Title	確率変数のLp-射影とその数理ファイナンスへの応用
Sub Title	Lp-projections of random variables and its application to finance
Author	新井, 拓児(Arai, Takuji)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2007
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.99, No.4 (2007. 1) ,p.685(79)- 706(100)
JaLC DOI	10.14991/001.20070101-0079
Abstract	本論文は, 平均分散ヘッジング(mean-variance hedging)とそのLp-空間(p 1)への拡張に関する拙著Arai [1], [2], [3] における結果を一部拡張し, 概説することを目的とする。 We aim to give an outline of Arai [1], [2] and [3], in which mean-variance hedging and its extension to Lp-space (p>1) are discussed. In addition, a partial extension of the results in the above papers is also introduced.
Notes	小特集 : 経済分析と最適化の数理
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20070101-0079

確率変数の Lp−射影とその数理ファイナンスへの応用

Lp-Projections of Random Variables and its Application to Finance

新井　拓児(Takuji Arai)

本論文は，平均分散ヘッジング(mean−variance hedging)とその Lp−空間(p 1)への拡張に関する拙著 Arai [1]，[2]，[3] における結果を一部拡張し，概説することを目的とする。

Abstract

We aim to give an outline of Arai [1], [2] and [3], in which mean-variance hedging and its extension to Lp-space (p>1) are discussed. In addition, a partial extension of the results in the above papers is also introduced.

「三田学会雑誌」99 巻 4 号（2007 年 1 月）

確率変数の $\mathcal{L}^p$-射影とその数理ファイナンスへの応用*

新　井　拓　児

要　　旨

本論文は，平均分散ヘッジング（mean-variance hedging）とその $\mathcal{L}^p$-空間 $(p > 1)$ への拡張に関する拙著 Arai [1]，[2], [3] における結果を一部拡張し，概説することを目的とする。

キーワード

数理ファイナンス，オプション価格付け理論，セミマルチンゲール，確率積分，q-最適マルチンゲール測度

1.　序

本論文では，平均分散ヘッジング（mean-variance hedging）の表現を導出し，さらにそれを $\mathcal{L}^p$ 空間の場合へ拡張することを目的とする。但し，$1 < p < \infty$ とする。また，$\mathcal{L}^p$-射影から自然に導かれる条件付請求権の評価法を定式化し，その数学的性質を明らかにする。なお，本論文は，拙著 Arai [1]，[2], [3] の結果の部分的拡張及び概説である。従って，証明は必要と思われる箇所のみ紹介する。

非完備金融市場を考えよう。この市場には 1 つの安全資産と d 個の危険資産が取引可能であるとする。安全資産の価格は常に 1 であり，危険資産価格の変動は，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]})$ 上に定義された $\mathbf{R}^d$-値セミマルチンゲール X によって記述されるものとしよう。但し，$T > 0$ は市場の満期とする。X の連続性は仮定しないことを改めて注意しておこう。条件付請求権を H で記述する。つまり，満期時点に発生する何かしらのペイオフと考えて差し支えない。数学的には，H は $\mathcal{F}_T$-可測確率変数である。ここで，$p > 1$ を 1 つ固定し，$H \in \mathcal{L}^p(P)$ を仮定しよう。本論文を通して，条件付請求権 H を $\mathcal{L}^p(P)$ 空間の意味で最適にヘッジしようとしている投資家を想定する。つまり，その投資家は以下の最小化問題に直面している:

*　**謝辞**　本研究は，文部科学省科学研究費補助金 若手研究 (B)16740062 によって行われた。

問題 1

$$\mathrm{Minimize}_{\vartheta\in\Theta^p} E\left[|H - G_T(\vartheta)|^p\right].$$

但し，$G_T(\vartheta) := \int_0^T \vartheta_t dX_t$ であり，Θ^p は全ての self-financing 戦略からなる集合である。つまり，Θ^p は X-可積分可予測過程の適当なクラスである。$p = 2$ の場合，この最適ヘッジ戦略は平均分散ヘッジングと呼ばれる。数学的には，問題 1 は $\mathcal{L}^p(P)$-確率変数 H のセミマルチンゲール X に関する適当な確率積分空間上への $\mathcal{L}^p(P)$-射影に相当する。

平均分散ヘッジングに関する研究は，Rheinländer and Schweizer [13]（以下，RS と略す）と Gourieroux, Laurent and Pham [7]（以下，GLP と略す）によって，かなり一般的な設定において，連続セミマルチンゲールモデルに対する表現が得られている。一方，Arai [1] は彼らの結果を不連続な場合に，分散最小マルチンゲール測度に関するいくつかの仮定の下，拡張した。Schweizer [15] と Pham [12] は，この問題の 20 世紀中の発展に関するよく知られたサーベイ論文である。

本論文のアウトラインを述べよう。モデルの記述，様々な記号の定義と数学的準備は 2 節で行う。そこでは，全ての self-financing 戦略からなる集合 Θ^p を，それに対応する確率積分空間 $G_T^p := \left\{\int_0^T \vartheta_t dX_t | \vartheta \in \Theta^p\right\}$ が $\mathcal{L}^p(P)$ で閉になるように，つまり，問題 1 の解の存在が保証されるように定義する。そして，本論文における基本仮定を，q-最適マルチンゲール測度 $Q^{(q)}$ を用いて述べる。但し，q は p の共役指数であり，$Q^{(q)}$ は密度関数の $\mathcal{L}^q(P)$-ノルムが最小になる符号付きマルチンゲール測度として定義される。また，分散最小マルチンゲール測度は丁度 2-最適マルチンゲール測度に相当する。この基本仮定とは，逆ヘルダー不等式を満たす同値マルチンゲール測度の存在や $Q^{(q)}$ の密度過程のジャンプの大きさに関する条件を含んでいる。

また 3 節では，$Q^{(q)}$ の密度過程のジャンプの大きさに関する条件の下，逆ヘルダー不等式を満たす同値マルチンゲール測度が存在すれば，$Q^{(q)}$ が確率測度として存在し逆ヘルダー不等式を満たすことを示す。

4 節以降で本論文の主結果を述べる。まず 4 節では，不連続セミマルチンゲールを資産過程とするモデルに対する平均分散ヘッジングの表現を導く。ここでは RS や GLP で用いられた “numéraire 変換法” と “測度変換法” が非常に有効である。さらに，H の分散最小マルチンゲール測度の下での分解を作る。X が連続のときにはこの分解は国田–渡辺の直交分解となっているが，不連続の場合は直交分解にならない。そこで，この分解の各項の数学的特性を詳細に調べる。すると，非常に良い性質を持っていることが示される。これらの良い性質により，殆ど連続の場合と同じ議論に持ち込むことができ，平均分散ヘッジングの表現を得ることができるのである。

