Title	動学的最適化における黄金最適政策
Sub Title	Golden optimal policies on dynamic optimization
Author	岩本, 誠一(Iwamoto, Seiichi)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2007
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.99, No.4 (2007. 1) ,p.707(101)- 732(126)
JaLC DOI	10.14991/001.20070101-0101
Abstract	本論文では, 黄金最適の視点から無限連続時間上の動的最適化問題を4つ議論する。問題は最適政策が黄金であるか否かを検討することである。以下では, 2次コスト評価の制御過程と平方根利得評価の配分過程を2つずつ考える。両過程とも線形動的システム上を動いている。1つの制御過程は黄金最適政策を許容しないが, 他の3つの過程では最適政策が黄金になっていることを示す。さらに, 次の3つの方法で黄金最適軌道を具体的に導いている。(i) 1パラメータ法, (ii)オイラー方程式および(iii)ベルマン方程式。
Notes	小特集 : 経済分析と最適化の数理
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20070101-0101

「三田学会雑誌」99 巻 4 号（2007 年 1 月）

動学的最適化における黄金最適政策*

岩　本　誠　一

要　　旨

本論文では，黄金最適の視点から無限連続時間上の動的最適化問題を 4 つ議論する。問題は最適政策が黄金であるか否かを検討することである。以下では，2 次コスト評価の制御過程と平方根利得評価の配分過程を 2 つずつ考える。両過程とも線形動的システム上を動いている。1 つの制御過程は黄金最適政策を許容しないが，他の 3 つの過程では最適政策が黄金になっていることを示す。さらに，次の 3 つの方法で黄金最適軌道を具体的に導いている。(i) 1 パラメータ法，(ii) オイラー方程式 および (iii) ベルマン方程式。

キーワード

黄金政策，最適政策，動学的最適化，黄金分割，制御過程，配分過程，オイラー方程式，ベルマン方程式

1.　はじめに

E. Phelps は 『集積の黄金律：ある成長理論家の寓話』[12] で次のように述べている。ソロビアの国王は国の将来の基本方針に対する鮮烈なレポートを提出するようプロジェクトチームを編成した。王は最適な投資政策を追求するためにその方面の専門家をすべて招聘した。ソロビア国の理論家は効率性，公平性，有効性の観点から健全な財政発展のケースを種々議論した。数学者達は成長戦略を求めて，極値，汎関数，ハミルトニアンなどと格闘した。しかし，実用になる政策は何も打ち出せなかった。そのとき，一人の意思決定者に次のような話しが聞こえてきた。「全体の最適化は忘れなさい。ソロビア人は単純な人たちです。我々は明快な政策を必要としているのです。…」

これに対して本論文では最適化を詳細に議論する。ここでは連続時間上で制御過程と配分過程の両過程を考えて，そこで黄金最適化を提案する。しかし我々もまた単純明快な政策を必要とする。

* 本論文は基本的に Advaces in Mathematical Analysis “Golden optimal policy in calculus of variation and dynamic programming” の邦訳である。共に Workshop on Mathematical Optimization in Economic Analysis (Hakone, April 2006) における講演 “Golden policy in dynamic programming” に基づいている。

それは黄金最適政策である。

軌道は，次の条件を満たすとき，**黄金**という。すなわち，軌道上の任意の状態が単位時間経過すると次の状態に**黄金分割**を繰り返す形で生成されているときをいう。政策は，それがダイナミックスとともに黄金軌道を生むとき，**黄金**という。本論文では，最適政策のみならず黄金政策も同時に議論に組み込む。

我々は時間区間 $[0, \infty)$ 上の 4 つの動的最適化問題を 3 つの方法で解く。第 3 節では 2 次評価の制御過程を 2 つ，第 4 節では割引き型平方根評価の配分過程を 2 つそれぞれ解く。3 つの方法は（i）1 変数最適化法，（ii）変分法，および（iii）動的計画法，である。(i) と（ii）では黄金軌道を求め，(iii）では黄金政策を与える。最初の制御過程は黄金最適政策を持たないが，他の 3 つでは黄金最適政策をもっていることを示す。

2.　黄金軌道

実数

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

を**黄金数**という [4, 5, 13]。これは 2 次方程式

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{1}$$

の 2 つの実数解の大きい方である。(1) は**フィボナッチ 2 次方程式**とも言われている。フィボナッチ 2 次方程式は 2 つの実数 ϕ とその**共役** $\overline{\phi} := 1 - \phi$ を解にもつ。

$$\phi + \overline{\phi} = 1, \qquad \phi \cdot \overline{\phi} = -1.$$

このとき

$$\phi^2 = 1 + \phi, \qquad \overline{\phi}^2 = 2 - \phi$$
$$\phi^2 + \overline{\phi}^2 = 3, \qquad \phi^2 \cdot \overline{\phi}^2 = 1$$

が成り立つ。

定義 2.1　微分可能な関数 $x : [0, \infty) \to R^1$ は

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \log(\phi - 1) \qquad \text{または} \qquad \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \log(2 - \phi) \tag{2}$$

を満たすとき，**黄金**という。

補題 2.1　黄金関数 x は

$$x(t) = x(0)e^{-t\log\phi} \quad \text{または} \quad x(t) = x(0)e^{-t\log(1+\phi)}$$

のいずれかである。

前者の黄金関数については

$$e^{-t\log\phi} = e^{t\log(\phi-1)} = \phi^{-t} = (\phi-1)^t$$

が成り立つことに注意する。ただし

$$\log\phi \approx 0.481, \qquad \phi - 1 = \phi^{-1} \approx 0.618$$

関数 $x(t) = x(0)e^{-t\log\phi}$ を黄金と定義するのは，この関数に対しては区間 $[0, x(t)]$ を黄金比 $(2-\phi) : (\phi-1)$ で内分すると，単位時間経過後は $[0, x(t+1)]$ と $[x(t+1), x(t)]$ になっていることに基づいている。すなわち，任意の時点 t に対して $x(t+1)$ は区間 $[0, x(t)]$ を黄金分割しているからである。いま仮にある単一財の量の挙動 $x = x(\cdot)$ を考えれば，時刻 t での量 $x(t) = (x(t) - x(t+1)) + x(t+1)$ は単位時間区間 $[t, t+1)$ でそのうち $x(t) - x(t+1)$ を「消費」し，次期首 $t+1$ には量 $x(t+1)$ を「繰り越す」ことになる。この今期消費「量」と次期繰り越し「量」の 2 つの比が黄金比になっている（図 1)。

