たす正規被積分関数 $g:\Omega\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ が一意に存在する。

（a） ある $\alpha\in L^1(\Omega,\mu_\rho)$ と $a\geq 0$ に対して

$$-(\alpha(t)+a|u|^p)\leq g(t,u)\quad \mu_\rho\text{-a.e. } t\in\Omega\ \ \forall u\in\mathbb{R}^{2n}$$

が成立する。

（b） 任意の $u\in L^p(\Omega,\mu_\rho;\mathbb{R}^{2n})$ と $A\in\mathscr{F}$ に対して

$$G(u,A)=\int_A g(t,u(t))d\mu_\rho(t)$$

が成立する。

条件（a）が定理 3.3 の条件（i）を意味することは明らかである。条件（b）より，任意の $u\in\mathscr{U}_\Gamma$ と $A\in\mathscr{F}$ に対して

$$\int_A\left[f(t,u(t))F\left(t,\int_0^t r(s,u(s))ds\right)\right]dt=\int_A g(t,u(t))d\mu_\rho(t)=\int_A g(t,u(t))\rho(t)dt$$

となり，定理 3.3 の条件（ii）が満たされる。 □

定理 3.4 の証明　最初に I が $W^{1,p}_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 上の凸関数であることを示す。$x_0,x_1\in W^{1,p}_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $\theta\in[0,1]$ を任意に選び，$u_0=(x_0,\dot{x}_0)$, $u_1=(x_1,\dot{x}_1)$, $z_0(t)=\int_0^t r(s,u_0(s))ds$, $z_1(t)=\int_0^t r(s,u_1(s))ds$ とする。仮定 3.4 より，

$$\begin{aligned}&f(t,\theta u_0(t)+(1-\theta)u_1(t))F\left(t,\int_0^t r(s,\theta u_0(s)+(1-\theta)u_1(s))ds\right)\\ &\leq f(t,\theta u_0(t)+(1-\theta)u_1(t))F(t,\theta z_0(t)+(1-\theta)z_1(t))\\ &\leq \theta f(t,u_0(t))F(t,z_0(t))+(1-\theta)f(t,u_1(t))F(t,z_1(t))\end{aligned}$$

が a.e. $t\in\Omega$ で成立する。ただし，上の不等式の第 2 行目では仮定 3.4 の条件 (i), (ii), (iv) を，第 3 行目では仮定 3.4 の条件 (iv) を使った。上の不等式を積分すると $I(\theta x_0+(1-\theta)x_1)\leq\theta I(x_0)+(1-\theta)I(x_1)$ を得る。

次に $G(\,\cdot\,,\Omega)$ が $L^p_\rho(\Omega;\mathbb{R}^{2n})$ 上の凸関数であることを示す。そのためには，$u_0,u_1\in L^p_\rho(\Omega;\mathbb{R}^{2n})$ と $\theta\in[0,1]$ を任意に選び，不等式

$$G(\theta u_0+(1-\theta)u_1,\Omega)\leq\theta G(u_0,\Omega)+(1-\theta)G(u_1,\Omega)$$

を示せばよい。$u_0\notin\mathscr{U}_\Gamma$ または $u_1\notin\mathscr{U}_\Gamma$ のときは，G の構成の仕方より $G(u_0,\Omega)=+\infty$ ま

たは $G(u_1,\Omega)=+\infty$ となるから，上の不等式が従う。$u_0\in\mathscr{U}_\Gamma$ かつ $u_1\in\mathscr{U}_\Gamma$ のときは，ある $x_0,x_1\in W^{1,p}_\rho(\Omega;\mathbb{R}^n)$ に対して $u_0=(x_0,\dot{x}_0)$, $u_1=(x_1,\dot{x}_1)$ であるから，G の構成の仕方より $G(\theta u_0+(1-\theta)u_1,\Omega)=I(\theta x_0+(1-\theta)x_1)$, $G(u_0,\Omega)=I(x_0)$, $G(u_1,\Omega)=I(x_1)$ である。したがって，I の凸性から上の不等式が従う。

以上より，$G(\,\cdot\,,\Omega)$ は Banach 空間 $L^p_\rho(\Omega;\mathbb{R}^{2n})$ で下半連続な凸関数であるから，$L^p_\rho(\Omega;\mathbb{R}^{2n})$ で弱下半連続でもある。[20] ゆえに，命題 5.3 より，ほとんどすべての $t\in\Omega$ に対して $g(t,\cdot)$ は $\mathbb{R}^{2n}$ 上の凸関数である。 □

（法政大学経済学部教授）

参 考 文 献

Aliprantis, C. D. and K. C. Border, (1999). *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*, second ed., Springer-Verlag, Berlin.

Balder, E. J., (1993). "Existence of optimal solutions for control and variational problems with recursive objectives", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 178, pp. 418–437.

Becker, R. A., Boyd, J. H. and B. Y. Sung, (1989). "Recursive utility and optimal capital accumulation. I. Existence", *Journal of Economic Theory*, vol. 47, pp. 76–100.

Buttazzo, G. and G. Dal Maso, (1983). "On Nemyckii operators and integral representation of local functionals", *Rendiconti di Matematica*, vol. 3, pp. 481–509.

Carlson, D. A., (1990). "Infinite horizon optimal controls for problems governed by a Volterra integral equation with state dependent discount factor", *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 66, pp. 311–336.

Cesari, L., (1983). *Optimization—Theory and Applications: Problems with Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin.

Chichilnisky, G., (1977). "Nonlinear functional analysis and optimal economic growth", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 61, pp. 504–520.

Dacorogna, B., (1989). *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, Berlin.

Dunford, N. and J. T. Schwartz, (1958). *Linear Operators, Part I: General Theory*, John Wiley & Sons, New York.

Hartman, P., (1982). *Ordinary Differential Equations*, second ed., Birkhäuser, Boston.

Krasnosel'skii, M. A., (1964). *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, Macmillan, New York.

Kufner, A., John, O. and S. Fučík, (1977). *Function Spaces*, Noordhoff, Leyden.

Maruyama, T., (1981). "Optimal economic growth with infinite planning time horizon", *Proceedings of the Japan Academy, Ser. A*, vol. 57, pp. 469–472.

Sagara, N., (2001). "Optimal growth with recursive utility: An existence result without convexity assumptions", *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 109, pp. 371–383.

Sagara, N., (2007). "Nonconvex variational problem with recursive integral functionals in Sobolev

(20) Dacorogna（1989, Theorem 1.2）を参照せよ。

spaces: Existence and representation", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 327, pp. 203–219.