さらに 5 節では，4 節の結果を $p > 1$ の場合に拡張する。議論は 4 節と殆どパラレルに行われるが，数学的にテクニカルな部分においては大きな違いがある。しかし，細かな証明は省いているので，詳細は Arai [3] を参照されたい。

条件付請求権の評価法については 6 節で取り扱う。$\mathcal{L}^p(P)$-ヘッジングから自然に導かれる評価法を定式化し，その数学的特性を明らかにする。ここでは

$$V(c) := \mathrm{Minimize}_{\vartheta\in\Theta^p} E\left[|H-c-G_T(\vartheta)|^p\right]$$

を考え，条件付請求権の評価を $c^* := \arg\inf_{c\in\mathbf{R}} V(c)$ によって与える。つまり，c^* とはヘッジの p 次エラーが最小になるような初期費用である。$p=2$ の場合は，c^* は H の分散最小マルチンゲール測度の下での期待値で与えられる。そこで，$p>1$ に対する c^* についても，H の $Q^{(q)}$ の下での期待値で与えられるという単純な予想が頭に浮かぶ。しかしながら，この予想は正しくない。6 節ではこの事実を議論し，c^* の本質が G_T^p の直交補空間上への射影作用素にあることを明らかにする。この問題において重要な役割りを果たすのが $V(c)$ の双対問題であり，それは符号付きマルチンゲール測度に関する最大化問題として与えられる。

$p=2$ の場合を念頭におくと，Q が符号付マルチンゲール測度でその密度関数が $\mathcal{L}^2(P)$ 空間に属すものとすれば，任意の $\vartheta\in\Theta^p$ に対して，

$$E\left[\frac{dQ}{dP}G_T(\vartheta)\right]=0$$

となる。つまり，符号付マルチンゲール測度の空間は，X の確率積分空間と直交しているのである。このことより，上記の問題 1 の双対問題として，符号付マルチンゲール測度に関する最大化問題が導かれることが容易に想像できよう。このような視点から，$p=2$ の場合には分散最小マルチンゲール測度が，一般の $p>1$ の場合には q-最適マルチンゲール測度が重要な役割りを演じるのである。

2. 数学的準備

この節では，数学的準備と仮定について述べる。さらに，問題 1 の解の存在が保証されるように全ての self-financing 戦略からなる集合 Θ^p を定義する。

本論文では，1 つの安全資産と d 個の危険資産からなる非完備金融市場を考える。ここで，安全資産の価格は常に 1 であると仮定しよう。すなわち，金利は 0 であるとする。さらに，危険資産価格の変動は $\mathbf{R}^d$-値セミマルチンゲール X で記述されるものとする。より正確には，危険資産価格過程 X は局所有界 RCLL 特殊セミマルチンゲール（special semimartingale）であるとする。つまり，X の連続性は仮定しない。今，X の第 i 番目の要素 X^i は第 i 危険資産の価格を表している。$T>0$ を市場の満期としよう。また，$(\Omega,\mathcal{F},P;\mathbf{F}=\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]})$ を完備フィルター付き確率空間とする。但し，$\mathbf{F}$ は右連続フィルトレーションで，$\mathcal{F}_0$ は trivial であり $\mathcal{F}$ の全ての零集合を含む。また，$\mathcal{F}_T=\mathcal{F}$ とする。$p>1$ を任意に固定しよう。そしてその共役指数を q とする。つまり，p と q は $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を満たすものとする。本論文を通して，$\mathcal{F}_T$-可測 $\mathcal{L}^p(P)$-確率変数 H を条件付請求権

とする。特に説明のない記号に関しては，Dellacherie and Meyer [6] と Grandits and Rheinländer [9] を参照されたい。さらに本論文を通して，$\|\cdot\|_p$ は通常の $\mathcal{L}^p(P)$-ノルムを表し，C は $(0,\infty)$ 上の定数を表す。

次に，本論文での基本仮定を述べるためにいくつかの記号を導入しよう。X は特殊セミマルチンゲールなので，一意的な標準分解（canonical decomposition）が存在し，それを $X = X_0 + M + A$ と書こう。但し，M は局所マルチンゲール，A は可予測過程であり $M_0 = A_0 = 0$ を満たすものである。ここで，self-financing 戦略に関するもの等の定義を行う:

定義 1 （1）任意の RCLL 適合過程 U に対して，新たな確率過程 U^* を

$$U_t^* := \sup_{0\leq s\leq t} |U_s|$$

によって定義する。$\mathcal{R}^p(P)$ を以下の条件を満たす全ての RCLL 適合過程 U の集合とする:

$$\|U\|_{\mathcal{R}^2(P)} := \|U_T^*\|_{\mathcal{L}^2(P)} < \infty.$$

（2）$L^p(M)$ を $\mathbf{R}^d$-値可予測過程 ϑ の空間で次の条件を満たすものの全体とする:

$$\|\vartheta\|_{L^p(M)} := E^{1/p}\left[\left(\int_0^T \vartheta_t^{\mathrm{tr}} d[M]_t \vartheta_t\right)^{p/2}\right] < \infty.$$

（3）$L^p(A)$ を $\mathbf{R}^d$-値可予測過程 ϑ の空間で次の条件を満たすものの全体とする:

$$\|\vartheta\|_{L^p(A)} := E^{1/p}\left[\left(\int_0^T |\vartheta_t^{\mathrm{tr}} dA_t|\right)^{p}\right] < \infty.$$

（4）

$$\Theta^p := L^p(A) \cap L^p(M)$$

と

$$G_T^p := \{G_T(\vartheta) | \vartheta \in \Theta^p\},$$

を定義する。但し，$G_T(\vartheta) := \int_0^T \vartheta_t dX_t$.

Θ^p のファイナンス的意味は全ての self-financing 戦略からなる集合である。$\vartheta \in \Theta^p$ に対して，第 i 番目の要素 ϑ^i は第 i 危険資産の投資家の保有量を表している。さらに，確率積分 $G(\vartheta)$ は self-financing 戦略 $\vartheta \in \Theta^p$ による利得を表す確率過程である。Θ^p の定義は $\Theta^p := \{\vartheta | G(\vartheta) \in \mathcal{S}^p\}$ に書き換えられる。

ここで，符号付きマルチンゲール測度と q-最適マルチンゲール測度を定義する。

定義 2　(1) 符号付きマルチンゲール測度とは，以下の条件を満たす符号付き測度 $Q \ll P$ である: $E\left[\dfrac{dQ}{dP}\right] = 1$ であり，任意の $\vartheta \in \Theta^p$ に対し $E\left[\dfrac{dQ}{dP}G_T(\vartheta)\right] = 0.$

