Title	最適化理論における近接点法と非線形射影
Sub Title	Proximal point algorithms in optimization and nonlinear projections
Author	高橋, 渉(Takahashi, Wataru)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2007
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.99, No.4 (2007. 1) ,p.733(127)- 758(152)
JaLC DOI	10.14991/001.20070101-0127
Abstract	凸計画法における解を求める近似法の1つである近接点法は, 1976年にRockafellar等によってHilber空間の場合で始められ, その後多くの研究者によってその研究が行われている。本稿では, その近接点法を増大作用素や単調作用素, 非拡大作用素などの非線形作用素を通してBanach空間で行うとともに, その極限に現れる非線形射影をBanach空間のノルムの凸性や微分可能性などのBanach空間の幾何学と関連した形で行っている。 The proximal point method, one of the approximation methods for finding solutions in convex programming, was started by Rockafellar and others, in the case of Hilbert space in 1976; and thereafter, numerous researchers have been conducting this research. While this study performs a proximal point method in a Banach space through nonlinear operators such as accretive operators, monotone operators, and by nonlinear operators such as nonexpansive mappings, etc., this study also performs this in connection with the geometry of Banach spaces, such as convexity of Banach spaces, differentiability of norms, etc., the nonlinear projections that emerge at their limits.
Notes	小特集 : 経済分析と最適化の数理
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20070101-0127

最適化理論における近接点法と非線形射影
Proximal Point Algorithms in Optimization and Nonlinear Projections

高橋 渉(Wataru Takahashi)

凸計画法における解を求める近似法の 1 つである近接点法は，1976 年に Rockafellar 等によって Hilber 空間の場合で始められ，その後多くの研究者によってその研究が行われている。本稿では，その近接点法を増大作用素や単調作用素，非拡大作用素などの非線形作用素を通して Banach 空間で行うとともに，その極限に現れる非線形射影を Banach 空間のノルムの凸性や微分可能性などの Banach 空間の幾何学と関連した形で行っている。

Abstract

The proximal point method, one of the approximation methods for finding solutions in convex programming, was started by Rockafellar and others, in the case of Hilbert space in 1976; and thereafter, numerous researchers have been conducting this research. While this study performs a proximal point method in a Banach space through nonlinear operators such as accretive operators, monotone operators, and by nonlinear operators such as nonexpansive mappings, etc., this study also performs this in connection with the geometry of Banach spaces, such as convexity of Banach spaces, differentiability of norms, etc., the nonlinear projections that emerge at their limits.

「三田学会雑誌」99 巻 4 号（2007 年 1 月）

最適化理論における近接点法と非線形射影

高　橋　　　渉

要　　旨

凸計画法における解を求める近似法の 1 つである近接点法は，1976 年に Rockafellar 等によって Hilber 空間の場合で始められ，その後多くの研究者によってその研究が行われている。本稿では，その近接点法を増大作用素や単調作用素，非拡大作用素などの非線形作用素を通して Banach 空間で行うとともに，その極限に現れる非線形射影を Banach 空間のノルムの凸性や微分可能性などの Banach 空間の幾何学と関連した形で行っている。

キーワード

近接点法，Banach 空間，極大単調作用素，非線形射影，不動点

1．はじめに

H を Hilbert 空間とし，C を H の空でない閉凸集合とする。このとき，任意の $x \in H$ に対して

$$\|x - z\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}$$

となるような $z \in C$ が一意に存在する。そこで，$x \in H$ に対して，このような元 z を対応させる写像を P_C で表し，P_C を H から C の上への距離射影と呼ぶことにする。この距離射影 P_C に対して，$z = P_C x$ であることの必要十分条件は

$$\langle x - z, z - y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \tag{1.1}$$

が成り立つことである。（1.1）の性質を用いると，P_C は非拡大写像（nonexpansive mapping），すなわち

$$\|P_C x - P_C y\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in H$$

であることがわかる。非拡大写像は一般につぎのように定義される。H を Hilbert 空間とし，C を H の閉凸集合とする。C から H への写像 T が非拡大（nonexpansive）であるとは

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C$$

が成り立つときである。この非拡大写像に対して，つぎの 2 つの不動点近似定理がある。

定理 1.1（[43]） C を H の閉凸集合とする。T を C から C への非拡大写像とする。$F(T)$ を T の不動点の集合とし，$F(T) \neq \phi$ とする。$x_1 = x \in C$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) T x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{1.2}$$

で定義する。ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ は

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$$

を満たすとする。このとき，$\{x_n\}$ は $Px \in F(T)$ に強収束する。ここで $F(T)$ は T の不動点の集合を表し，P は H から $F(T)$ の上への距離射影である。

定理 1.2（[25]） C を H の閉凸集合とし，T を C から C への $F(T) \neq \phi$ となる非拡大写像とする。$x_1 = x \in C$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{1.3}$$

で定義する。ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ は $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (1 - \alpha_n) = \infty$ を満たすとする。このとき，$\{x_n\}$ は $F(T)$ の点 z に弱収束する。ここで $z = \lim_{n \to \infty} P x_n$ である。

（1.2）の近似法は最初 Halpern [7] により導入され，定理 1.1 の形で Wittmann [43] により証明された。そのわかりやすい証明法は [34] を見るとよい。（1.3）の近似法は最初 Mann [17] によって導入され，そして，定理 1.2 の形で Reich [25] によって証明された。そのわかりやすい証明法はやはり [34] を見るとよい。非拡大写像の不動点近似法とは別に，1976 年に Rockafellar [28] は，Hilbert 空間におけるつぎの収束定理を証明した。

定理 1.3（[28]） H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする。$x_1 = x \in H$ とし

$$x_{n+1} = J_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

とする。ただし，J_{r_n} は A のリゾルベントであり，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\liminf_{n \to \infty} r_n > 0$ を満たすものとする。このとき，$A^{-1}0 \neq \phi$ であるならば，点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に弱収束する。ここで，$A^{-1}0 = \{z \in H : 0 \in Az\}$ である。

極大単調作用素 A のリゾルベント J_{r_n} を用いて，$A^{-1}0$ の元を求める Rockafellar のこのような手法は近接点法（proximal point algorithm）と呼ばれ，この後，多くの数学者，応用数学者によってその研究が行われた。Rockafellar の収束定理において，点列 $\{x_n\}$ の極限は距離射影と大いに関

わりを持つ。例えば，上村–高橋 [11] はつぎの定理を証明した。

定理 1.4（[11]） H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする。$x \in H$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x$ かつ

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

で定義する。ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする。このとき，$A^{-1}0 \neq \phi$ ならば，$\{x_n\}$ は $Px \in A^{-1}0$ に強収束する。ただし，P は H から $A^{-1}0$ の上への距離射影である。

つぎの定理はやはり上村–高橋 [11] によって証明された弱収束型の近接点法である。

定理 1.5（[11]） H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする。$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすとする。$x_1 = x \in H$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

で定義する。このとき，$A^{-1}0 \neq \phi$ ならば，$\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に弱収束する。ここで，$u = \lim_{n\to\infty} Px_n$ である。ただし，P は H から $A^{-1}0$ の上への距離射影である。

本研究においては，Rockafellar，上村–高橋による近接点法を非線形射影との関わりから Banach 空間で議論する。Banach 空間でのこれらの議論は，Hilbert 空間の場合と違って，空間のノルムの凸性や，微分可能性の複雑さ，相対写像の非線形性などと関連して難解となる。本稿では，Banach 空間における近接点法の研究を m-増大作用素や極大単調作用素，非拡大作用素などの非線形作用素を通して行うとともに，その極限に現れる非線形射影の研究を Banach 空間のノルムの凸性や微分可能性などの Banach 空間の幾何学（Geometry of Banach spaces）と関連した形で行う。第 3 節では上村–高橋の 2 つの定理を Banach 空間において増大作用素の収束定理として扱う。その極限がサニー非拡大射影になることにも注目してほしい。第 4 節では極大単調作用素の 2 つのリゾルベントを考え，その収束定理を 2 つの型で研究する。1 つは上村–高橋の定理を Banach 空間で議論するものであり，他の 1 つは，計画数学の分野で得られていた Solodov-Svaiter の定理 [30] を Banach 空