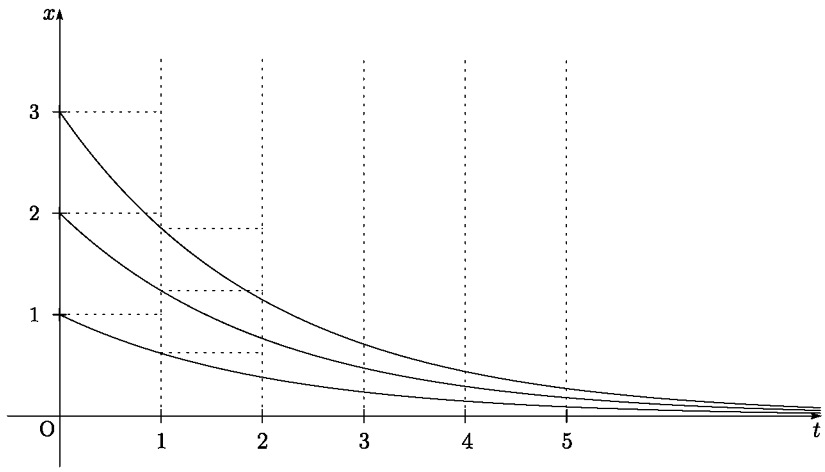

図 1　黄金軌道 $x = c(\phi-1)^t \quad c = 1, 2, 3$

また，後者については

$$e^{-t\log(1+\phi)} = e^{t\log(2-\phi)} = (1+\phi)^{-t} = (2-\phi)^t$$

である。ただし

$$\log(1+\phi) \approx 0.962, \qquad 2 - \phi = (1+\phi)^{-1} \approx 0.382$$

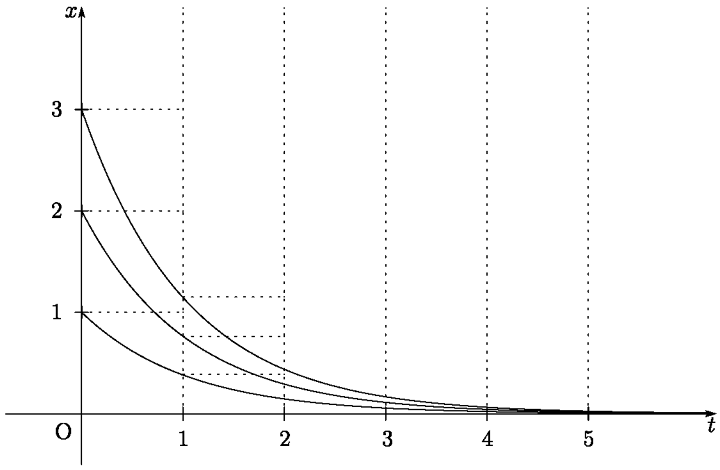

図 2　黄金軌道 $\boldsymbol{x = c(2-\phi)^t \quad c = 1, 2, 3}$

関数 $x(t) = x(0)e^{-t\log(1+\phi)}$ では任意の時点 t に対して単位時間経過後の位置 $x(t+1)$ が区間 $[0, x(t)]$ を $(\phi-1):(2-\phi)$ で $[0, x(t+1)]$ と $[x(t+1), x(t)]$ に黄金分割している。これが黄金関数の定義のもう 1 つの根拠である（図 2）。

さて，実パラメータ b をもつ線形制御過程

$$\dot{x} = bx + u \qquad t \in [0, \infty) \tag{3}$$

を導入しよう [2]。b は過程の特性を表している。ただし，$u : R^1 \to R^1$ を制御関数または制御という。特に $u(x) = px$（または $px + q$）のとき，制御は比例（または線形）という。ここに，p, q は実定数である。(3) の微分可能な解を軌道といおう。

定義 2.2　*ダイナミックス (3) 上の比例制御 u が黄金軌道を生成するとき，黄金という。*

補題 2.2　*(3) 上の比例制御 $u = px$ が黄金であるための必要十分条件は*

$$p = -b + \log(\phi - 1) \qquad \text{または} \qquad p = -b + \log(2 - \phi)$$

のいずれかである。

また，線形配分過程

$$\dot{x} = bx - u \qquad t \in [0, \infty)$$

を議論する場合は，「制御」の代わりに以下では配分という。

3. 制御過程

この節では 2 つの 2 次コスト関数

$$\int_0^\infty \left(x^2 + u^2\right) dt \quad \text{および} \quad \int_0^\infty \left(\dot{x}^2 + u^2\right) dt$$

を加法型ダイナミックス

$$\dot{x} = bx + u$$

の下で，最小化する（[2, 3]）。ただし，b は過程の特性を表す定数である。

3.1　第一の 2 次評価

非負半直線 $[0, \infty)$ 上の連続微分可能な関数の全体を C^1 とする：

$$C^1 = \{x = x(t) \,|\, x : [0, \infty) \to R^1 \text{ は連続微分可能}\}.$$

この上で定義された 2 次評価関数

$$I(x) = \int_0^\infty \left[x^2 + (bx - \dot{x})^2\right] dt$$

に対して，初期値 c を定数として，最適化問題

$$\mathrm{MP}_1(\mathrm{c}) \quad \text{minimize} \quad I(x) \quad \text{subject to} \quad \text{(i) } x \in C^1, \quad \text{(ii) } x(0) = c$$

を考える。

まず，2，3 の特別な軌道を評価してみよう：

1. 定数軌道 $x(t) = c$ の評価は $I(x) = \infty$ になる。
2. 比例軌道 $x(t) = ce^{-at}\,(0 < a < \infty)$ は

$$\begin{aligned} I(x) &= c^2 \left[1 + (a+b)^2\right] \int_0^\infty e^{-2at} dt \\ &= c^2 \frac{1 + (a+b)^2}{2a} \end{aligned}$$

になる。

3. 1 変数最適化問題

$$\min_{0<a<\infty} \frac{1 + (a+b)^2}{2a}$$

は $\hat{a} = \sqrt{1+b^2}$ で最小値 $b + \sqrt{1+b^2}$ をもつ。したがって，比例軌道のクラスでは $\hat{x}(t) = ce^{-\sqrt{1+b^2}\,t}$ は最小値

$$I(\hat{x}) = (b + \sqrt{1+b^2})c^2.$$

に到達する。

ここで $1 > \log(1+\phi) \approx 0.962$ より，b に関する方程式

$$\sqrt{1+b^2} = \log(1+\phi)$$

も

$$\sqrt{1+b^2} = \log\phi$$

も（実数）解をもたないことがわかる。したがって，比例（最適）軌道 $\hat{x}(t) = ce^{-\sqrt{1+b^2}\,t}$ は黄金になりえない。すなわち，問題 $\mathrm{MP}_1(\mathrm{c})$ は黄金最適軌道をもたない。

3.1.1 オイラー方程式

まず，片側端点固定の極値問題

$$\mathrm{EP}_1(\mathrm{c}) \quad \text{extremize} \quad \int_0^\infty f(t,x,\dot{x})dt \quad \text{subject to} \quad \text{(i) } x \in C^1, \quad \text{(ii) } x(0) = c$$

の極値（を与える）曲線 $x = x(\cdot)$ は変分方程式 —— オイラー方程式 ——

$$\frac{d}{dt} f_{\dot{x}} - f_x = 0 \tag{4}$$

および無限遠点 ∞ における境界条件 —— 横断条件 ——

$$\lim_{t\to\infty} f_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0 \tag{5}$$

を満たすことを導こう。

この 2 つの式は形式的には以下のようにして得られる（[6] 参照）。いま，$\eta = \eta(\cdot)$ を $\eta(0) = 0$ を満たす任意の C^1-級関数とし，任意の $\epsilon \in R^1$ に対して，$y := x + \epsilon\eta$ とする。このとき，y は実行可能である。すなわち，条件（i），（ii）を満たしている。ϵ の関数

$$J(\epsilon) := \int_0^\infty f(t,y,\dot{y})dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T f(t,y,\dot{y})dt$$