(2) $\mathcal{M}^s$ は符号付きマルチンゲール測度の全体であり，$\mathcal{M}^e$ は $\mathcal{M}^s$ の部分集合で P と同値な確率測度であるものの全体とする。特に，$\mathcal{M}^e$ の各要素を同値マルチンゲール測度と呼ぶ。さらに，$\mathcal{M}_q^s$ (resp. $\mathcal{M}_q^e$) を符号付き（resp. 同値）マルチンゲール測度でその P に関する密度関数が $\mathcal{L}^q(P)$ に属すものの全体とする。

(3) q-最適マルチンゲール測度は，$\mathcal{M}_q^s$ の要素でその P に関する密度関数が $\mathcal{L}^q(P)$-ノルムを最小にするものである。以下これを $Q^{(q)}$ と記す。

(4) Y を一様可積分 P-マルチンゲールで $Y_0 = 1$ と $Y_T > 0$ を満足するものとする。Y が逆ヘルダー不等式 $\mathcal{R}_q(P)$ を満たすとは，次を満たす定数 C が存在することである: 全ての停止時刻 $S \le T$ に対して

$$E\left[\left(\frac{Y_T}{Y_S}\right)^q \middle| \mathcal{F}_S\right] \le C$$

が成立する。

ここで，本論文の基本仮定を紹介する。以下の基本仮定は，本論文を通して仮定されているものとする。但し，第 3 節はその限りではない。また第 4 節では，$p = 2$ としたものが仮定される。

仮定 3　(1)　$\mathcal{M}_q^s \neq \emptyset.$

(2)　$Q \in \mathcal{M}_q^e$ が存在し，逆ヘルダー不等式 $\mathcal{R}_q(P)$ を満たす。

(3)　定数 $C > 0$ が存在し，

$$\frac{1}{C} Z_-^{(q)} \le Z^{(q)} \le C Z_-^{(q)},$$

を満たす。但し，確率過程 $Z^{(q)}$ は $Q^{(q)}$ の P に関する密度過程，つまり $Z_t^{(q)} := E\left[\dfrac{dQ^{(q)}}{dP}\middle| \mathcal{F}_t\right]$ である。

注意 1　(1)　最初の条件（1）は無裁定条件と深く関わっており，$Q^{(q)}$ の $\mathcal{M}_q^s$ における存在を保証している。

(2)　最後の条件（3）はいわゆる条件（J）である。

(3)　仮定 3 より，$Q^{(q)}$ は $\mathcal{M}_q^e$ 内に存在し $\mathcal{R}_q(P)$ を満たす。この事実については節を改めて議論する。

(4)　仮定 3 は G_T^p の $\mathcal{L}^p(P)$-閉性を保証している。Choulli, Stricker and Krawczyk [5] の定理 5.1 を参照せよ。この閉性は問題 1 の解の存在を保証している。

(5)　Grandits and Krawczyk [8] の定理 4.1 によると，X が連続であるときには，G_T^p の $\mathcal{L}^p(P)$-

閉性と $\mathcal{M}_q^e \neq \emptyset$ が，q-最適マルチンゲール測度が $\mathcal{M}_q^e$ 内に存在し $\mathcal{R}_q(P)$ を満たすことを保証している。

3. 逆ヘルダー不等式について

この節では，Arai [2] の結果を $p > 1$ の場合に拡張し，注意 1（3）を証明する。なお，仮定 3（1）はこの節を通して成立しているものとする。

まず結果のみを列挙する:

命題 4 仮定 *3*（*3*）の下，$Q^{(q)}$ の密度過程 $Z^{(q)}$ が指数マルチンゲール表現を持つならば，q-最適マルチンゲール測度 $Q^{(q)}$ は $\mathcal{M}_q^e$ に属する。

注意 2 $Z^{(q)}$ が指数マルチンゲール表現を持つとは，ある確率過程 N が存在して $Z^{(q)} = \mathcal{E}(N)$ と書けることを意味する。ここで，$\mathcal{E}(N)$ は以下の確率微分方程式の解である:

$$\mathcal{E}_t(N) = 1 + \int_0^t \mathcal{E}_{s-}(N)dN_s.$$

因みに，1 から出発する正の確率過程は必ず指数マルチンゲール表現を持つ。

定理 5 仮定 *3*（*2*）の下，$Q^{(q)}$ の密度過程 $Z^{(q)}$ は逆ヘルダー不等式 $\mathcal{R}_q(P)$ を満たす。

定理 6 仮定 *3* の下，$Q^{(q)}$ は $\mathcal{M}_q^e$ に属する。

次に，証明を与えよう。

命題 4 の証明

停止時刻 $\tau := \inf\{t \geq 0 | Z_t^{(q)} \leq 0\} \wedge T$ を定義する。そのとき，$Z_{\tau-}^{(q)} \geq 0$ が成立し，$Z_\tau^{(q)} \leq 0$ が $\{\tau < T\} \cup \{Z_T^{(q)} \leq 0\}$ 上で成立する。何故ならば，$Z_{\tau-}^{(q)} \leq C Z_\tau^{(q)}$ となる定数 $C > 0$ が取れ，$\{\tau < T\} \cup \{Z_T^{(q)} \leq 0\}$ 上で $Z_\tau^{(q)} = Z_{\tau-}^{(q)} = 0$ となるからである。だから，$\tau = \inf\{t > 0 | Z_t^{(q)} = 0, Z_{t-}^{(q)} = 0\} \wedge T$ を得る。$Z^{(q)}$ は指数マルチンゲール表現を持つから，Jacod [10] の命題 6.5 より $\{\tau < T\} \cup \{Z_T^{(q)} \leq 0\}$ 上で $Z_{\tau-}^{(q)} \neq 0$ となる。従って，$Z^{(q)} > 0$ であり結論を得る。 □

定理 5 の証明

仮定 *3*（*2*）を満たす Q の密度過程を Z^Q と記そう。Z^Q は逆ヘルダー不等式 $\mathcal{R}_q(P)$ を満たすので，以下の条件を満たす定数 $C > 0$ が存在する: 全ての停止時刻 $\sigma \leq T$ に対して，

$$E\left[(Z_T^Q)^q \middle| \mathcal{F}_\sigma\right] \leq C(Z_\sigma^Q)^q. \tag{3.1}$$

(3.1) を満たす定数 $C>0$ と停止時刻 $\sigma \le T$ を任意に固定しよう。そのとき，

$$A_\sigma := \left\{ E\left[|Z_T^{(q)}|^q \middle| \mathcal{F}_\sigma \right] > C|Z_\sigma^{(q)}|^q \right\}$$

を定義し，$P(A_\sigma)>0$ を仮定する。集合 $\{Z_\sigma^{(q)}=0\}$ 上 $Z_T^{(q)}=0$ であることに注意すると，集合 A_σ 上 $Z_\sigma^{(q)} \neq 0$ である。