間に拡張するものである。第 5 節では Hilbert 空間での非拡大写像の拡張である疑非拡大写像を定義し，その写像の収束定理を証明する。この定理は，Hilbert 空間での中條–高橋 [22] の定理の拡張定理である。第 6 節では，Hilbert 空間での非拡大写像の拡張であるもう 1 つ非線形写像（準非拡大写像）を定義し、第 4 節とは違った極大単調作用素のリゾルベントの収束定理を証明する。この節では，新しい非線形射影が登場する。第 7 節では，第 3，4，6 節で得られた近接点法による定理を凸関数の最小値問題へ応用する。第 8 節は，第 7 節と同様近接点法をミニ・マックス定理の鞍点を求める問題に応用する。本稿を読むことによって，Banach 空間の面白さや奥深さ，そして難しさを知ってもらえれば幸いである。

2. 準備

H を Hilbert 空間とし，C を H の閉凸集合とする。このとき，任意の $x \in H$ に対して

$$\|x - z\| = \min\{\|x - y\| :\ y \in C\}$$

となるような C の元 z が一意に存在する。任意の $x \in H$ に対して，このような $z \in C$ を対応させる距離射影 P_C はつぎの性質をもつ。任意の $x \in H$，$y \in C$ に対して

$$\langle x - P_C x, P_C x - y \rangle \geq 0,$$
$$\|x - y\|^2 \geq \|x - P_C x\|^2 + \|y - P_C x\|^2$$

が成り立つ。詳しくは [34] を参照せよ。Hilbert 空間上での距離射影の概念は Banach 空間の場合にも拡張される。E を回帰的で狭義凸な Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする。このとき，任意の $x \in E$ に対して

$$\|x - z\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}$$

となるような $z \in C$ は一意に存在するが，$x \in E$ に対して，このような C の元 z を対応させる写像をやはり P_C で表し，P_C を E から C の上への距離射影と呼ぶ。E を Banach 空間とし，E^* をその共役空間とする。$x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値を $x^*(x)$ または $\langle x, x^* \rangle$ で表す。E における点列 $\{x_n\}$ が x に弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ で表す。E の凸性の modulus δ は，$0 \leq \epsilon \leq 2$ となる ϵ に対して

$$\delta(\epsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x + y\|}{2} :\ \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1,\ \|x - y\| \geq \epsilon\right\}$$

で定義される。Banach 空間 E が一様凸であるとは，$\epsilon > 0$ に対して，$\delta(\epsilon) > 0$ が常に成り立つときをいう。E の元 x に対して，E から E^* への集合値写像 J が

$$J(x) = \{x^* \in E^* :\ \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

が定義されるが，この J を E 上の相対（duality）写像という。$U=\{x\in E:\ \|x\|=1\}$ としよう。このとき，$x,y\in U$ に対して，極限

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t} \tag{2.1}$$

を考えよう。E のノルムが Gâteaux 微分可能であるとは，任意の $x,y\in U$ に対して，(2.1) が常に存在するときをいう。このとき，Banach 空間 E は滑らかであるともいう。E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるとは，任意の $y\in U$ に対して，(2.1) が $x\in U$ に関して一様に収束するときをいう。E のノルムが Fréchet 微分可能であるとは，任意の $x\in U$ に対して，(2.1) が $y\in U$ に関して一様に収束するときをいう。(2.1) が $x,y\in U$ に対して一様に収束するとき，E のノルムは一様に Fréchet 微分可能であるという。このとき，E は一様に滑らかであるともいう。E が Gâteaux 微分可能なノルムをもてば，E 上の duality 写像は一価写像になる。

E を滑らかで，回帰的な狭義凸 Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合とすると，E から C の上への距離射影 P_C が存在するが，$x\in E$ と $z\in C$ に対して，$z=P_Cx$ であるための必要十分条件は

$$\langle z-y, J(x-z)\rangle \geq 0,\quad \forall y\in C \tag{2.2}$$

が成り立つことである。ただし，J は E 上の相対写像である。詳しくは [33] を参照のこと。Banach 空間 E が Opial's condition [24] を満たすとは，$x_n \rightharpoonup x$ かつ $x\neq y$ であるならば

$$\liminf_{n\to\infty}\|x_n-x\| < \liminf_{n\to\infty}\|x_n-y\|$$

となるときをいう。

E を Banach 空間とし，$A\subset E\times E$ としよう。A が増大作用素（accretive operator）であるとは，$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A$ に対して，常に $\langle y_1-y_2, j\rangle \geq 0$ となる $j\in J(x_1-x_2)$ が存在するときをいう。ただし，J は E の duality 写像である。$A\subset E\times E$ を増大作用素とする。このとき，$\lambda>0$ に対して A のリゾルベント（resolvent）と呼ばれる J_λ がつぎのように定義される。任意の $x\in R\,(I+\lambda A)$ に対して

$$J_\lambda x=\{z\in E:\ z+\lambda Az\ni x\}.$$

このとき，$J_\lambda x$ は高々一点であり，J_λ は非拡大写像となる。詳しくは [33] を参照せよ。A のリゾルベント J_λ から吉田近似と呼ばれる A_λ が任意の $x\in R\,(I+\lambda A)$ に対して

$$A_\lambda x=\frac{1}{\lambda}(x-J_\lambda x)$$

によって定義される。すなわち

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}, \quad A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda).$$

増大作用素 A はすべての $r > 0$ に対して $R(I + rA) = E$ であるとき，m-増大作用素といわれる。$A \subset E \times E^*$ とする。A が単調（monotone）であるとは，$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ に対して

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0$$

が常に成り立つときをいう。単調作用素 $A \subset E \times E^*$ が極大（maximal）であるとは，A を真に含む単調作用素 $B \subset E \times E^*$ が存在しないときをいう。すなわち，$B \subset E \times E^*$ が単調で，かつ $A \subset B$ であるならば $A = B$ となるときをいう。つぎの定理はよく知られている [34]。

定理 2.1（[34]）　E を回帰的な Banach 空間とし，$J\colon\ E \to E^*$ を duality 写像とする。A を単調作用素とする。このとき，A が極大となるための必要十分条件は，すべての $r > 0$ に対して

$$R(J + rA) = E^*$$

となることである。ただし，$R(J + rA)$ は $J + rA$ の値域を表す。

定理 2.1 を用いると，Hilbert 空間での m-増大作用素と極大単調作用素は同値であることがわかる。もちろん Banach 空間では 2 つの作用素は違ったものとなる。C を Banach 空間 E の空でない閉凸集合とする。このとき，C が正規構造をもつとは，2 点以上を含む C の任意の有界閉凸集合 D に対して，$z \in D$ が存在して

$$\sup\{\|z - y\|\colon\ y \in D\} < \delta(D)$$

となるときをいう。ただし，$\delta(D)$ は D の直径を表す。一様凸な Banach 空間の空でない閉凸集合は正規構造を持つし，Banach 空間のコンパクト凸集合は正規構造をもつ。E を Banach 空間とし，C を E の空でない集合とする。このとき，E から C 上への写像 P が サニー（sunny）であるとは，任意の $x \in E$ と $t \geq 0$ に対して

$$P(Px + t(x - Px)) = Px$$

が成り立つことである。同様に，E から C 上への写像 P が 射影（retraction）であるとは，任意の $x \in C$ に対して，$Px = x$ が成り立つことである。E を滑らかな Banach 空間とし，C を E の空でない集合とする。また P を E から C の上への射影とする。このとき，P がサニーかつ非拡大になるための必要十分条件は

$$\langle x - Px, J(Px - y) \rangle \geq 0, \quad \forall x \in E,\ \forall y \in C \tag{2.3}$$