を定義する。関数 $J(\cdot)$ は上述の任意の η に対して $\epsilon = 0$ で極値をとらなければならない。すなわち，$J'(0) = 0$ である。

さて，$J'(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{J(h)-J(0)}{h}$ を計算しよう。まず，

$$\frac{J(h)-J(0)}{h} = \lim_{T\to\infty}\int_0^T g(t)dt$$

に注意する。ただし，

$$g(t) := g(t;h) = \frac{f(t, x+h\eta, \dot{x}+h\dot{\eta}) - f(t,x,\dot{x})}{h}.$$

平均値の定理より，θ $(0 \leq \theta \leq 1)$ が存在して

$$g(t) = f_x = +f_{\dot{x}}\dot{\eta}$$

になる。ここに

$$\begin{aligned} f_x &= f_x(t, x+\theta h\eta, \dot{x}+\theta h\dot{\eta}) \\ f_{\dot{x}} &= f_{\dot{x}}(t, x+\theta h\eta, \dot{x}+\theta h\dot{\eta}). \end{aligned}$$

部分積分と条件 $\eta(0) = 0$ によって

$$\begin{aligned} \int_0^T g(t)dt &= \int_0^T (f_x\eta + f_{\dot{x}}\dot{\eta})dt \\ &= \int_0^T \left(f_x\eta - \frac{d}{dt}f_{\dot{x}}\eta\right)dt + [f_{\dot{x}}\eta(t)]_0^T \\ &= \int_0^T \left(f_x - \frac{d}{dt}f_{\dot{x}}\right)\eta dt + f_{\dot{x}}\eta(T) \end{aligned}$$

になる。したがって，

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T g(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left(f_x - \frac{d}{dt}f_{\dot{x}}\right)\eta dt + \lim_{T\to\infty} f_{\dot{x}}\eta(T)$$

が成り立ち，

$$\begin{aligned} J'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{J(h)-J(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\lim_{T\to\infty}\int_0^T g(t)dt \\ &= \lim_{h\to 0}\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left(f_x - \frac{d}{dt}f_{\dot{x}}\right)\eta dt + \lim_{h\to 0}\lim_{T\to\infty} f_{\dot{x}}\eta(T) \\ &= \lim_{T\to\infty}\int_0^T \lim_{h\to 0}\left(f_x - \frac{d}{dt}f_{\dot{x}}\right)\eta dt + \lim_{T\to\infty}\lim_{h\to 0} f_{\dot{x}}\eta(T) \end{aligned}$$

になる。よって

$$J'(0) = \lim_{T\to\infty}\int_0^T\left(f_x - \frac{d}{dt}f_{\dot{x}}\right)\eta dt + \lim_{T\to\infty} f_{\dot{x}}\eta(T)$$

が成立する。ただし，ここでは

$$\begin{aligned} f_x &= f_x(t, x, \dot{x}) \\ f_{\dot{x}} &= f_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}). \end{aligned}$$

さて，$\eta(0) = 0$ を満たす任意の C^1-級関数 η に対して，$J'(0)$ が零にならなければならないから，

$$\begin{aligned} f_x - \frac{d}{dt}f_{\dot{x}} &= 0 \quad \text{on } [0, \infty) \\ \lim_{t\to\infty} f_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。このようにしてオイラー方程式と横断条件の 2 つが導かれる。 □

さて，2 次評価

$$f(t, x, \dot{x}) = x^2 + (bx - \dot{x})^2$$

の最小化に適用してみよう。オイラー方程式 (4) は 2 階線形微分方程式

$$\ddot{x} - a^2 x = 0 \tag{6}$$

になる。ここに

$$a = \sqrt{1 + b^2}.$$

また，横断条件 (5) は

$$\lim_{t\to\infty} [\dot{x}(t) - bx(t)] = 0 \tag{7}$$

になる。この 2 つと初期条件 (ii) からなる方程式系を解くと，

$$x(t) = ce^{-at}$$

が得られる。

3.1.2 ベルマン方程式

さて，定数パラメータ $b\,(-\infty < b < \infty)$ をもつ次の制御過程を考えよう。

$$
\mathrm{C}(c)\quad
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\int_0^{\infty}\Big(x^2+u^2\Big)\,dt & \\
\text{subject to} & \text{(i)} & \dot{x} = bx + u \quad 0 \le t < \infty \\
 & \text{(ii)} & u \in C^1 \\
 & \text{(iii)} & x(0) = c.
\end{array}
$$

この問題 $\mathrm{C}(c)$ の最小値を $v(c)$ とする。特に，$c = 0$ のとき，$x(t) = u(t) = 0$ の評価値は零である。したがって，$v(0) = 0$ である。値関数 $v = v(x)$ は次のベルマン方程式を満たす [1–3,7]:

$$
\min_{-\infty<u<\infty}\Big[x^2+u^2+v'(x)(bx+u)\Big] \,=\, 0, \qquad v(0)=0. \tag{8}
$$

これを解こう。まず，$\dfrac{d}{du}[\cdots] \,=\, 0$ より $u = -\dfrac{v'(x)}{2}$ で最小になり，

$$
\min_{-\infty<u<\infty}[\cdots] \,=\, x^2 + bx\cdot v'(x) - \frac{1}{4}\left(v'(x)\right)^2
$$

が成り立つ。式 (8) より，

$$
\frac{1}{4}\left(v'(x)\right)^2 - bx\cdot v'(x) - x^2 \,=\, 0
$$

が成り立つ。このとき，2 次形式 $v(x) = kx^2\ (k > 0)$ を仮定してよいとわかるから，係数 k は 2 次方程式

$$
k^2 - 2bk - 1 \,=\, 0
$$

を満たす。よって

$$
k \,=\, b + \sqrt{b^2+1}
$$

になる。したがって，次を得る。

補題 3.1　比例制御および 2 次値関数

$$
\hat{u}(x) = -kx, \qquad v(x) = kx^2
$$

はベルマン方程式

$$
\min_{-\infty<u<\infty}\Big[x^2+u^2+v'(x)(bx+u)\Big] \,=\, 0
$$

の解である。

このとき，線形動的システム

$$\dot{x} = -\sqrt{b^2+1}\,x, \quad x(0) = c$$

の軌道は

$$\hat{x}(t) = ce^{-\sqrt{b^2+1}\,t}$$

になる。比例制御 $\hat{u}$ は最適軌道 $\hat{x}$ を生成するが，この軌道は黄金にはなり得ない。すなわち，過程 C(c) は黄金最適制御をもたないことがわかった。しかし奇妙なことに，特性値が特に $b = \dfrac{1}{2}$ のときは，値関数の 2 次の係数 k が黄金比になっている：$k = \phi$.

3.2　第二の 2 次評価

ここでは 2 次評価基準

$$J(x) = \int_0^\infty \left[\dot{x}^2 + (bx - \dot{x})^2\right] dt \qquad x \in C^1$$

を考える。ただし $0 \le b < \infty$.