新たに確率過程 $\overline{Z}$ を次のように定義する:

$$\overline{Z}_t := \begin{cases} Z_t^{(q)} & \text{for } t \le \sigma, \\ \frac{Z_t^Q}{Z_\sigma^Q} Z_\sigma^{(q)} & \text{for } t > \sigma \text{ on } A_\sigma, \\ Z_t^{(q)} & \text{for } t > \sigma \text{ on } A_\sigma^c. \end{cases}$$

$\overline{Z}$ が P-マルチンゲールであることを示す。$Y_t := E[\overline{Z}_T|\mathcal{F}_t]$ と $E(t) := \{t \ge \sigma\} \cap A_\sigma$ の記号を準備する。$E(t) \in \mathcal{F}_t$ であるから，任意の $B \in \mathcal{F}_t$ に対して以下の等式が成立する:

$$E[Y_t 1_{B\cap E(t)}] = E\left[\frac{Z_T^Q}{Z_\sigma^Q} Z_\sigma^{(q)} 1_{B\cap E(t)} \right] = E[\overline{Z}_t 1_{B\cap E(t)}].$$

一方，任意の $B \in \mathcal{F}_t$ に対して，

$$E[Y_t 1_{B\cap E(t)^c}] = E[Z_T^{(q)} 1_{B\cap E(t)^c}] = E[\overline{Z}_t 1_{B\cap E(t)^c}]$$

を得る。ゆえに，$Y_t = \overline{Z}_t$ であるから，$\overline{Z}$ は P-マルチンゲールである。さらに，任意の $\vartheta \in \Theta$ に対して，$Y_t := E[\overline{Z}_T G_T(\vartheta)|\mathcal{F}_t]$ と書くとき，上記と同様にして $\overline{Z}G(\vartheta)$ が P-マルチンゲールであることを得る。符号付き測度 $\overline{Q}$ を $d\overline{Q}/dP = \overline{Z}_T$ として定義するとき，$\overline{Q} \in \mathcal{M}_q^s$ である。ここで，A_σ の定義から

$$\begin{aligned} E[|\overline{Z}_T|^q] &= E\left[|Z_T^{(q)}|^q 1_{A_\sigma^c} + \left| \frac{Z_T^Q}{Z_\sigma^Q} Z_\sigma^{(q)} \right|^q 1_{A_\sigma} \right] \\ &= E\left[|Z_T^{(q)}|^q 1_{A_\sigma^c} + |Z_\sigma^{(q)}|^q E\left[\left(\frac{Z_T^Q}{Z_\sigma^Q} \right)^q \middle| \mathcal{F}_\sigma \right] 1_{A_\sigma} \right] \\ &< E\left[|Z_T^{(q)}|^q 1_{A_\sigma^c} + E[|Z_T^{(q)}|^q|\mathcal{F}_\sigma] 1_{A_\sigma} \right] \\ &= E[|Z_T^{(q)}|^q] \end{aligned}$$

を得る。従って，$Z^{(q)}$ の $\mathcal{L}^q(P)$-ノルム最小性に反する，つまり，任意の停止時刻 σ に対して $P(A_\sigma)=0$ となる。結局，任意の停止時刻 σ に対して，

$$E\left[|Z_T^{(q)}|^q \middle| \mathcal{F}_\sigma \right] \le C|Z_\sigma^{(q)}|^q$$

であることから定理 5 が示される。 □

定理 6 の証明

定理 5 と Choulli, Krawczyk and Stricker [4] の命題 2.3 より $Z^{(q)}$ は指数マルチンゲール表現を持つ。よって，命題 4 から定理 6 が成立する。 □

4. 平均分散ヘッジング

この節では，Arai [1] による平均分散ヘッジングの結果を紹介する。ここで紹介する結果は，RS や GLP で得られた連続セミマルチンゲールに対する平均分散ヘッジングの結果を，不連続な場合へ拡張したものである。つまり，これまで述べた数学的設定において，$p=2$ として固定し以下の問題を考える:

問題 2

$$\mathrm{Minimize}_{\vartheta\in\Theta^2} E\left[(H-G_T(\vartheta))^2\right].$$

本節では，分散最小マルチンゲール測度を $\widetilde{P}$ で表し，その密度過程を Z で表す。つまり，$Z_t := E\left[\frac{d\widetilde{P}}{dP}|\mathcal{F}_t\right]$ である。まず，新たに可予測過程の空間を 1 つ定義する。

定義 7 $\widetilde{\Theta}$ を以下の条件を満たす全ての X-可積分な $\mathbf{R}^d$-値可予測過程 ϑ の空間とする: $G(\vartheta)$ は $G_T(\vartheta)\in\mathcal{L}^2(P)$ となる $\widetilde{P}$-マルチンゲールである。

実は，Θ^2 と $\widetilde{\Theta}$ は等しい。それを補題として述べておこう:

補題 8 $\widetilde{\Theta}=\Theta^2$.

補題 8 より問題 2 における Θ^2 を $\widetilde{\Theta}$ に置き換えることが可能である。さらに，Schweizer [14] の補題 1 を考慮すると，$\widetilde{Z}_t := E_{\widetilde{P}}\left[\frac{d\widetilde{P}}{dP}|\mathcal{F}_t\right]$ は以下のように表現される:

$$\widetilde{Z}_t = E_{\widetilde{P}}\left[\frac{d\widetilde{P}}{dP}\right]+G_t(\widetilde{\zeta}).$$

但し，$\widetilde{\zeta}\in\Theta^2$ である。一方，新たに $\mathbf{R}^{d+1}$-値過程 Y と P と同値な確率測度 $\widetilde{R}$ を定義しよう:

$$Y^0 := \widetilde{Z}^{-1},$$
$$Y^i := X^i\widetilde{Z}^{-1},\quad \text{for } i=1,\ldots,d,$$
$$\frac{d\widetilde{R}}{d\widetilde{P}} := \frac{\widetilde{Z}_T}{\widetilde{Z}_0}.$$

RS の命題 8 を拡張しよう。

命題 9

$$\frac{1}{\widetilde{Z}_T}G_T(\widetilde{\Theta}) = \left\{\int_0^T \psi_s dY_s \middle| \psi \in L^2(Y, \widetilde{R})\right\}$$

が成立する。但し，$L^2(Y, \widetilde{R})$ は以下の条件を満たす全ての $\mathbf{R}^{d+1}$-値 Y-可積分可予測確率過程 ψ の空間である: $\int \psi dY$ は 2 乗可積分 $\widetilde{R}$-マルチンゲールである。

さらに，$\vartheta \in \widetilde{\Theta}$ と $\psi \in L^2(Y, \widetilde{R})$ には以下の関係が成立している:

$$\begin{aligned}\psi^i &:= \vartheta^i, \quad \textit{for } i = 1, \ldots, d,\\ \psi^0 &:= G_-(\vartheta) - \vartheta^{\mathrm{tr}} X_-,\end{aligned}$$