が成り立つことである。ただし，J は E 上の相対写像である。E が滑らかな Banach 空間では，E から C 上への サニー非拡大射影は一意に決まる（[33] を参照）。E を滑らかな Banach 空間とする。E 上の相対写像 J が弱点列的連続（weakly sequentially continuous）であるとは，$\{x_n\}$ が x に弱収束するとき，$\{Jx_n\}$ が Jx に弱*収束するときをいう。

3.　m-増大作用素とサニー非拡大射影

この節では，増大作用素の収束定理とサニー非拡大射影を取り扱う。

定理 3.1（[41]）　E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ 回帰的な Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合で正規構造をもつものとする。$A \subset E \times E$ を $A^{-1}0 \neq \emptyset$ となる増大作用素で

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{t>0} R(I+tA)$$

を満たすものとする。 J_t を $t>0$ に対する A のリゾルベントとし，f を C から C への 縮小写像とする。このとき，つぎの命題が成り立つ。

（1）$t>0$ に対して, $J_t f$ は C の中に一意の不動点 u_t をもつ;

（2）$t \to \infty$ ならば, $\{u_t\}$ は $u \in A^{-1}0$ に強収束する。ここで，$u = \Pi_{A^{-1}0} f u$ である。ただし，$\Pi_{A^{-1}0}$ は C から $A^{-1}0$ の上へのサニー非拡大射影である。

定理 3.1 の直接的な結果として, つぎの 2 つの定理を得る。

定理 3.2（[42]）　E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ 回帰的な Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合で正規構造をもつものとする。$A \subset E \times E$ を $A^{-1}0 \neq \emptyset$ となる増大作用素で

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{t>0} R(I+tA)$$

を満たすものとする。J_t を $t>0$ に対する A のリゾルベントとする，このとき，$x \in C$ に対して，$\{J_t x\}$ は $u \in A^{-1}0$ に強収束する。ここで，$u = \Pi_{A^{-1}0} x$ である。ただし， $\Pi_{A^{-1}0}$ は C から $A^{-1}0$ の上へのサニー非拡大射影である。

証明　$x \in C$ を固定し，C から C への写像 f を

$$f(y) = x, \quad \forall y \in C$$

と定義する。このとき，$t>0$ に対して, $u_t = J_t f(u_t)$ は $u_t = J_t x$ を意味する．そこで，定理 3.1 から $\{J_t x\}$ は $u \in A^{-1}0$ に強収束する。ここで，$u = \Pi_{A^{-1}0} x$ である。 □

定理 3.3（[14]） E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ 回帰的な Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合で正規構造をもつものとする。T を C から C への $F(T) \neq \emptyset$ となる非拡大写像とし，f を C から C への縮小写像とする。$0 < t < 1$ となる t に対して， 写像 $S_t : C \to C$ を

$$S_t x = (1-t)Tx + tf(x), \quad \forall x \in C$$

で定義する。このとき，つぎの命題が成り立つ。

（1）$0 < t < 1$ となる t に対して, S_t は C の中に一意の不動点を u_t をもつ;
（2）$t \to 0$ ならば, $\{u_t\}$ は $u \in F(T)$ に強収束する。ここで，$u = \Pi_{F(T)} f(u)$ である。ただし，$\Pi_{F(T)}$ は C から $F(T)$ の上へのサニー非拡大射影である。

証明 $0 < t < 1$ となる t に対して, S_t の一意の不動点 u_t は

$$u_t = (1-t)Tu_t + tf(u_t)$$

である。この等式は

$$u_t + \frac{1-t}{t}(u_t - Tu_t) = f(u_t)$$

となる。$A = I - T$ と置くと, [33, Theorem 4.6.4] から A は増大作用素で，かつ

$$\overline{D(A)} = C \subset \bigcap_{s>0} R(I + sA)$$

を満たす。そこで，$u_t = (1-t)Tu_t + tf(u_t)$ から $J_s f(u_t) = u_t$ を得る。ここで，$s = \frac{1-t}{t}$ である。だから，定理 3.1 によって $t \to 0$ のとき， $\{u_t\}$ は $u \in F(T)$ に強収束する。また，$u = \Pi_{F(T)} f(u)$ である。 □

定理 3.1 を用いると, Banach 空間の増大作用素のリゾルベントに対する強収束定理を得ることができる。

定理 3.4（[41]） E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ 回帰的な Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合で正規構造をもつものとする。$A \subset E \times E$ を $A^{-1}0 \neq \emptyset$ となる増大作用素で

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{t>0} R(I + tA)$$

を満たすものとする。 J_t を $t > 0$ に対する A のリゾルベントとし，f を C から C への縮小写像とする。$x_1 = x \in C$ とし，点列 $\{x_n\}$ を C の中でつぎのように定義する。

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n) J_{t_n} x_n, \qquad n = 1, 2, 3, \dots .$$

ただし，$\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ と $\{t_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} t_n = \infty$$

を満たすとする。このとき，$\{x_n\}$ は $u \in A^{-1}0$ に強収束する。ここで，$u = \Pi_{A^{-1}0} f(u)$ である。ただし，$\Pi_{A^{-1}0}$ は C から $A^{-1}0$ の上へのサニー非拡大射影である。

つぎの定理は増大作用素のリゾルベントに対する弱収束型の近接点法である。

定理 3.5（[12]） E を一様 Fréchet 微分可能なノルムをもつ 回帰的な Banach 空間とし， C を E の空でない閉凸集合で正規構造をもつものとする。$A \subset E \times E$ を $A^{-1}0 \neq \emptyset$ となる増大作用素で

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{t>0} R(I + tA)$$

を満たすものとする。 J_t を $t > 0$ に対する A のリゾルベントとする。$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすとし，$x_1 = x \in C$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

で定義する。このとき，$\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に弱収束する。

定理 3.1，3.2，3.4，3.5 における増大作用素の条件は，勿論 m-増大作用素の場合に適用されるものである。

4. 極大単調作用素と距離射影（準距離射影）

この節では Bancah 空間において極大単調作用素とその収束定理を議論しよう。E を滑らかで，狭義凸な回帰的 Banach 空間とする。また，$\phi\colon\ E \times E \to (-\infty, \infty)$ を

$$\phi(x,y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2, \quad \forall x, y \in E$$

によって定義する。ここで J は E の duality mapping である。C を E の空でない閉凸集合とし，$x \in E$ とする。このとき，一意の $x_0 \in C$ が存在して

$$\phi(x_0, x) = \inf\{\phi(z, x) :\ z \in C\}$$

となる。このとき，E から C 上への写像 Q_C を $Q_C x = x_0$ によって定義する。このような Q_C を準距離射影（generalized projection）と呼ぶ。Hilbert 空間では，この Q_C と距離射影 P_C は一致する。E を滑らかな Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする。また，$x \in E$，$x_0 \in C$ とする。このとき，$x_0 = Q_C x$ であるための必要十分条件は

$$\langle x_0 - y, Jx - Jx_0 \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \tag{4.1}$$

である。ただし，J は E 上の相対写像である。

$x \in E$ と $r > 0$ に対して，つぎの方程式を考える。

$$Jz + rAz \ni Jx. \tag{4.2}$$

定理 2.1 によって，解 z が存在する。また，Banach 空間が狭義凸なので，この解は一意である。その解を x_r で表す。$x_r = Q_r x$ によって，Q_r を定義し，Q_r を A のリゾルベント（resolvent）という。また，Q_r を $Q_r = (J + rA)^{-1}J$ と表すこともある。我々はもう一つのリゾルベントを定義できる。$x \in E$ と $r > 0$ に対して，つぎの方程式を考える。

$$J(z - x) + rAz \ni 0. \tag{4.3}$$

やはり定理 2.1 によって，解 z が存在する。また，Banach 空間が狭義凸なので，この解は一意である。その解を x_r で表す。$x_r = J_r x$ によって，J_r を定義し，J_r をやはり A のリゾルベント（resolvent）という。また，J_r を $J_r = (I + rJ^{-1}A)^{-1}$ と表すこともある。最近，高阪–高橋 [15] は Banach 空間上の極大単調作用素に対して，つぎの強収束定理を得た。