さて，所与の初期定数 c をもつ最小化問題

$$\text{MP}_2(\text{c}) \quad \text{minimize} \quad J(x) \quad \text{subject to} \quad \text{(i) } x \in C^1, \quad \text{(ii) } x(0) = c$$

を考えよう。まず，特殊な軌道を 2，3 評価してみよう。

1. 定数軌道 $x(t) = c$ では $J(x) = \infty$ になる。
2. 比例軌道 $x(t) = ce^{-at}$ は

$$\begin{aligned} I(x) &= c^2\left[a^2 + (a+b)^2\right]\int_0^\infty e^{-2at}dt \\ &= c^2\frac{a^2+(a+b)^2}{2a} \qquad (0 < a < \infty) \end{aligned}$$

で評価される。

3. この評価値を a を動かして最小化

$$\min_{0<a<\infty} \frac{a^2+(a+b)^2}{2a}$$

すると，$\hat{a} = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$ で最小になり，最小値は $(1+\sqrt{2})b$ になる。したがって，軌道 $\hat{x}(t) = ce^{-(b/\sqrt{2})t}$ は比例軌道全体の中で最適で，その最適値は

$$I(\hat{x}) = (1+\sqrt{2})bc^2$$

になる。

さて，比例軌道 $\hat{x}(t) = ce^{-(b/\sqrt{2})t}$ が黄金であるためには次のいずれか一方が成り立つときに限る。

- ケース（i）$\dfrac{b}{\sqrt{2}} = \log(1+\phi)$
  このときは
  $$b_1 = \sqrt{2}\log(1+\phi) \approx 1.361$$
  になり，黄金軌道
  $$\hat{x}_1(t) = ce^{-t\log(1+\phi)}$$
  が得られる。
- ケース（ii）$\dfrac{b}{\sqrt{2}} = \log\phi$
  このとき
  $$b_2 = \sqrt{2}\log\phi \approx 0.681$$
  になり，黄金軌道は
  $$\hat{x}_2(t) = ce^{-t\log\phi}$$
  になる。

したがって，2 つの黄金最適軌道 $\hat{x}_1$ および $\hat{x}_2$ が得られた。

3.2.1　オイラー方程式

まず，極値問題

$$\mathrm{EP}_2(\mathrm{c}) \quad \text{extremize} \quad \int_0^\infty f(x,\dot{x})dt \quad \text{subject to} \quad \text{(i) } x \in C^1, \quad \text{(ii) } x(0) = c$$

を考える。ただし，

$$f(x,\dot{x}) = \dot{x}^2 + (bx - \dot{x})^2$$

である。この問題に対するオイラー方程式（4）は

$$\ddot{x} - a^2 x = 0 \tag{9}$$

になる。ここに

$$a = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

また，横断条件 (5) は次になる。

$$\lim_{t\to\infty}(2\dot{x}(t) - bx(t)) = 0. \tag{10}$$

方程式系 —— 初期条件 (ii)，(9) および (10) —— を解くと，

$$x(t) = ce^{-at}$$

が得られる。

3.2.2　ベルマン方程式

定数パラメータ $b\,(-\infty < b < \infty)$ をもつ制御過程

$$\mathrm{C}'(c)\quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\int_0^\infty \Big(\dot{x}^2 + u^2\Big)\,dt \\ \text{subject to} & \text{(i)}\quad \dot{x} = bx + u \qquad 0 \le t < \infty \\ & \text{(ii)}\quad u \in C^1 \\ & \text{(iii)}\quad x(0) = c \end{array}$$

を考えよう。この最小値を $v(c)$ としよう。このとき，値関数 $v = v(x)$ はベルマン方程式

$$\min_{-\infty<u<\infty} \Big[(bx+u)^2 + u^2 + v'(x)(bx+u)\Big] = 0, \qquad v(0) = 0 \tag{11}$$

を満たす。これは次のように解ける。

まず，$\dfrac{d}{du}[\cdots] = 0$ より，$u = -\dfrac{1}{4}\,\big(2bx + v'(x)\big)$ で最小値

$$\min_{-\infty<u<\infty}[\cdots] = \frac{1}{2}\left[(bx)^2 + bxv'(x) - \frac{1}{4}(v'(x))^2\right]$$

をもつ。式 (11) より

$$\frac{1}{4}\,\big(v'(x)\big)^2 - bxv'(x) - b^2x^2 = 0$$

が得られる。ここで 2 次形式 $v(x) = kx^2$ $(k > 0)$ を仮定すると，係数 k は 2 次方程式

$$k^2 - 2bk - b^2 = 0$$

を満たすから

$$k = (1 + \sqrt{2})b$$

になる。したがって，次が得られた。

補題 3.2　比例制御および 2 次値関数

$$\hat{u}(x) = px, \qquad v(x) = kx^2$$

はベルマン方程式

$$\min_{-\infty<u<\infty}\left[(bx+u)^2+u^2+v'(x)(bx+u)\right] = 0$$

の解である。ただし

$$p = -\frac{1}{2}(2+\sqrt{2})b, \quad k = (1+\sqrt{2})b.$$

このとき，動的システム

$$\dot{x} = -\frac{b}{\sqrt{2}}x, \quad x(0) = c$$

は最適軌道

$$\hat{x}(t) = ce^{-(b/\sqrt{2})t}$$

をもつ。

- ケース (i) $b = \sqrt{2}\log(1+\phi) \approx 1.361$ のとき。(最適な) 比例制御 $\hat{u}(x) = -(1+\sqrt{2})\log(1+\phi)x \approx -2.323x$ は黄金である。この黄金（最適）制御は黄金軌道

$$\hat{x}(t) = ce^{-t\log(1+\phi)}$$

を生成している。

- ケース (ii) $b = \sqrt{2}\log\phi \approx 0.681$ のとき。(最適な) 比例制御 $\hat{u}(x) = -(1+\sqrt{2})\log\phi x \approx -1.162x$ も黄金である。これは黄金軌道

$$\hat{x}(t) = ce^{-t\log\phi}$$

を生成している。

4. 配分過程

この節では，2 つの割引き型平方根利得関数

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}(\sqrt{x}+\sqrt{u})dt \quad \text{および} \quad \int_0^\infty e^{-\rho t}\sqrt{u}\,dt$$