かつ

$$\vartheta^i := \psi^i + \widetilde{\zeta}^i \left(\int_0^- \psi dY - \psi^{\mathrm{tr}} Y_-\right), \quad \textit{for } i = 1, \ldots, d. \tag{4.1}$$

ここで命題 9 から，任意の $\vartheta \in \Theta^2$ に対して，$\widetilde{R}$ の定義より

$$\|H - G_T(\vartheta)\|_{\mathcal{L}^2(P)} = \sqrt{\widetilde{Z}_0}\left\|\frac{H}{\widetilde{Z}_T} - \frac{G_T(\vartheta)}{\widetilde{Z}_T}\right\|_{\mathcal{L}^2(\widetilde{R})}$$

が成立。命題 9 の観点から，問題 2 は以下の問題と同等である:

問題 3

$$\text{Minimize} \quad \left\|\frac{H}{\widetilde{Z}_T} - \int_0^T \psi_s dY_s\right\|_{\mathcal{L}^2(\widetilde{R})} \quad \text{over all } \psi \in L^2(Y, \widetilde{R}).$$

問題 3 は，元々の問題を基礎である確率測度を $\widetilde{R}$，危険資産過程を Y とみなした場合に書き換えたものである。危険資産過程の X から Y への変更は，numéraire を安全資産から $1/\widetilde{Z}$ に変更したことによるものである。ここで，3 節の結果から確率過程 $\widetilde{Z}$ は正である。これによって，$\widetilde{Z}$ を numéraire として扱うことができるのである。

$\dfrac{H}{\widetilde{Z}_T} \in \mathcal{L}^2(\widetilde{R})$ であり Y が 2 乗可積分 $\widetilde{R}$-マルチンゲールであることより，$\dfrac{H}{\widetilde{Z}_T}$ の Y 上への $\widetilde{R}$ の下での国田－渡辺分解が存在し以下のように書ける:

$$\frac{H}{\widetilde{Z}_T} = E_{\widetilde{R}}\left[\frac{H}{\widetilde{Z}_T}\right] + \int_0^T \widetilde{\psi}_s^H dY_s + L_T. \tag{4.2}$$

但し，$\widetilde{\psi}^H \in L^2(Y, \widetilde{R})$ であり，2 乗可積分 $\widetilde{R}$-マルチンゲール $L_t (:= E_{\widetilde{R}}[L_T|\mathcal{F}_t])$ は Y に $\widetilde{R}$-直交している。問題 3 の解 ψ^{opt} は被積分関数 $\widetilde{\psi}^H$ である。そのとき，問題 2 の解 ϑ^{opt} は（4.1）より与えられる。

ここで，

$$\widetilde{Z}_T E_{\widetilde{R}}\left[\frac{H}{\widetilde{Z}_T}\right] = E_{\widetilde{P}}[H]\left(1 + G_T(\widetilde{Z}_0^{-1}\widetilde{\zeta})\right) \tag{4.3}$$

が成立している。次に，命題 9 より，$\widetilde{\psi}^H$ から（4.1）を通じて得られる $\widetilde{\vartheta}^H \in \Theta^2$ に対して，

$$\widetilde{Z}_T \int_0^T \widetilde{\psi}_s^H dY_s = G_T(\widetilde{\vartheta}^H) \tag{4.4}$$

が成立する。$\widetilde{\vartheta}^H$ が問題 2 の解であることを注意しよう。（4.2）–（4.4）より，H を次のように表現できる:

$$H = E_{\widetilde{P}}[H] + G_T\left(E_{\widetilde{P}}[H]\widetilde{Z}_0^{-1}\widetilde{\zeta} + \widetilde{\vartheta}^H + L_-\widetilde{\zeta}\right) + \int_0^T \widetilde{Z}_{s-}dL_s + [\widetilde{Z}, L]_T. \tag{4.5}$$

ここで，

$$\overline{L}_t := E_{\widetilde{P}}[H]\widetilde{Z}_0^{-1} + L_t, \qquad \widetilde{\eta}_t^H := \widetilde{\vartheta}_t^H + \overline{L}_{t-}\widetilde{\zeta}_t,$$

と

$$N_t := \int_0^t \widetilde{Z}_{s-}dL_s + [\widetilde{Z}, L]_t = \int_0^t \widetilde{Z}_{s-}d\overline{L}_s + [\widetilde{Z}, \overline{L}]_t \tag{4.6}$$

を定義しよう。従って，（4.5）は以下のように書き換えられる:

$$H = E_{\widetilde{P}}[H] + G_T(\widetilde{\eta}^H) + N_T.$$

この分解は，X が連続のときには，$\widetilde{P}$ の下での H の国田–渡辺直交分解になっている。つまり，N が G_T^2 と $\widetilde{P}$-直交している $\widetilde{P}$-マルチンゲールで与えられる。実は，この直交性から平均分散ヘッジングの表現を簡単に導くことができる。ところが，X が不連続のときには，国田–渡辺直交分解の存在が保証されない。つまり，N の $\widetilde{P}$-直交性とマルチンゲール性が保証されないのである。なお，H は $\mathcal{L}^2(P)$ には属しているが，$\mathcal{L}^2(\widetilde{P})$ に属しているとは限らないことを注意しておこう。そこで，N と $\widetilde{\eta}^H$ の数学的特性について詳細に調べよう。

以下の補題は主定理の証明において重要な役割りを演じる。

補題 10　定数 $C > 0$ が存在し，全ての局所 $\widetilde{P}$-マルチンゲール U に対して，

$$C^{-1}E[[U]_T] \le \|U\|^2_{\mathcal{R}^2(P)} \le CE[[U]_T].$$

が成立する。

補題 11　N は 0 から出発する $\widetilde{P}$-マルチンゲールであり，$\mathcal{R}^2(P)$ に属す。

証明　（4.6）から

$$N_t = \widetilde{Z}_t L_t - \int_0^t L_{s-} d\widetilde{Z}_s$$

が成立する。$\widetilde{Z}L$ と $\widetilde{Z}$ は $\widetilde{P}$-マルチンゲールなので，N は局所 $\widetilde{P}$-マルチンゲールである。

N が $\widetilde{P}$-マルチンゲールであり $N \in \mathcal{R}^2(P)$ であることを示すためには，

$$E[[N]_T] < \infty \tag{4.7}$$

を示せば十分である。実際，補題 10 によれば，もし N が（4.7）を満たせば $N \in \mathcal{R}^2(P)$ である。

（4.7）を示す。まず，以下が成立する:

$$E\left[[N]_T\right] \le 2E\left[\left[\int_0^{\cdot} \widetilde{Z}_{s-} dL_s\right]_T\right] + 2E\left[\left[[\widetilde{Z}, L]\right]_T\right]. \tag{4.8}$$