定理 4.1（[15]） E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を極大単調作用素とする。また，$r > 0$ に対して $Q_r = (J + rA)^{-1}J$ とし，点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する。

$$x_1 = x \in E,$$
$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n J(x) + (1 - \alpha_n)J(Q_{r_n} x_n)), \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

ここで，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすものとする。このとき，$A^{-1}0 \neq \phi$ ならば，$\{x_n\}$ は $Q_{A^{-1}0}x$ に強収束する。ここで，$Q_{A^{-1}0}$ は E から $A^{-1}0$ の上への準距離射影（generalized projection）である。

Banach 空間上の極大単調作用素に対して弱収束定理を得るために，つぎの強収束定理が必要となる。

定理 4.2（[10]） E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とする。また，$r > 0$ に対して $Q_r = (J + rA)^{-1}J$ とし，$Q_{A^{-1}0}$ を E から $A^{-1}0$ 上への準距離射影（generalized projection）とする。また，E の点列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = x \in E,$$
$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n J(x_n) + (1 - \alpha_n)J(Q_{r_n}x_n)), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

で定義する。ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ である。このとき，$\{Q_{A^{-1}0}(x_n)\}$ は $A^{-1}0$ の点 v に強収束する。さらに，この元 $v \in A^{-1}0$ は

$$\lim_{n\to\infty} \phi(v, x_n) = \min_{y \in A^{-1}0} \lim_{n\to\infty} \phi(y, x_n)$$

を満たす。

定理 4.3（[10]） E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，その相対写像 J を弱点列的連続（weakly sequentially continuous）とする。$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とする。$r > 0$ に対して $Q_r = (J + rA)^{-1}J$ とし，$Q_{A^{-1}0}$ を E から $A^{-1}0$ 上への準距離射影（generalized projection）とする。また，$\{x_n\}$ をつぎのように定義する。

$$x_1 = x \in E,$$
$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n J(x_n) + (1 - \alpha_n)J(Q_{r_n}x_n)), \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

ここで，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすとする。このとき, 点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 v に弱収束する。ここで, v は $v = \lim_{n\to\infty} Q_{A^{-1}0}(x_n)$ である。

定理 4.3 の直接的な結果として，つぎの定理を得る。

定理 4.4（[10]） E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，その duality 写像 J を弱点列的連続（weakly sequentially continuous）とする。$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とし，$r > 0$ に対して，$Q_r = (J + rA)^{-1}J$ とする。$Q_{A^{-1}0}$ を E から $A^{-1}0$ 上への generalized projection とする。$x_1 = x \in E$ とし，点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する。

$$x_{n+1} = Q_{r_n}x_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

ここで，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たす。このとき $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 v に弱収束する。ここで $v = \lim_{n\to\infty} Q_{A^{-1}0}(x_n)$ である。

上村–高橋の強収束定理（定理 1.4）とは別に，Solodov-Svaiter [30] は Hilbert 空間におけるつぎの強収束定理を得た。

定理 4.5（[30]） H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とする。$x \in H$ とし，点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する。

$$\begin{cases} x_1 = x \in H, \\ 0 = v_n + \dfrac{1}{r_n}(y_n - x_n),\ v_n \in Ay_n, \\ H_n = \{z \in H : \langle z - y_n, v_n \rangle \leq 0\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle z - x_n, x_1 - x_n \rangle \leq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n} x_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots . \end{cases}$$

ただし，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすとする。このとき，点列 $\{x_n\}$ は $P_{A^{-1}0}x_1$ に強収束する。ここで，$P_{A^{-1}0}$ は H から $A^{-1}0$ の上への距離射影である。

大沢–高橋 [23] は（4.3）で定義された極大単調作用素 A のリゾルベント J_r を用いて，Solodov-Svaiter[30] の拡張定理を得た。

定理 4.6（[23]） E を一様凸で一様に滑らかな Banach 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とする。点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する。

$$\begin{cases} x_1 \in E, \\ y_n = J_{r_n} x_n, \\ H_n = \{z \in E : \langle y_n - z, J(x_n - y_n) \rangle \geq 0\}, \\ W_n = \{z \in E : \langle x_n - z, J(x_1 - x_n) \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n} x_1,\ n = 1, 2, 3, \dots . \end{cases}$$

ただし，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすとする。このとき，$\{x_n\}$ は $P_{A^{-1}0}x_1$ に強収束する。ここで，$P_{A^{-1}0}$ は E から $A^{-1}0$ の上への距離射影である。

この節の最後に，大沢–高橋 [23] とは異なる Solodov-Svaiter の拡張定理を述べる。上村–高橋 [13] は（4.2）で定義されたリゾルベントを用いてつぎの強収束定理を得た。

定理 4.7（[13]） E を一様凸で一様に滑らかな Banach 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とする。$r > 0$ に対して，$Q_r = (J + rA)^{-1}J$ とし，点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する。

$$
\begin{cases}
x_1 \in E, \\
y_n = Q_{r_n} x_n, \\
H_n = \{z \in E : \langle z - y_n, Jx_n - Jy_n \rangle \le 0\}, \\
W_n = \{z \in E : \langle z - x_n, Jx_1 - Jx_n \rangle \le 0\}, \\
x_{n+1} = Q_{H_n \cap W_n} x_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots .
\end{cases}
$$

ただし，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすとする。このとき，$\{x_n\}$ は $Q_{A^{-1}0} x_1$ に強収束する。ここで，$Q_{A^{-1}0}$ は E から $A^{-1}0$ の上への準距離射影（generalized projection）である。

5. 疑非拡大作用素と収束定理

2003 年，中條–高橋 [22] は Hilbert 空間における非拡大写像に対するつぎの強収束定理を示した。

定理 5.1（[22]） C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸集合とする。T を C から C への $F(T) \neq \emptyset$ となる非拡大写像とし，$P_{F(T)}$ を H から $F(T)$ の上への距離射影とする。また，C の点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する。

$$
\begin{cases}
x_1 = x \in C, \\
y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) S x_n, \\
C_n = \{z \in C : \|z - y_n\| \le \|z - x_n\|\}, \\
Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x - x_n \rangle \ge 0\}, \\
x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots .
\end{cases}
$$

ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ は $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ を満たし， $P_{C_n \cap Q_n}$ は H から $C_n \cap Q_n$ の上への距離射影である。このとき，$\{x_n\}$ は $P_{F(T)} x$ に強収束する。

この定理を Banach 空間でこのままの形で証明することは難しい。C が閉凸集合になってくれないからである。そこで，松下–高橋 [20] は Banach 空間での Hilbert 空間での非拡大写像を拡張するつぎの非線形写像を考えた。C を Banach 空間 E の閉凸集合とし， T を C から C への写像とする。このとき，$F(T)$ によって T の不動点集合を表す。C の点 p が T の漸近的不動点（asymptotic fixed point）であるとは，C の点列 $\{x_n\}$ で，$\{x_n\}$ が p に弱収束し，かつ $\lim_{n\to\infty}(x_n - Tx_n) = 0$ となるものが存在するときをいう。T の漸近的不動点集合は $\hat{F}(T)$ で表される。C から C への写像 T が疑非拡大（relatively nonexpansive） であるとは，$\hat{F}(T) = F(T)$ かつ

$$
\phi(p, Tx) \le \phi(p, x), \quad \forall x \in C, \ \forall p \in F(T)
$$

が成り立つときをいう。松下–高橋 [20] はこの非線形写像を用いて，中條–高橋 [22] の定理を Banach 空間につぎの形で拡張した。

定理 5.2（[20]） E を一様凸で一様に滑らかな Banach 空間とし， C を E の空でない閉凸集合とする。T を C から C への $F(T) \neq \phi$ を満たす疑非拡大写像とし， $\{\alpha_n\}$ を $0 \leq \alpha_n < 1$ と $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ を満たす実数の列とする。点列 $\{x_n\}$ はつぎのようであるとする。