を共通な減法型ダイナミックス

$$\dot{x} = bx - u$$

の下で最大にする。ここに $\rho\ (\geq 0)$ は割引き率である。$b\ (\geq 0)$ は過程の特性を表している。

4.1　第一の平方根評価

2 つの非負定数 ρ と b は $\rho - b \geq \sqrt{b}$ を満たすとしよう。このとき，次の不等式が等号条件と共に成り立つ。

補題 4.1　区間 $[-b, \infty)$ 上で不等式

$$\frac{1+\sqrt{b+x}}{\rho+\frac{1}{2}x} \leq \frac{1}{\sqrt{1+2\rho-b}-1}$$

が成り立つ。等号が成立するのは $x = 2(1+\rho-b-\sqrt{1+2\rho-b})$ のときに限る（図 3 参照)。

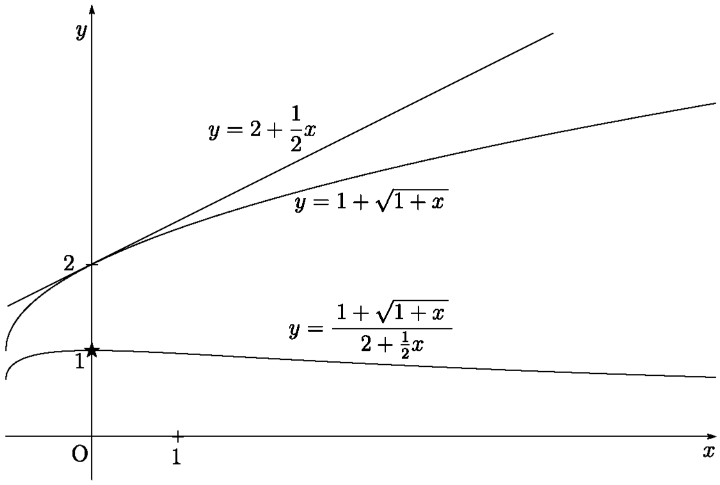

図 3　配分比 $y = \dfrac{1+\sqrt{1+x}}{2+\frac{1}{2}x}$　★: 最大点

さて，C' は非負半直線上で $\dot{x}(t) \leq bx(t),\ x(t) \geq 0$ を満たす連続微分可能関数の全体としよう：

$$C' = \{x = x(t)\,|\, x : [0, \infty) \to R^1 \text{ 連続微分可能},\ \dot{x} \leq bx,\ \ x \geq 0\}.$$

まず，第 1 の平方根評価

$$K(x) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}(\sqrt{x} + \sqrt{bx - \dot{x}})dt$$

を C' 上で最大化しよう。このとき，定数 c を与えて，変分問題：

$$\mathrm{MP}_3(\mathrm{c}) \quad \text{Maximize} \quad K(x) \quad \text{subject to} \quad \text{(i) } x \in C', \quad \text{(ii) } x(0) = c$$

を考える。2，3 の軌道を評価しよう：

1. 定数軌道 $x(t) = c$ では $K(x) = (1+\sqrt{b})\dfrac{\sqrt{c}}{\rho}$ になる。

2. 比例軌道 $x(t) = ce^{-at}\,(-b \le a < \infty)$ は次になる：

$$\begin{aligned} K(x) &= \sqrt{c}\,(1+\sqrt{b+a}\,)\int_0^\infty e^{-(\rho+\frac{1}{2}a)t}dt \\ &= \sqrt{c}\,\frac{1+\sqrt{b+a}}{\rho+\frac{1}{2}a}. \end{aligned}$$

3. ここで a を区間 $[-b,\infty)$ 上で動かして最大化しよう。すると，補題 4.2 より

$$\operatorname*{Max}_{-b\le a<\infty} \frac{1+\sqrt{b+a}}{\rho+\frac{1}{2}a}$$

は $a^* = 2(1+\rho-b-\sqrt{1+2\rho-b}\,)$ で最大になり，最大値は

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\rho-b}-1}$$

になることがわかる。したがって， $x^*(t) = ce^{-a^*t}$ は比例軌道全体の中での最適値

$$K(x^*) = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{1+2\rho-b}-1}$$

を与えることがわかる。

以下では，簡単な場合として $b=1$ または $b=0$ について，黄金最適軌道の存在を論じよう。

4.1.1　$b=1$

$b=1$ のときを考える。このときは, 条件 $\rho \ge 2$ の下では, 最適な比例軌道は $x^*(t) = ce^{-2(\rho-\sqrt{2\rho})t}$ になる。これが黄金になるのは，次の 2 つのどちらかが成り立つ場合である。

- ケース（i）$2(\rho-\sqrt{2\rho}) = \log(1+\phi)$ のとき，ρ は

  $$\rho_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+\log(1+\phi)}\,)^2 \approx 2.882$$

  になる。このとき，黄金軌道 $x_1^*(t) = ce^{-t\log(1+\phi)}$ になる。
- ケース（ii）$2(\rho-\sqrt{2\rho}) = \log\phi$ のとき，ρ は

  $$\rho_2 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+\log\phi}\,)^2 \approx 2.458$$

  になり，黄金軌道 $x_2^*(t) = ce^{-t\log\phi}$ になる。

したがって，2 つの黄金最適軌道 x_1^* と x_2^* が得られる。

4.1.2　$b=0$

今度は $b=0$ のときを考えよう。$2(1+\rho-\sqrt{1+2\rho}) = (\sqrt{1+2\rho}-1)^2$ より，条件 $\rho \ge 0$ の下では，比例軌道 $x^*(t) = ce^{-(\sqrt{1+2\rho}-1)^2t}$ が得られる。これが黄金になるのは次のいずれかの場合である。

- ケース（i）$(\sqrt{1+2\rho}-1)^2 = \log(1+\phi)$ のとき，ρ は

$$\rho_1 = \sqrt{\log(1+\phi)} + \frac{1}{2}\log(1+\phi) \approx 1.462$$

になり，黄金軌道は $x_1^*(t) = ce^{-t\log(1+\phi)}$ になる。

- ケース（ii）$(\sqrt{1+2\rho}-1)^2 = \log\phi$ では，ρ は

$$\rho_2 = \sqrt{\log\phi} + \frac{1}{2}\log\phi \approx 0.934$$

になる。このとき，黄金軌道は $x_2^*(t) = ce^{-t\log\phi}$.

したがって，2 つの黄金最適軌道 x_1^*, x_2^* が存在する。

4.2　オイラー方程式

さて，極値問題

$$\mathrm{EP}_3(\mathrm{c}) \quad \text{extremize} \quad \int_0^\infty f(t,x,\dot{x})dt \quad \text{subject to} \quad \text{(i) } x \in C', \quad \text{(ii) } x(0) = c$$

において平方根評価

$$f(t,x,\dot{x}) = e^{-\rho t}(\sqrt{x} + \sqrt{bx-\dot{x}})$$

を考えよう。このとき，

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{2}e^{-\rho t}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{b}{\sqrt{x-\dot{x}}}\right) \\ f_{\dot{x}} &= -\frac{1}{2}e^{-\rho t}\frac{1}{\sqrt{bx-\dot{x}}} \\ \frac{d}{dt}f_{\dot{x}} &= \frac{1}{2}e^{-\rho t}\left(\frac{\rho}{\sqrt{bx-\dot{x}}} + \frac{b\dot{x}-\ddot{x}}{2(bx-\dot{x})^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

である。したがって，オイラー方程式（4）は

$$\frac{\rho-b}{\sqrt{bx-\dot{x}}} + \frac{b\dot{x}-\ddot{x}}{2(x-\dot{x})^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{12}$$

になり，横断条件（5）は

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{bx(t)-\dot{x}(t)}} = 0 \tag{13}$$

になる。

さて，この解で $x(t) = ce^{-at}$ となるものを考えよう。このとき $\dot{x} = -cae^{-at}$, $\ddot{x} = ca^2e^{-at}$ を