次に，Dellacherie and Meyer [6] の定理 VI.57 より，

$$E\left[\left[\int_0^{\cdot} \widetilde{Z}_{s-} dL_s\right]_T\right] \le CE\left[\int_0^T \widetilde{Z}_s^2 d[L]_s\right] \le CE\left[\widetilde{Z}_T^2 [L]_T\right] < \infty. \tag{4.9}$$

これは L が 2 乗可積分 $\widetilde{R}$-マルチンゲールであることによる。さらに，仮定 3 の条件（3）より $(\widetilde{Z}_s - \widetilde{Z}_{s-})^2 \le CZ_s^2$ が成立する。ゆえに，

$$\begin{aligned} E\left[\left[[\widetilde{Z}, L]\right]_T\right] &= E\left[\sum_{0<s\le T} (\Delta\widetilde{Z}_s)^2 (\Delta L_s)^2\right] \le CE\left[Z_T^2 \sum_{0<s\le T} (\Delta L_s)^2\right] \\ &= C\widetilde{Z}_0 E_{\widetilde{R}}\left[\sum_{0<s\le T} (\Delta L_s)^2\right] \le C\widetilde{Z}_0 E_{\widetilde{R}}[[L]_T] < \infty. \end{aligned} \tag{4.10}$$

（4.9）と（4.10），それから（4.8）より，（4.7）を得る。 □

補題 12　$\widetilde{\eta}^H \in \Theta^2$.

補題 11 では，N が $\widetilde{P}$-マルチンゲールであることを主張している。そして補題 12 と併せると，H の分解は国田－渡辺の直交分解ではないけれどもあたかも直交しているが如く扱えることが分かる。しかし，N が G_T^2 に直交していることを示すことはできない。以下，この節の主定理を述べよう。証明は連続の場合と全く同じである。また，結果は見かけ上は同じであるが，可予測過程 $\widetilde{\eta}^H$ が定義される元々の分解が違うのである。

定理 13　*仮定 3 の下，問題 2 の解* ϑ^{opt} *は以下のように与えられる:*

$$\vartheta_t^{\mathrm{opt}} = \widetilde{\eta}_t^H - \frac{\widetilde{\zeta}_t}{\widetilde{Z}_{t-}}\left(\widetilde{V}_{t-}^H - G_{t-}(\vartheta^{\mathrm{opt}})\right).$$

但し，$\widetilde{V}_t^H := E_{\widetilde{P}}[H|\mathcal{F}_t]$.

証明　補題 11，12 から

$$\widetilde{V}_t^H = E_{\widetilde{P}}[H] + G_t(\widetilde{\eta}^H) + N_t.$$

さらに，部分積分公式より

$$\widetilde{Z}_t \overline{L}_t = E_{\widetilde{P}}[H] + G_t(\overline{L}_- \widetilde{\zeta}) + N_t = \widetilde{V}_{t-}^H - G_{t-}(\vartheta^{\mathrm{opt}}).$$

よって，以下の結論を $\vartheta^{\mathrm{opt}} = \widetilde{\vartheta}^H = \widetilde{\eta}^H - \overline{L}_- \widetilde{\zeta}$ より得る:

$$\vartheta_t^{\mathrm{opt}} = \widetilde{\eta}_t^H - \frac{\widetilde{\zeta}_t}{\widetilde{Z}_{t-}} \left(\widetilde{V}_{t-}^H - G_{t-}(\vartheta^{\mathrm{opt}}) \right).$$

これより定理 13 が成立する。 □

5. $\mathcal{L}^p$-射影の表現

この節の目標は問題 1 の解の表現を前節の拡張として得ることである。この節と次節の結果は Arai [3] によるものである。つまり，この節においても “numéraire 変換法” と “測度変換法” が展開されることになる。

まず，X が P-マルチンゲールである場合を取り扱う。問題 1 の解の一意存在性と H の分解の一意存在性を示す。

定理 14　X が P-マルチンゲールであるとき，以下の主張が成り立つ*: (1)* H は以下の分解を持つ*:*

$$H = E[H] + G_T(\vartheta^H) + L_T^H.$$

但し，$\vartheta^H \in \Theta^p$ であり，$L_T^H \in \mathcal{L}^p(P)$ は，任意の $\vartheta^{\mathrm{opt}} = \widetilde{\vartheta}^H = \widetilde{\eta}^H - \overline{L}_- \widetilde{\zeta}$ に対して，

$$E\left[\mathrm{sgn}(E[H] + L_T^H) |E[H] + L_T^H|^{p-1} G_T(\vartheta) \right] = 0$$

が成立し，$E[L_T^H] = 0$ を満たす。
(2) ϑ^H は問題 *1* の一意解である。

証明　はじめに，G_T^p の直交補空間を以下のように定義しよう:

$$G^\perp := \{ x^\perp \in \mathcal{L}^q(P) | \langle x, x^\perp \rangle = 0 \text{ for any } x \in G_T^p \}.$$

但し，$\langle x, x^\perp \rangle$ ($x \in \mathcal{L}^p(P), x^\perp \in \mathcal{L}^q(P)$) は $E[xx^\perp]$ に等しい。x^H によって $\mathrm{Minimize}_{x \in G_T^p} \|H - x\|_p$ の解を記述しよう。G_T^p は一様凸空間 $\mathcal{L}^p(P)$ の凸閉集合なので，x^H の一意存在性が保証されている。Luenberger [11] の定理 5.8.1 から

$$\mathrm{Minimize}_{x \in G_T^p} \|H - x\|_p = \mathrm{Maximize}_{x^\perp \in G^\perp, \|x^\perp\|_q \le 1} \langle H, x^\perp \rangle$$

となり，右辺の解を $x_H^\perp$ と書けば，$x_H^\perp$ は $H - x^H$ に平行（aligned）であり $G^\perp$ に属している。言い換えると，$x_H^\perp$ は

$$\langle H - x^H, x_H^\perp \rangle = \|H - x^H\|_p \|x_H^\perp\|_q$$

を満たしている。H が G_T^p に含まれていれば, $x^H = H$ であり $x_H^\perp = 0$ であることに注意しよう。そこで, ヘルダーの不等式の等号成立条件より, ある定数 $\gamma \in \mathbf{R}$ が取れて $x_H^\perp = \gamma\,\mathrm{sgn}(H - x^H)|H - x^H|^{p-1}$ となる。さらに，$\|x_H^\perp\|_q = 1$ から $\gamma = 1/\|H - x^H\|_p^{p-1}$ が成立する。ゆえに，

$$x_H^\perp = \frac{1}{\|H - x^H\|_p^{p-1}}\,\mathrm{sgn}(H - x^H)|H - x^H|^{p-1}$$