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ y_n = J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JTx_n), \\ H_n = \{z \in C : \phi(z, y_n) \leq \phi(z, x_n)\}, \\ W_n = \{z \in C : \langle x_n - z, Jx - Jx_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = Q_{H_n \cap W_n} x,\ n = 1, 2, 3, \dots\ . \end{cases}$$

ただし，J は E の相対写像である。$Q_{F(T)}$ を C から $F(T)$ の上への準距離射影とするとき，$\{x_n\}$ は $Q_{F(T)}x$ に強収束する。

定理 5.2 を用いて，中條–高橋 [22] の定理をつぎのように証明することができる。中條–高橋の定理を証明するためには，T が非拡大写像であるとき，T が疑非拡大写像であることをいえばよい。$F(T) \subset \hat{F}(T)$ は明らかである。$u \in \hat{F}(T)$ ならば，このとき，点列 $\{x_n\} \subset C$ で $x_n \rightharpoonup u$ かつ $x_n - Tx_n \to 0$ を満たすものがある。T は非拡大なので，T は demiclosed である。そこで，$u = Tu$ となる。これは $F(T) = \hat{F}(T)$ を意味する。さらに， Hilbert 空間 H では， $x, y \in H$ に対して

$$\phi(x, y) = \|x - y\|^2$$

が成り立つ。そこで，$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ と $\phi(Tx, Ty) \leq \phi(x, y)$ は同値である。だから，T は疑非拡大写像である。よって，定理 5.2 から，中條–高橋の定理を得る。疑非拡大写像のもう 1 つの代表的な例は極大単調作用素のリゾルベント Q_r である。そこで，定理 5.2 を用いると，Banach 空間における極大単調作用素に対するつぎのような強収束定理を得ることもできる。

定理 5.3（[20]） E を一様凸で一様に滑らかな Banach 空間とし，A を E から E^* への極大単調作用素とする。Q_r を $r > 0$ に対する A のリゾルベントとし，$\{\alpha_n\}$ は $0 \leq \alpha_n < 1$ と $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ を満たす実数の列とする。点列 $\{x_n\}$ は以下のようであるとする。

$$\begin{cases} x_1 = x \in E, \\ y_n = J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JQ_r x_n), \\ H_n = \{z \in E : \phi(z, y_n) \leq \phi(z, x_n)\}, \\ W_n = \{z \in E : \langle x_n - z, Jx - Jx_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = Q_{H_n \cap W_n} x,\ n = 1, 2, 3, \dots\ . \end{cases}$$

ただし，J は E の相対写像 とする。もし $A^{-1}0$ が空でないとし，$Q_{A^{-1}0}$ を E から $A^{-1}0$ の上への準距離射影とするならば，点列 $\{x_n\}$ は $Q_{A^{-1}0}x$ に強収束する。

つぎに，Banach 空間における疑非拡大写像に対する弱収束定理を得る。この定理は Browder-Petryshyn [4] の定理とも関係している。それを述べる前に，つぎの定理を述べておく。

定理 5.4（[20]） E を一様凸で一様に滑らかな Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする。また，T を C から C への $F(T) \neq \phi$ を満たす疑非拡大写像とする。$\{\alpha_n\}$ を $0 \leq \alpha_n \leq 1$ を満たす実数列とする。$x_1 \in C$ とし，点列 $\{x_n\}$ を $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対してつぎのように定義する。

$$x_{n+1} = Q_C J^{-1}(\alpha_n J x_n + (1-\alpha_n) J T x_n).$$

このとき，$\{Q_{F(T)}x_n\}$ は T の不動点に強収束する。ただし， $Q_{F(T)}$ は C から $F(T)$ の上への準距離射影である。

これを用いて，つぎの弱収束定理を得る。

定理 5.5（[20]） E を一様凸で一様に滑らかな Banach 空間とし， C を E の空でない閉凸集合とする。また，T を C から C への $F(T) \neq \phi$ を満たす疑非拡大写像とする。$\{\alpha_n\}$ を実数列で

$$0 \leq \alpha_n \leq 1, \quad \liminf_{n\to\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) > 0$$

を満たすものとする。$x_1 \in C$ とし，$\{x_n\}$ を $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して

$$x_{n+1} = Q_C J^{-1}(\alpha_n J x_n + (1-\alpha_n) J T x_n)$$

で定義する。もし J が弱点列的連続ならば, $\{x_n\}$ は u に弱収束する。ただし, $u = \lim_{n\to\infty} Q_{F(T)}x_n$ であり，$Q_{F(T)}$ は C から $F(T)$ の上への準距離射影である。

定理 5.5 を用いて，Browder-Petryshyn [4] の定理を証明することができる。

定理 5.6（[4]） C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸集合とし，T を C から C への $F(T) \neq \phi$ を満たす非拡大写像とする。λ を実数で，$0 < \lambda < 1$ を満たすとする。$x_1 \in C$ とし，点列 $\{x_n\}$ を $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して

$$x_{n+1} = \lambda x_n + (1-\lambda) T x_n$$

で定義する。このとき，$\{x_n\}$ は u に弱収束する。ただし， $u = \lim_{n\to\infty} P_{F(T)}x_n$ であり，$P_{F(T)}$ は C から $F(T)$ の上への距離射影である。

6. 準非拡大写像と新しい非線形射影

これまで，Hilbert 空間での距離射影を拡張する Banach 空間での非線形射影を 3 つ取り扱った。すなわち，距離射影 P_C，サニー非拡大射影 Π_C，準距離射影 Q_C である。それらは dual pair を用いて，(2.1)，(2.2)，(4.1) によって特徴付けられている。そこで E を Banach 空間とし，C を E の部分集合とするとき

$$\langle x - R_C x, J(R_C x) - J(y)\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C$$

を満たすような E から C の上への第 4 の射影 R_C が存在するだろうかという疑問が自然に湧く [37]。その疑問に答えるのがこの節である。

E を滑らかな Banach 空間とし，D を E の空でない閉凸集合とする。このとき，写像 $R : D \to D$ が準非拡大（generalized nonexpansive）であるとは，$F(R) \neq \emptyset$ であり，かつ

$$\phi(Rx, y) \leq \phi(x, y), \quad \forall x \in D,\ \forall y \in F(R)$$

がつねに成り立つことである。この写像に関してつぎの定理がいえる。

定理 6.1（[8]）　E を滑らかで狭義凸な Banach 空間とし，C を空でない集合とする。また，R_C を E から C の上への射影とする。このとき，R_C がサニーかつ準非拡大になる必要十分条件は

$$\langle x - R_C x, J(R_C x) - J(y)\rangle \geq 0, \quad \forall x \in E,\ \forall y \in C \tag{6.1}$$

となることである。ただし，J は E から E への相対写像である。

E を滑らかで狭義凸な Banach 空間とし，C を空でない集合とする。このとき，E から C の上へのサニー準非拡大射影は一意に決まる。実際，R, S を E から C の上へのサニー準非拡大射影とする。このとき，定理 6.1 より，$x \in E$ とすると

$$\langle x - Rx, J(Rx) - J(y)\rangle \geq 0,\ \langle x - Sx, J(Sx) - J(y)\rangle \geq 0,\ \forall y \in C$$

が成り立つ。$Rx, Sx \in C$ であることから

$$\langle x - Rx, J(Rx) - J(Sx)\rangle \geq 0,\ \langle x - Sx, J(Sx) - J(Rx)\rangle \geq 0$$