(12) に代入すると，係数 a は

$$\frac{\rho - b}{\sqrt{b+a}} - \frac{ba + a^2}{2(b+a)^{3/2}} = 1$$

すなわち

$$\rho - b - \frac{a}{2} = \sqrt{b+a} \tag{14}$$

を満たす。これを解くと，

$$a = 2(1 + \rho - b - \sqrt{1 + 2\rho - b})$$

になる。こうして (12)，(13) の解

$$x(t) = ce^{-at}$$

が得られる。

4.3　ベルマン方程式

今度は，パラメータ $b\,(-\infty < b < \infty)$ をもつ制御過程

$$\mathrm{A}(c) \quad \begin{array}{lll} \text{Maximize} & \displaystyle\int_0^\infty e^{-\rho t} f(x,u)dt & \\ \text{subject to} & \text{(i)} & \dot{x} = g(x,u) \qquad 0 \le t < \infty \\ & \text{(ii)} & x \in C^1,\ u \in U(x) \\ & \text{(iii)} & x(0) = c \end{array}$$

を解こう。この最大値を $v(c)$ としよう。このとき，値関数 $v = v(x)$ はベルマン方程式

$$\rho v(x) = \operatorname*{Max}_{u \in U(x)} \left[f(x,u) + v'(x) g(x,u) \right] \tag{15}$$

を満たす。

これは形式的には次のようにして導かれる（[1–3] 参照）。 まず任意に微小な $\Delta > 0$ をとる。任意の実行可能な対 (x,u)-過程に対して，新しい対 (y,w)-過程を次で定義する：

$$y(t) := x(t+\Delta),\ w(t) := u(t+\Delta), \quad t \in [0,\infty).$$

このとき，過程 $y = \{y(\cdot)\}_{[0,\infty)}$ は次を満たしている：

$$\text{(i)}' \quad \dot{y} = h(y, w) \qquad\qquad 0 \le t < \infty$$

$$\text{(ii)}' \quad y \in C^1, \; w \in U(y)$$

$$\text{(iii)}' \quad y(0) = x(\Delta).$$

逆に, 時間区間 $[0, \Delta]$ 上の対過程 $(x(\cdot), u(\cdot))$ に条件 (i)$'$, (ii)$'$, (iii)$'$ を満たす任意の対過程 $(y(\cdot), w(\cdot))$ をつなげる（連接する）と，全時間区間 $[0, \infty)$ 上の対 (x, u)-過程が構成できて，条件 (i), (ii), (iii) を満たすようになる。このようにして，(x, u)-過程と (y, w)-過程が 1 対 1 に対応する。

まず,

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} f(x, u) dt = \int_0^\Delta e^{-\rho t} f(x, u) dt + e^{-\rho\Delta} \int_0^\infty e^{-\rho t} f(y, w) dt$$

が成り立つことに注意する。平均値の定理より，θ $(0 \le \theta \le 1)$ が存在して

$$\int_0^\Delta h(t) dt = h(\theta\Delta)\Delta$$

になる。ただし

$$h(t) = e^{-\rho t} f(x, u).$$

したがって,

$$\begin{aligned} v(c) &\ge \int_0^\infty e^{-\rho t} f(x, u) dt \\ &= h(\theta\Delta)\Delta + e^{-\rho\Delta} \int_0^\infty e^{-\rho t} f(y, w) dt \end{aligned}$$

が成り立つ。前述のような (x, u)-過程の構成から,

$$v(c) \ge h(\theta\Delta)\Delta + e^{-\rho\Delta} v(x(\Delta))$$

が成り立つ。この右辺に平均値の定理を 2 回適用すると，η, ξ $(0 \le \eta, \xi \le 1)$ が存在して

$$\begin{aligned} &h(\theta\Delta)\Delta + e^{-\rho\Delta} v(x(\Delta)) \\ &= h(\theta\Delta)\Delta + [1 - \rho\Delta + \frac{1}{2!} e^{-\xi\rho\Delta} (\rho\Delta)^2] \, [v(c) + v'(x(\eta\Delta)) \dot{x}(\eta\Delta)\Delta] \end{aligned} \tag{16}$$

になる。したがって,

$$v(c) \ge h(\theta\Delta)\Delta + [1 - \rho\Delta + \frac{1}{2!} e^{-\xi\rho\Delta} (\rho\Delta)^2] \, [v(c) + v'(x(\eta\Delta)) \dot{x}(\eta\Delta)\Delta]$$

が成り立つ。両辺から $v(c)$ を引き $\Delta (> 0)$ で割って，極限 $\Delta \downarrow 0$ をとると，任意の実行可能な u

に対して

$$\rho v(c) \geq f(c,u) + v'(c)g(x,u)$$

が得られる。よって，不等式

$$\rho v(c) \geq \underset{u\in U(c)}{\text{Max}}\left[f(c,u) + v'(c)g(c,u)\right]$$

が成立する。

逆に，実行可能な（したがって，最適な）対 (x,u)-過程が（最大値）値関数 v に到達したとしよう。このとき，再度（16）より，

$$\begin{aligned}
v(c) &= \int_0^\infty e^{-\rho t} f(x,u)dt \\
&= h(\theta\Delta)\Delta + e^{-\rho\Delta} v(x(\Delta)) \\
&= h(\theta\Delta)\Delta + [1 - \rho\Delta + \frac{1}{2!}e^{-\xi\rho\Delta}(\rho\Delta)^2]\left[v(c) + v'(x(\eta\Delta))\dot{x}(\eta\Delta)\Delta\right]
\end{aligned}$$

が得られる。これから先ほどと同様にすると

$$\rho v(c) = f(c,u) + v'(c)g(x,u)$$

になる。したがって，逆向きの不等式

$$\rho v(c) \leq \underset{u\in U(c)}{\text{Max}}\left[f(c,u) + v'(c)g(c,u)\right]$$

が成立する。このようにしてベルマン方程式 (15) が導かれた。 □

さて，平方根型基準と減法型ダイナミックス

$$f(x,u) = \sqrt{x} + \sqrt{u}, \qquad g(x,u) = bx - u$$

をとって，割引き型全平方根評価の配分過程

$$\mathrm{A}(c) \quad \begin{array}{lll}
\text{Maximize} & \displaystyle\int_0^\infty e^{-\rho t}(\sqrt{x} + \sqrt{u})dt & \\
\text{subject to} & \text{(i)} \quad \dot{x} = bx - u & 0 \leq t < \infty \\
& \text{(ii)} \quad x \in C^1,\ u \geq 0 & \\
& \text{(iii)} \quad x(0) = c &
\end{array}$$

を解こう。ベルマン方程式

$$\rho v(x) = \underset{u\geq 0}{\text{Max}}\left[\sqrt{x} + \sqrt{u} + v'(x)(bx - u)\right] \tag{17}$$

を解く。$\dfrac{d}{du}[\cdots] = 0$ より，

$$\frac{1}{2\sqrt{u}} = v' \qquad \text{i.e.,} \qquad u = \frac{1}{4v'^2} \tag{18}$$