を得る。$E[H - x^H] = E[H]$ より，$H - x^H = E[H] + L_T^H$ と記述できる。但し，$E[L_T^H] = 0$ である。$L_T^H \in \mathcal{L}^p(P)$ であることに注意しよう。最後に，$x_H^\perp \in G^\perp$ であるから，任意の $x \in G_T^p$ に対して

$$E\left[\mathrm{sgn}(E[H] + L_T^H)|E[H] + L_T^H|^{p-1} x\right] = 0$$

である。 □

次に，上記の結果をセミマルチンゲールの場合に拡張する。まず，q-最適マルチンゲール測度 $Q^{(q)}$ の密度関数は，Grandits and Krawczyk [8] と Grandits and Rheinländer [9] によって以下の形式で与えられることが知られている:

$$\frac{dQ^{(q)}}{dP} = c_q\,(1 + f_p)^{p-1}.$$

但し，$-f_p$ は定数 1 の G_T^p 上への $\mathcal{L}^p(P)$-射影であり，c_q は標準化定数である。次に，

$$\begin{aligned}\widetilde{Z}_t^{(q)} &:= E_{Q^{(q)}}\left[\left(\frac{dQ^{(q)}}{dP}\right)^{q-1}\Big|\mathcal{F}_t\right] = E_{Q^{(q)}}\left[c_q^{q-1}(1 + f_p)^{(q-1)(p-1)}|\mathcal{F}_t\right] \\ &= E_{Q^{(q)}}\left[c_q^{q-1}(1 + f_p)|\mathcal{F}_t\right] =: c_q^{q-1} + G_t(\widetilde{\zeta}^{(p)})\end{aligned}$$

となる。但し，$\widetilde{\zeta}^{(p)} \in \Theta^p$ である。$\widetilde{Z}_0^{(q)} = c_q^{q-1}$ と $\widetilde{Z}_T^{(q)} = \left(\dfrac{dQ^{(q)}}{dP}\right)^{q-1}$ に注意しよう。

ここで，新たに P と同値な確率測度 $\widetilde{R}$ を導入しよう:

$$\frac{d\widetilde{R}}{dQ^{(q)}} := C^{\widetilde{R}}\widetilde{Z}_T^{(q)}.$$

但し，$C^{\widetilde{R}}$ は標準化定数である。従って，$\widetilde{R}$ の P に関する密度関数と定数 $C^{\widetilde{R}}$ は以下のように与えられる:

$$\frac{d\widetilde{R}}{dP} = \frac{d\widetilde{R}}{dQ^{(q)}}\frac{dQ^{(q)}}{dP} = C^{\widetilde{R}}\widetilde{Z}_T^{(q)}\frac{dQ^{(q)}}{dP} = C^{\widetilde{R}}\left(\frac{dQ^{(q)}}{dP}\right)^q = C^{\widetilde{R}}\left(\widetilde{Z}_T^{(q)}\right)^p,$$

$$C^{\widetilde{R}} = \frac{1}{E_{Q^{(q)}}[\widetilde{Z}_T^{(q)}]} = \frac{1}{c_q^{q-1}} = \frac{1}{\widetilde{Z}_0^{(q)}}.$$

さらに，$d+1$ 次元確率過程 Y を以下のように定義する:

$$Y^0 := \frac{1}{\widetilde{Z}^{(q)}}, \qquad Y^i := \frac{X^i}{\widetilde{Z}^{(q)}} \text{ for } i = 1, \ldots, d.$$

Y は $\widetilde{R}$-マルチンゲールである。

次の命題は，命題 9 の拡張であり，空間 G_T^p が Y に関する確率積分の適当な空間 G_Y に一対一対応していることを主張している。

命題 15

$$\frac{G_T^p}{\widetilde{Z}_T^{(q)}} = \left\{ \int_0^T \psi_t dY_t \Big| \psi \in L^p(Y, \widetilde{R}) \right\} (=: G_Y).$$

但し，$L^p(Y, \widetilde{R})$ は以下の条件を満たす全ての $\mathbf{R}^{d+1}$-値 Y-可積分可予測過程 ψ の空間である*:* $\int_0^\cdot \psi_t dY_t$ は $\widetilde{R}$-マルチンゲールであり $\mathcal{L}^p(\widetilde{R})$ に属する。さらに，$\vartheta \in \Theta^p$ と $\psi \in L^p(Y, \widetilde{R})$ との関係は以下の通りである*:*

$$\begin{aligned}
\psi^i &:= \vartheta^i, \quad \textit{for } i = 1, \ldots, d, \\
\psi^0 &:= G_-(\vartheta) - \vartheta^{\mathrm{tr}} X_-,
\end{aligned}$$

かつ

$$\vartheta^i := \psi^i + \widetilde{\zeta}^{(p),i} \left(\int_0^{\cdot -} \psi_t dY_t - \psi^{\mathrm{tr}} Y_- \right), \quad \textit{for } i = 1, \ldots, d.$$

任意の $\vartheta \in \Theta^p$ に対して，

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{H}{\widetilde{Z}_T^{(q)}} - \frac{G_T(\vartheta)}{\widetilde{Z}_T^{(q)}} \right\|_{\mathcal{L}^p(\widetilde{R})}^p &= E_{\widetilde{R}} \left[\left| \frac{H}{\widetilde{Z}_T^{(q)}} - \frac{G_T(\vartheta)}{\widetilde{Z}_T^{(q)}} \right|^p \right] \\
&= C^{\widetilde{R}} E \left[\left(\frac{dQ^{(q)}}{dP} \right)^{q-(q-1)p} |H - G_T(\vartheta)|^p \right] \\
&= C^{\widetilde{R}} \|H - G_T(\vartheta)\|_p^p
\end{aligned}$$

が成立する。ゆえに，問題 1 を次のように書き直すことができる:

$$\mathrm{Minimize}_{\psi \in L^p(Y, \widetilde{R})} \left\| \frac{H}{\widetilde{Z}_T^{(q)}} - \int_0^T \psi_t dY_t \right\|_{\mathcal{L}^p(\widetilde{R})}^p = C_{\widetilde{R}} \mathrm{Minimize}_{\vartheta \in \Theta^p} \|H - G_T(\vartheta)\|_p^p.$$

左辺の解 ψ^{opt} は右辺の解 ϑ^{opt} に命題 15 の意味で対応している。$H/\widetilde{Z}_T^{(q)} \in \mathcal{L}^p(\widetilde{R})$ であるから，定理 14 から

$$\frac{H}{\widetilde{Z}_T^{(q)}} = E_{\widetilde{R}} \left[\frac{H}{\widetilde{Z}_T^{(q)}} \right] + \int_0^T \psi_t^H dY_t + L_T^H$$

が言える。但し，$L_T^H \in \mathcal{L}^p(\widetilde{R})$ は，任意の $y \in G_Y$ に対して，

$$E_{\widetilde{R}}\left[\mathrm{sgn}\left(E_{\widetilde{R}}\left[\frac{H}{\widetilde{Z}_T^{(q)}}\right]+L_T^H\right)\left|E_{\widetilde{R}}\left[\frac{H}{\widetilde{Z}_T^{(q)}}\right]+L_T^H\right|^{p-1}y\right]=0,$$