が成り立つ。この 2 つの不等式から

$$\langle Sx - Rx, J(Rx) - J(Sx)\rangle \geq 0$$

が得られる。E が狭義凸であることから $Sx = Rx$ である。また，この計算から分かるように，つぎの不等式を満たす $z \in E$ は一意である。

$$\langle x - z, J(z) - J(y) \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C.$$

そこで，滑らかで狭義凸な Banach 空間の場合に，E から C の上へのサニー準非拡大射影を R_C で表すことにする。

E を滑らかで，回帰的な狭義凸 Banach 空間とし，$B \subset E^* \times E$ を極大単調作用素とする。このとき

$$R(J^{-1} + \lambda B) = E, \quad \forall \lambda > 0$$

である。よって，$x \in E$ に対して，$x^* \in E^*$ が存在して，$x \in J^{-1}x^* + \lambda Bx^*$ となる。E は滑らか，かつ回帰的で狭義凸なので，ある $z \in E$ が存在して，$x^* = J(z)$ となる。だから，$x \in E$ に対して

$$x \in J^{-1}J(z) + \lambda BJ(z) = z + \lambda BJ(z) \subset R(I + \lambda BJ)$$

である。そこで，$\lambda > 0$ と $x \in E$ に対して，R_λ を

$$R_\lambda x := \{z \in E : x \in z + \lambda BJ(z)\}$$

であると定義しよう。すると，$D(R_\lambda) = E$ であり，かつ任意の $x \in E$ に対して，$R_\lambda x$ は一点からなる。実際，$D(R_\lambda) = E$ であることは，前の計算 $E \subset R(I + \lambda BJ)$ よりわかる。$R_\lambda x$ が一点であることは，$z_1 + \lambda w_1 = x$, $z_2 + \lambda w_2 = x$, $w_1 \in BJ(z_1)$, $w_2 \in BJ(z_2)$ とすると，B が単調であることから

$$\langle w_1 - w_2, J(z_1) - J(z_2) \rangle \geq 0$$

を得る。よって

$$\left\langle \frac{x - z_1}{\lambda} - \frac{x - z_2}{\lambda}, J(z_1) - J(z_2) \right\rangle \geq 0$$

を得る。そこで

$$\langle (x - z_1) - (x - z_2), J(z_1) - J(z_2) \rangle \geq 0$$

となり

$$\langle z_2 - z_1, J(z_1) - J(z_2) \rangle \geq 0$$

を得る。E は狭義凸なので，$z_1 = z_2$ を得る。よって，$R_\lambda x$ は一点からなる。R_λ の定義域と値域は $D(R_\lambda) = R(I + \lambda BJ)$ であり、$R(R_\lambda) = D(BJ)$ であることもよい。ただし，I は恒等作用素である。R_λ は B のリゾルベントと呼ばれ

$$R_\lambda = (I + \lambda BJ)^{-1}$$

で表される。つぎに R_λ と $(BJ)^{-1}0$ の性質について述べておこう。

定理 6.2（[8]） E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ回帰的な狭義凸 Banach 空間とし，$B \subset E^* \times E$ を $B^{-1}0 \neq \emptyset$ となる極大単調作用素とする。このとき，つぎが成り立つ。

（1）任意の $\lambda > 0$ に対して，$D(R_\lambda) = E$ である;

（2）任意の $\lambda > 0$ に対して，$(BJ)^{-1}0 = F(R_\lambda)$ である。ただし， $F(R_\lambda)$ は R_λ の不動点集合である;

（3）$(BJ)^{-1}0$ は閉集合である;

（4）任意の $\lambda > 0$ に対して，R_λ は準非拡大になる。

さらに，[8] の中でつぎの定理も証明された。

定理 6.3（[8]） E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸 Banach 空間とし，$B \subset E^* \times E$ を $B^{-1}0 \neq \emptyset$ となる極大単調作用素とする。このとき，つぎが成り立つ。

（1）任意の $x \in E$ に対して，$\lim_{r\to\infty} R_r x$ が存在し，その極限は $(BJ)^{-1}0$ に属する;

（2）$x \in E$ に対して，$Rx := \lim_{r\to\infty} R_r x$ と置くならば，R は E から $(BJ)^{-1}0$ の上へのサニー準非拡大射影である。

定理 6.3 の中の R はこれまでに発見されていなかった Banach 空間における新しい非線形射影である。これらの結果を用いて，茨木–高橋 [9] は Hilbert 空間での上村–高橋の定理（定理 1.4，定理 1.5）の Banach 空間への拡張であるつぎの強収束定理，及び弱収束定理を得た。

定理 6.4（[9]） E を一様凸で，一様に滑らかな Banach 空間とし，$B \subset E^* \times E$ を $B^{-1}0 \neq \emptyset$ となる極大単調作用素とする。$r > 0$ に対して，$R_r = (I + rBJ)^{-1}$ とする。$x_1 = x \in E$ とし，点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する。

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) R_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする。このとき，点列 $\{x_n\}$ は $R_{(BJ)^{-1}0}(x)$ に強収束する。ここで，$R_{(BJ)^{-1}0}$ は E から $(BJ)^{-1}0$ の上へのサニー準非拡大射影である。

定理 6.5（[9]） E を一様凸で，一様に滑らかな Banach 空間とし，その相対写像 J が弱点列的連続（weakly sequentially continuous）であるとする。$B \subset E^* \times E$ を $B^{-1}0 \neq \emptyset$ となる極大単調作用素とし，$r > 0$ に対して，$R_r = (I + rBJ)^{-1}$ とする。$x_1 = x \in E$ とし，点列 $\{x_n\}$ をつぎのように

定義する。

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) R_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすとする。このとき，点列 $\{x_n\}$ は $(BJ)^{-1}0$ の点に弱収束する。

7. 凸関数の最小値を求める収束定理

E を Banach 空間とし，f を E から $(-\infty,\infty]$ への凸関数とする。このとき，f が真（proper）であるとは，$f(x) < \infty$ となる $x \in E$ が存在するときをいう。f を真な凸関数とする。この f に対して，f の劣微分 ∂f が，$x \in E$ に対して

$$\partial f(x) = \{z^* \in E^* : \ f(y) \geq \langle y - x, z^* \rangle + f(x), \quad \forall y \in E\}$$

で定義される。この ∂f は E から E^* への極大単調作用素であることが知られている（[34] を参照のこと）。定理 1.4，3.4，4.1，6.4 を用いると，つぎの定理を得ることができる。

定理 7.1（[11]） H を Hilbert 空間とし，$f: \ H \to (-\infty,\infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする。$x \in H$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x$ および

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha_n x + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ J_{r_n} x_n &= \operatorname{argmin} \left\{ f(z) + \frac{1}{2r_n} \|z - x_n\|^2 : \ z \in H \right\} \end{aligned}$$

で定義する。ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする。もし $(\partial f)^{-1}0 \neq \phi$ ならば x に一番近い f の minimizer に強収束する。さらに

$$f(x_{n+1}) - f(v) \leq \alpha_n (f(x_n) - f(v)) + \frac{1-\alpha_n}{r_n} \|J_{r_n} x_n - v\| \|J_{r_n} x_n - x_n\|$$

が成り立つ。

定理 1.5, 3.5, 4.3, 6.5 を用いると，つぎの定理を得ることができる。

定理 7.2（[11]）　H を Hilbert 空間とし，$f:\ H \to (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする。$x \in H$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x$ および

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$
$$J_{r_n} x_n = \operatorname{argmin} \left\{ f(z) + \frac{1}{2r_n} \|z - x_n\|^2 :\ z \in H \right\}$$