になるから，

$$\operatorname*{Max}_{u \geq 0}[\cdots] = \sqrt{x} + bxv' + \frac{1}{4v'}$$

である。したがって，微分方程式

$$\rho v(x) = \sqrt{x} + bxv'(x) + \frac{1}{4v'(x)}$$

が得られる。

ここで，(17) の解で平方根型のもの $v(x) = k\sqrt{x}$ $(k > 0)$ を求めよう。このとき，係数 k は

$$\left(\rho - \frac{b}{2}\right)k = 1 + \frac{1}{2k} \tag{19}$$

を満たす。式 (19) は解

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\rho - b} - 1}$$

をもつ。したがって，(18)，(iii) より，

$$\dot{x} = -ax, \quad x(0) = c$$

が得られる。ただし，

$$a = 2(1 + \rho - b - \sqrt{1 + 2\rho - b}).$$

このようにして，最適軌道

$$x^*(t) = ce^{-at}$$

と最適政策

$$u^*(x) = (a + b)x$$

が得られた。以下，2 つの簡単な場合を検討する。

4.3.1 $\boldsymbol{b = 1}$

まず $b = 1$ の場合を考える。このとき，条件 $\rho \geq 2$ の下では，比例政策 $u^*(x) = (1 + 2\rho - 2\sqrt{2\rho})\,x$ になる。これで最適軌道 $x^*(t) = ce^{-at}$ が得られる。ただし $a = 2(\rho - \sqrt{2\rho})$.

- ケース (i) $\rho = \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + \log(1 + \phi)}\,)^2 \approx 2.882$ のとき，最適軌道 x^* は黄金 $x_1^*(t) = ce^{-t\log(1+\phi)}$ になる。これは黄金政策 $u_1^*(x) = (1 + \log(1 + \phi))\,x \approx 1.962\,x$ で生成されている。したがって，黄金最適政策 u_1^* を得る。

- ケース (ii) $\rho = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{1+\log\phi})^2 \approx 2.458$ のときは最適軌道 x^* は黄金 $x_2^*(t) = ce^{-t\log\phi}$ になる。これは黄金政策 $u_2^*(x) = (1+\log\phi)\,x \approx 1.481\,x$ から生成されている。u_2^* も黄金最適である。

4.3.2　$\boldsymbol{b = 0}$

次に $b=0$ のときを考える。このときは，条件 $\rho \geq 0$ の下で，比例政策 $u^*(x) = ax$ を得る。これは最適軌道 $x^*(t) = ce^{-at}$ を生成する。ただし，$a = (\sqrt{1+2\rho}-1)^2$.

- ケース (i) $\rho = \sqrt{\log(1+\phi)} + \dfrac{1}{2}\log(1+\phi) \approx 1.462$ のとき，最適軌道 x^* は黄金 $x_1^*(t) = ce^{-t\log(1+\phi)}$ になる。これは黄金政策 $u_1^*(x) = x\log(1+\phi) \approx 0.962\,x$ で生成されている。u_1^* は黄金最適政策である。
- ケース (ii) $\rho = \sqrt{\log\phi} + \dfrac{1}{2}\log\phi \approx 0.934$ のとき，最適軌道 x^* は黄金 $x_2^*(t) = ce^{-t\log\phi}$ になる。これは黄金政策 $u_2^*(x) = x\log\phi \approx 0.481\,x$ で生成されている。u_2^* も黄金最適である。

4.4　第二の平方根評価

2 つの実定数 ρ, b は $0 \leq b \leq \rho < \infty$ であるとして，次の不等式を準備しておく。

補題 4.2　区間 $[-b, \infty)$ 上で，不等式

$$\frac{\sqrt{b+x}}{\rho + \frac{1}{2}x} \leq \frac{1}{\sqrt{2\rho - b}}$$

が成り立つ。等号が成り立つのは $x = 2(\rho - b)$ のときに限る（図 4 参照）。

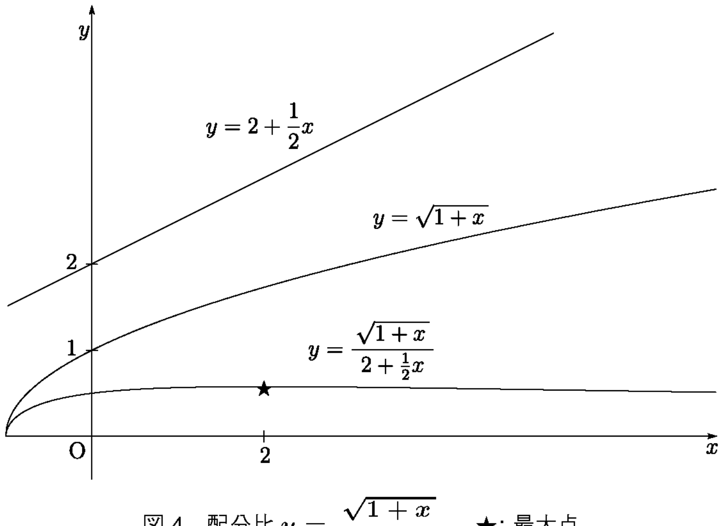

図 4　配分比 $y = \dfrac{\sqrt{1+x}}{2+\frac{1}{2}x}$　★: 最大点

さて，第二の平方根評価

$$L(x) = \int_0^\infty e^{-\rho t}\sqrt{bx - \dot{x}}\,dt \qquad x \in C'$$

を導入しよう。

所与の定数 c を与えて，変分問題

$$\text{MP}_4\text{(c)} \quad \text{Maximize} \quad L(x) \quad \text{subject to} \quad \text{(i) } x \in C', \quad \text{(ii) } x(0) = c$$

を考える。特別な軌道を 2，3 評価する。

1. 定数軌道 $x(t) = c$ は $L(x) = \dfrac{\sqrt{bc}}{\rho}$.
2. 比例軌道 $x(t) = ce^{-at}\,(-b \le a < \infty)$ は

$$\begin{aligned} L(x) &= \sqrt{c}\sqrt{b+a}\int_0^\infty e^{-(\rho+\frac{1}{2}a)t}dt \\ &= \sqrt{c}\,\frac{\sqrt{b+a}}{\rho+\frac{1}{2}a} \end{aligned}$$

になる。

3. 補題 4.2 より，1 変数最大化

$$\operatorname*{Max}_{-b\le a<\infty} \frac{\sqrt{b+a}}{\rho+\frac{1}{2}a}$$

は $a^* = 2(\rho - b)$ で到達することがわかる。したがって，この最大値は

$$\frac{1}{\sqrt{2\rho - b}}$$

になる。すなわち，比例軌道のクラスでは $x^*(t) = ce^{-2(\rho-b)t}$ が最適値

$$L(x^*) = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2\rho - b}}$$

を与える。

比例軌道 $x^*(t) = ce^{-2(\rho-b)t}$ が黄金になるのは次のいずれかの場合が成り立つときに限る。

- ケース（i）$2(\rho - b) = \log(1+\phi)$.

  このとき

$$\rho_1 = b + \log\phi.$$

  したがって，黄金軌道は $x_1^*(t) = ce^{-t\log(1+\phi)}$ になる。

- ケース（ii）$2(\rho - b) = \log\phi$.