で定義する。ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\alpha_n \in [0,k],\ 0 < k < 1, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする。もし $(\partial f)^{-1}0 \neq \phi$ ならば $\{x_n\}$ は f の minimizer に弱収束する。さらに

$$f(x_{n+1}) - f(v) \leq \alpha_n (f(x_n) - f(v)) + \frac{1-\alpha_n}{r_n} \|J_{r_n} x_n - v\| \|J_{r_n} x_n - x_n\|$$

が成り立つ。

定理 4.1 を用いると，つぎの強収束定理を得ることができる。

定理 7.3（[15]）　E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$f:\ E \to (-\infty, \infty]$ を $(\partial f)^{-1}0 \neq \phi$ となるような proper で凸な下半連続関数とする。このとき，点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する。$x_1 = x \in E$ とし

$$y_n = \arg\min_{y \in E} \{ f(y) + \frac{1}{2r_n} \|y\|^2 - \frac{1}{r_n} \langle y, Jx_n \rangle \},$$
$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n Jx + (1-\alpha_n) Jy_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

ここで，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする。このとき，$\{x_n\}$ は $Q_{(\partial f)^{-1}0} x$ に強収束する。ここで，$Q_{(\partial f)^{-1}0}$ は E から $(\partial f)^{-1}0$ 上への準距離射影（generalized projection）である。

定理 4.3 を用いると，つぎの弱収束定理を得ることができる。

定理 7.4（[10]）　E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，その duality 写像 J を弱点列的連続（weakly sequentially continuous）とする。$f:\ E \to (-\infty, \infty]$ を $(\partial f)^{-1}0 \neq \phi$ となるような proper で凸な下半連続関数とし，点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する。$x_1 = x \in E$ とし

$$y_n = \arg\min_{y \in E} \{ f(y) + \frac{1}{2r_n} \|y\|^2 - \frac{1}{r_n} \langle y, Jx_n \rangle \},$$
$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n) Jy_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

ここで，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすとする。このとき，$\{x_n\}$ は $v \in (\partial f)^{-1}0$ に弱収束する。さらに，$v = \lim Q_{(\partial f)^{-1}0}(x_n)$ である。ここで，$Q_{(\partial f)^{-1}0}$ は E から $(\partial f)^{-1}0$ 上への準距離射影（generalized projection）である。

定理 6.4, 6.5 を用いると，つぎの強，弱収束定理を得ることもできる。

定理 7.5（[9]）　E を一様凸で，一様に滑らかな Banach 空間とし，$f^* : E^* \to (-\infty,\infty]$ を $(\partial f^*)^{-1}(0) \neq \emptyset$ となるような proper で凸な下半連続関数とする。$x_1 = x \in E$ とし，点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する。

$$\begin{aligned} y_n^* &= \operatorname*{argmin}_{y^* \in E^*} \left\{ f^*(y^*) + \frac{1}{2r_n}\|y^*\|^2 - \frac{1}{r_n}\langle x_n, y^*\rangle \right\}, \\ x_{n+1} &= \alpha_n x + (1-\alpha_n)J^{-1}y_n^*, \quad n = 1,2,3,\dots . \end{aligned} \tag{7.1}$$

ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする。このとき，点列 $\{x_n\}$ は $(\partial f^* J)^{-1}0$ の点に強収束する。ここで，$R_{(BJ)^{-1}0}$ は E から $(\partial f^* J)^{-1}0$ の上へのサニー準非拡大射影である。

定理 7.6（[9]）　E を一様凸で，一様に滑らかな Banach 空間とし，その相対写像 J が弱点列的連続（weakly sequentially continuous）であるとする。$f^* : E^* \to (-\infty,\infty]$ を $(\partial f^*)^{-1}(0) \neq \emptyset$ となるような proper で凸な下半連続関数とする。$x_1 = x \in E$ とし，点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する。

$$\begin{aligned} y_n^* &= \operatorname*{argmin}_{y^* \in E^*} \left\{ f^*(y^*) + \frac{1}{2r_n}\|y^*\|^2 - \frac{1}{r_n}\langle x_n, y^*\rangle \right\}, \\ x_{n+1} &= \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)J^{-1}y_n^*, \quad n = 1,2,3,\dots . \end{aligned} \tag{7.2}$$

ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすとする。このとき，点列 $\{x_n\}$ は $(\partial f^* J)^{-1}0$ の点に弱収束する。

8.　鞍点を求める収束定理

E, F を Banach 空間とし，$X \subset E$，$Y \subset F$ を閉凸集合とする。また，$L\colon\ X \times Y \to \mathbb{R}$ を，つ

ぎの条件（1），（2）を満たす 2 変数関数とする。

（1）任意の $y \in Y$ に対し，$x \mapsto L(x, y)$ は上半連続な凹関数である:

（2）任意の $x \in X$ に対し，$y \mapsto L(x, y)$ は下半連続な凸関数である。

このとき，$(x_0, y_0) \in X \times Y$ が 2 変数関数 L の鞍点であるとは

$$L(x, y_0) \leq L(x_0, y_0) \leq L(x_0, y), \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$

が成り立つときをいう。2 変数関数 L に対して

$$K(x, y) = \begin{cases} L(x, y), & x \in X,\ y \in Y, \\ \infty, & x \in X,\ y \notin Y, \\ -\infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

とし，集合値写像 $T\colon\ E \times F \to 2^{E^* \times F^*}$ を

$$T(x, y) = \begin{cases} \partial_x(-K)(x, y) \times \partial_y K(x, y), & (x, y) \in X \times Y, \\ \phi, & (x, y) \notin X \times Y \end{cases}$$

とする。ただし

$$\partial_x(-K)(x, y) \times \partial_y K(x, y) = \partial(-K(\cdot, y))(x) \times \partial(K(x, \cdot))(y),\ (x, y) \in X \times Y$$

である。このとき，Rockafellar によれば，T は極大単調写像であり，$(0, 0) \in T(x_0, y_0)$ となる必要十分条件は，(x_0, y_0) が L の鞍点となることである。その詳しい証明は [39] を見るとよい。定理 4.1 を用いて，高阪–高橋 [16] はつぎの定理を証明した。

定理 8.1（[16]）　E と F を一様凸で，かつ滑らかな Banach 空間とし，J_E と J_F をそれぞれ，E と F 上の duality 写像とする。また，$X \subset E$，$Y \subset F$ を閉凸集合とし，$L\colon\ X \times Y \to \mathbb{R}$ をつぎの条件を満たす 2 変数関数とする。

（1）任意の $y \in Y$ に対して，$x \mapsto L(x, y)$ は上半連続な凹関数とする;

（2）任意の $x \in X$ に対して，$y \mapsto L(x, y)$ は下半連続な凸関数とする。

L の鞍点集合の全体を S とし，$S \neq \phi$ とする。このとき，$E \times F$ の点列 $\{(x_n, y_n)\}$ をつぎのように定義する：$(x, y) \in E \times F$ に対して，$(x_1, y_1) = (x, y)$ とし

$$\begin{aligned} L_n(u, v_n) \leq L_n(u_n, v_n) \leq L_n(u_n, v), \quad \forall (u, v) \in X \times Y, \\ x_{n+1} = {J_E}^{-1}(\alpha_n J_E x + (1 - \alpha_n) J_E u_n), \\ y_{n+1} = {J_F}^{-1}(\alpha_n J_F x + (1 - \alpha_n) J_F v_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

とする。ただし

$$L_n(u,v) = L(u,v) - \frac{1}{2r_n}\|u\|^2 + \frac{1}{r_n}\langle u, J_E x_n\rangle + \frac{1}{2r_n}\|v\|^2 - \frac{1}{r_n}\langle v, J_F y_n\rangle$$

であり，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$，$\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする。このとき，$\{(x_n, y_n)\}$ は $P_S(x,y)$ に強収束する。ただし，P_S は $E \times F$ から S 上への準距離射影（generalized projection）である。

高阪–高橋 [16] は定理 4.3 を用いて，つぎの弱収束定理も得ている。

定理 8.2（[16]）　E, F を一様凸で，かつ一様に滑らかな Banach 空間とし，J_E, J_F をそれぞれ，E と F 上の duality 写像で弱点列的連続（weakly seqentially continuous）なものとする。$X \subset E$ と $Y \subset F$ を閉凸集合とし，$L\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ をつぎの条件を満たす 2 変数関数とする。

（1）任意の $y \in Y$ に対して，$x \mapsto L(x,y)$ は上半連続な凹関数とする;

（2）任意の $x \in X$ に対して，$y \mapsto L(x,y)$ は下半連続な凸関数とする。

L の鞍点集合を S とし，$S \neq \phi$ とする。このとき，$E \times F$ の点列 $\{(x_n, y_n)\}$ をつぎのように定義する：

$(x,y) \in E \times F$ に対して，$(x_1, y_1) = (x,y)$ とし

$$\begin{aligned} &L_n(u, v_n) \leq L_n(u_n, v_n) \leq L_n(u_n, v), \quad \forall (u,v) \in X \times Y, \\ &\quad x_{n+1} = {J_E}^{-1}(\alpha_n J_E x_n + (1-\alpha_n) J_E u_n), \\ &\quad y_{n+1} = {J_F}^{-1}(\alpha_n J_F y_n + (1-\alpha_n) J_F v_n),\ n = 1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

とする。ただし

$$\begin{aligned} L_n(u,v) =& L(u,v) - \frac{1}{2r_n}\|u\|^2 + \frac{1}{r_n}\langle u, J_E x_n\rangle \\ &+ \frac{1}{2r_n}\|v\|^2 - \frac{1}{r_n}\langle v, J_F y_n\rangle \end{aligned}$$

であり，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$，$\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすとする。このとき，$\{(x_n, y_n)\}$ は $(x_0, y_0) \in S$ に弱収束する。ここで

$$(x_0, y_0) = \lim_{n\to\infty} P_S(x_n, y_n)$$

である。ただし，P_S は $E \times F$ から S 上への準距離射影（generalized projection）である。

9. おわりに

本稿では最適化理論における近接点法を Banach 空間で議論することによって多くの収束定理を得るとともに，Hilbert 空間の場合では現れない多くの非線形写像の存在を知った。特に，近接点法を様々な角度から Banach 空間で扱ったことにより，4 つの非線形射影の存在とその関わりを知ることができた。

本稿の最後に，Hilbert 空間の距離射影の拡張である Banach 空間における 4 つの射影を同じ条件の下で比較してみたいと思う。E を滑らかで回帰的な狭義凸 Banach 空間とし，C を空でない E の閉凸集合であるとする。P_C, Π_C, Q_C, R_C で E から C の上への距離射影（metric projection），サニー非拡大射影 (sunny nonexpansive retraction)，準距離射影 (generalized projection)，サニー準非拡大射影（sunny generalized nonexpansive retraction）をそれぞれ表すとする。このとき，$x \in E$ と $z \in C$ に対して

$$z = P_C x \Leftrightarrow \langle z - y, J(x - z)\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C,$$

$$z = \Pi_C x \Leftrightarrow \langle x - z, J(z - y)\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C,$$

$$z = Q_C x \Leftrightarrow \langle z - y, J(x) - J(z)\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C,$$

$$z = R_C x \Leftrightarrow \langle x - z, J(z) - J(y)\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C$$

が成り立つ。ただし J は E 上の相対写像である。

（東京工業大学大学院情報理工学研究科教授）

参　考　文　献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projections in Banach spaces: Properties and applications*, in Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type (A. G. Kartsatos Ed.), Marcel Dekker, New York, 1996, pp. 15–20.

[2] H. Brèzis, *Opérateurs maximaux monotones*, Mathematics Studies No. 5, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[3] F. E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **54** (1965), 1041–1044.

[4] F. E. Browder and W. V. Petryshyn, *Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **20** (1967), 197–228.

[5] J. Diestel, *Geometry of Banach spaces, Selected Topics*, Lecture Notes in Mathematics **485**, Springer, Berlin, 1975.

[6] O. Güler,*On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization*, SIAM J. Control Optim. **29** (1991), 403–419.

[7] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 957–961.
[8] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, to appear.
[9] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for new resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, to appear.
[10] S. Kamimura, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for maximal monotone operators in a Banach space*, Set-Valued Anal. **12** (2004), 417–429.
[11] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory **106** (2000), 226–240.
[12] S. Kamimura and W. Takahashi, *Weak and strong convergence of solutions to accretive operator inclusions and applications*, Set-Valued Anal. **8** (2000), 361–374.
[13] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach Space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.
[14] M. Kikkawa and W. Takahashi, *Strong convergence theorems by the viscosity approximation methods for nonexpansive mappings in Banach spaces*, in Convex Analysis and Nonlinear Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka Eds.), Yokohama Publishers, Yokohama, 2006, to appear.
[15] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, Abstr. Appl. Anal. **2004** (2004), 239–249.
[16] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for minimax problems in Banach spaces*, in Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka, Eds.), Yokohama Publishers, 2004, pp. 203–216.
[17] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.
[18] B. Martinet, *Regularisation, d'inèquations variationelles par approximations succesives*, Revue Francaise d'Informatique et de Recherche Operationelle, 1970, pp. 154–159.
[19] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2004** (2004), 37–47.
[20] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.
[21] J. J. Moreau, *Proximité et dualité dans un espace Hilberien*, Bull. Soc. Math., France **93** (1965), 273–299.
[22] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003), 372–378.
[23] S. Ohsawa and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for resolvento of maximal monotone operator*, Arch. Math. **81** (2003), 439–445.
[24] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591–597.
[25] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274–276.
[26] R. T. Rockafellar, *Characterization of the subdifferentials of convex functions*, Pacific J. Math. **17** (1966), 497–510.
[27] R. T. Rockafellar, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 75–88.
[28] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optim. **14** (1976), 877–898.

[29] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *A hybrid projection — proximal point algorithm*, J. Convex Anal. **6** (1999), 59–70.

[30] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Program. **87** (2000), 189–202.

[31] W. Takahashi, *Fan's existence theorem for inequalities concerning convex functions and its applications*, in Minimax Theory and Applications (S. Simons and B. Ricceri, Eds.), Kluwer Academic Publishers, 1998, pp. 241–260.

[32] W. Takahashi, *Iterative methods for approximation of fixed points and their applications*, J. Oper. Res. Soc. Japan **43** (2000), 87–108.

[33] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[34] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000 (Japanese).

[35] W. Takahashi, *Fixed point theorems and proximal point algorithms*, in Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka, Eds.), Yokohama Publishers, Yokohama, 2003, pp. 471–481.

[36] W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for nonlinear operators of accretive and monotone type and applications*, in Nonlinear Analysis and Applications (R. P. Agarwal and D. O'Regan, Eds.), Kluwer Academic Publishers, 2003, pp. 891–912.

[37] W. Takahashi, *Convergence theorems for nonlinear projections in Banach spaces*, in RIMS Kokyuroku 1396 (M. Tsukada, Ed.), 2004, pp. 49–59.

[38] W. Takahashi, *Convergence theorems and nonlinear projections in Banach spaces*, in Banach and Function Spaces (M. Kato and L. Maligranda, Eds.), Yokohama Publishers, Yokohama, 2004, pp. 145–174.

[39] W. Takahashi, *Introduction to Nonlinear and Convex Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2005 (Japanese).

[40] W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for nonlinear operators and their applications*, in RIMS Kokyuroku 1443 (T. Maruyama, Ed.), 2005, pp. 1–14.

[41] W. Takahashi, *Viscosity approximation methods for resolvents of accretive operators in Banach spaces*, to appear.

[42] W. Takahashi and Y. Ueda, *On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators*, J. Math. Anal. Appl. **104** (1984), 546–553.

[43] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, Arch. Math. **58** (1992), 486–491.