  このときは

$$\rho_2 = b + \frac{1}{2}\log\phi.$$

黄金軌道は $x_2^*(t) = ce^{-t\log\phi}$ になる。

すなわち，黄金最適軌道は x_1^* と x_2^* である。

4.4.1　オイラー方程式

ここでは極値問題

$$\mathrm{EP}_4(\mathrm{c}) \quad \text{extremize} \quad \int_0^\infty e^{-\rho t}\sqrt{bx-\dot{x}}\,dt \quad \text{subject to} \quad \text{(i) } x \in C', \quad \text{(ii) } x(0) = c$$

を考える。このとき，第二の平方根評価

$$f(t, x, \dot{x}) = e^{-\rho t}\sqrt{bx-\dot{x}}$$

では

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{2}e^{-\rho t}\frac{b}{\sqrt{bx-\dot{x}}} \\ f_{\dot{x}} &= -\frac{1}{2}e^{-\rho t}\frac{1}{\sqrt{bx-\dot{x}}} \\ \frac{d}{dt}f_{\dot{x}} &= \frac{1}{2}e^{-\rho t}\left(\frac{\rho}{\sqrt{bx-\dot{x}}} + \frac{b\dot{x}-\ddot{x}}{2(bx-\dot{x})^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

になる。オイラー方程式 (4)

$$\rho + \frac{b\dot{x}-\ddot{x}}{2(bx-\dot{x})} = b$$

は

$$\ddot{x} - (3b-2\rho)\dot{x} + 2b(b-\rho) = 0 \tag{20}$$

になり，横断条件 (5) は

$$\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-\rho t}}{\sqrt{bx-\dot{x}}} = 0 \tag{21}$$

になる。

さて，方程式系 (20)，(ii)，(21) の解を求めよう。方程式 (20) は一般解

$$x(t) = Ae^{-2(\rho-b)t} + Be^{bt}$$

をもつ。ただし A, B は実定数である。したがって，この系の求める解として

$$x(t) = ce^{-2(\rho-b)t}$$

が得られる。

4.4.2　ベルマン方程式

平方根評価

$$f(x,u)=\sqrt{u}$$

を割引き率 ρ で割引いた配分過程

$$\mathrm{A}'(c)\quad \begin{array}{lll} \text{Maximize} & \displaystyle\int_0^\infty e^{-\rho t}\sqrt{u}\,dt & \\ \text{subject to} & \text{(i)}\quad \dot{x}=bx-u & 0\le t<\infty \\ & \text{(ii)}\quad x\in C^1,\ u\ge 0 & \\ & \text{(iii)}\quad x(0)=c & \end{array}$$

の最適解を求めよう。対応するベルマン方程式

$$\rho v(x)\;=\;\operatorname*{Max}_{u\ge 0}\left[\sqrt{u}+v'(x)(bx-u)\right] \tag{22}$$

を解こう。

まず，$\dfrac{d}{du}[\cdots]\;=\;0$ より

$$\frac{1}{2\sqrt{u}}=v'\quad \text{i.e.,}\quad u\;=\;\frac{1}{4v'^2} \tag{23}$$

だから

$$\operatorname*{Max}_{u\ge 0}[\cdots]\;=\;bxv'+\frac{1}{4v'}$$

になる。したがって，(22) は

$$\rho v(x)\;=\;bxv'(x)+\frac{1}{4v'(x)}$$

になる。この解で，$v(x)=k\sqrt{x}$ $(k>0)$ なる型のを求めれば，係数 k は方程式

$$\rho k\;=\;\frac{bk}{2}+\frac{1}{2k}$$

を持たす。したがって，この解として

$$k\;=\;\frac{1}{\sqrt{2\rho-b}}$$

が得られる。これと (23)，(iii) を考慮すると，

$$\dot{x}\;=\;-ax,\qquad x(0)=c$$

になる。ただし，$a = 2(\rho - b)$. このようにして，最適軌道

$$x^*(t) = ce^{-at}$$

と最適政策

$$u^*(x) = (b + a)x$$

が得られる。

4.4.3　2 つの割引き率

ここでは，任意に $b \geq 0$ を与えたとき，配分過程 $\mathrm{A}'(c)$ が黄金最適政策をもつための割引き率 ρ を 2 つ考える。

- ケース (i) $\rho = b + \log\phi$ のとき，最適軌道 x^* は黄金軌道 $x_1^*(t) = ce^{-t\log(1+\phi)}$ になる。これは黄金政策 $u_1^*(x) = (b + 2\log\phi)\,x$ で生成されている。したがって，このとき黄金最適政策 u_1^* が得られる。
- ケース (ii) $\rho = b + \dfrac{1}{2}\log\phi$ のとき，最適軌道 x^* は黄金軌道 $x_2^*(t) = ce^{-t\log\phi}$ になる。これは黄金政策 $u_2^*(x) = (b + \log\phi)\,x$ で生成されている。したがって，このとき黄金最適政策 u_2^* が得られる。

（九州大学大学院経済学研究院教授）

参 考 文 献

[1] R.E. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, NJ, 1957.

[2] R.E. Bellman, *Introduction of the Mathematical Theory of Control Processes, Vol.I, Linear Equations and Quadratic Criteria; Vol.II, Nonlinear Processes*, Academic Press, NY, 1967; 1971.

[3] R.E. Bellman, *Methods of Nonlinear Analysis, Vol.I, Vol.II,* Academic Press, New York, 1969, 1972.

[4] A. Beutelspacher and B. Petri, 黄金分割ー自然と数理と芸術とー（柳井浩訳），共立出版, 2005; (Original) *Der Goldene Schnitt 2., überarbeitete und erweiterte Auflange*, ELSEVIER GmbH, Spectrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996.

[5] R.A. Dunlap, 黄金比とフィボナッチ数（岩永恭雄・松井講介訳），日本評論社, 2003; (Original) *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., 1977.

[6] I.M. Gelfand and S.V. Fomin, *Calculus of Variations,* Prentice-Hall, New Jersey, 1963.

[7] 岩本誠一, 動的計画論, 九大出版会, 1987。

[8] S. Iwamoto, Cross dual on the Golden optimum solutions, 研究集会「経済の数理解析」，京大数理研講究録 1443，2005 年 7 月，pp.27–43。

[9] S. Iwamoto, The Golden optimum solution in quadratic programming, Ed. W. Takahashi and T. Tanaka, Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (Okinawa, 2005), Yokohama Publishers, Yokohama, 2007, pp.199–205.

[10] S. Iwamoto, The Golden trinity — optimality, inequality, identity —, 研究集会「経済の数理解析」, 京大数理研講究録 1488, 2006 年 5 月, pp.1–14。
[11] S. Iwamoto and M. Yasuda, "Dynamic programming creates the Golden ratio, too," *Proc. of the Sixth Intl Conference on Optimization: Techniques and Applications (ICOTA 2004)*, Ballarat, Australia, December 2004.
[12] E.S. Phelps, The Golden rule of accumulation: A fable for growthmen, Amer. Eco. Rev., **51**(1961), 638–643.
[13] H. Walser, 黄金分割（蟹江幸博訳）, 日本評論社, 2002; (Original) *DER GOLDENE SCHNITT*, B.G. Teubner, Leibzig, 1996.