を満たし，$E_{\widetilde{R}}[L_T^H]=0$ が成立するものとする。

これより

$$H=\widetilde{Z}_T^{(q)}E_{\widetilde{R}}\left[\frac{H}{\widetilde{Z}_T^{(q)}}\right]+G_T(\vartheta^H)+\widetilde{Z}_T^{(q)}L_T^H$$

である。但し，$\vartheta^H \in \Theta^p$ は $\psi^H \in L^p(Y,\widetilde{R})$ に命題 15 の意味で対応している可予測過程である。ここで，上式の右辺の各項を計算しよう。はじめに，第一項を整理しよう:

$$\widetilde{Z}_T^{(q)}E_{\widetilde{R}}\left[\frac{H}{\widetilde{Z}_T^{(q)}}\right]=E_{Q^{(q)}}[H]+G_T(C^{\widetilde{R}}E_{Q^{(q)}}[H]\widetilde{\zeta}^{(p)}).$$

次に，部分積分より

$$\widetilde{Z}_T^{(q)}L_T^H=G_T(L_-^H\widetilde{\zeta}^{(p)})+\int_0^T\widetilde{Z}_{t-}^{(q)}dL_t^H+[\widetilde{Z}^{(q)},L^H]_T$$

となる。但し，$L_t^H := E_{\widetilde{R}}[L_T^H|\mathcal{F}_t]$. $\widetilde{Z}^{(q)}L^H$ が $Q^{(q)}$-マルチンゲールであり，$\widetilde{Z}_T^{(q)}L_T^H$ が $\mathcal{L}^p(P)$ に属すことを注意しよう。結局，H は以下のように分解される:

$$H=E_{Q^{(q)}}[H]+G_T(\eta^H)+N_T.$$

但し，可予測過程 η^H と確率過程 N は

$$\eta^H := C^{\widetilde{R}}E_{Q^{(q)}}[H]\widetilde{\zeta}^{(p)}+\vartheta^H+L_-^H\widetilde{\zeta}^{(p)},$$

$$N := \int_0^{\cdot}\widetilde{Z}_{t-}^{(q)}dL_t^H+[\widetilde{Z}^{(q)},L^H],$$

である。

以下の 2 つの補題は重要である。特に，補題 16 の証明は補題 11 の単なる拡張では得られない。証明の詳細については，Arai [3] を参照されたい。

補題 16　N は $Q^{(q)}$-マルチンゲールであり $\mathcal{R}^p(P)$ に属する。

補題 17　$\eta^H \in \Theta^p$.

いよいよこの節の主定理を示す。

定理 18　問題 *1* の解 ϑ^{opt} は

$$\vartheta^{\mathrm{opt}} = \vartheta^H = \eta^H - \frac{\widetilde{\zeta}^{(p)}}{\widetilde{Z}^{(q)}_-}\left(V^H_- - G_-(\vartheta^H)\right)$$

と表現される。但し，$V^H_t := E_{Q^{(q)}}[H|\mathcal{F}_t]$ である。

証明　　補題 16 と 17 より

$$V^H = E_{Q^{(q)}}[H] + G(\eta^H) + N$$

を得る。$\overline{L}^H := C^{\widetilde{R}} E_{Q^{(q)}}[H] + L^H$ と書けば，$\eta^H = \overline{L}^H_- \widetilde{\zeta}^{(p)} + \vartheta^H$ となる。ϑ^H は問題 1 の解 ϑ^{opt} と等しい。よって，$\vartheta^{\mathrm{opt}} = \vartheta^H = \eta^H - \overline{L}^H_- \widetilde{\zeta}^{(p)}$ が成り立つ。一方，

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z}^{(q)}\overline{L}^H &= \widetilde{Z}^{(q)}_0 \overline{L}^H_0 + \int_0^{\cdot} \overline{L}^H_{t-} d\widetilde{Z}^{(q)}_t + N \\
&= E_{Q^{(q)}}[H] + G(\overline{L}^H_- \widetilde{\zeta}^{(p)}) + N \\
&= E_{Q^{(q)}}[H] + G(\eta^H - \vartheta^H) + N \\
&= V^H - G(\vartheta^H)
\end{aligned}$$

であるから，結局，

$$\vartheta^{\mathrm{opt}} = \vartheta^H = \eta^H - \frac{\widetilde{\zeta}^{(p)}}{\widetilde{Z}^{(q)}_-}\left(V^H_- - G_-(\vartheta^H)\right)$$

という結論を得る。 □

6.　評価法問題

この節では，条件付請求権 H を確率過程 X によって表現される d 個の危険資産によってヘッジしようとする投資家を考える。この投資家は $\mathcal{L}^p(P)$ の意味で最適な戦略を組むことを目標としている。そして，このような投資家にとっての条件付請求権に対する自然な評価法に焦点を絞る。

そのような評価法を与えるために，以下の最小化問題を考えよう: $c \in \mathbf{R}$ に対して，

$$\mathrm{Minimize}_{\vartheta \in \Theta^p} E\left[|H - c - G_T(\vartheta)|^p\right] (=: V(c)). \tag{6.1}$$

前節に登場した可予測過程 ϑ^H は上記の問題において $c = 0$ とした場合の解である。

$$\frac{1}{\widetilde{Z}^{(q)}_T} = E_{\widetilde{R}}\left[\frac{1}{\widetilde{Z}^{(q)}_T}\right] + \int_0^T \psi^1_t dY_t \tag{6.2}$$

が成立することより，最小化問題（6.1）の解 $\vartheta^{(c)}$ は $\vartheta^{(c)} = \vartheta^H - c\vartheta^1$ と記述される。但し，$\psi^1 \in L^p(Y, \widetilde{R})$ の各成分は $\psi^{1,0} = 1$ と $i = 1, \cdots, d$ に対して $\psi^{1,i} = 0$ で与えられ，$\vartheta^1 \in \Theta^p$ は ψ^1 に命題 15 の意味で対応している。このとき，H に対する $\mathcal{L}^p(P)$ の意味で自然な評価は，

$$c^* = \arg\inf_{c \in \mathbf{R}} V(c)$$

で与えられるであろう。c^* の意味するところは，ヘッジの p 次エラーが最小となる初期費用である。今考えている投資家にとっての最適戦略は $\mathcal{L}^p(P)$-ヘッジングであるので，$c^* + G(\vartheta^{(c)})$ が最も複製戦略に近い戦略と言えるのである。

注意 3　$p = 2$ のとき，c^* は $E_{Q^{(2)}}[H]$ となる。但し，2-最適マルチンゲール測度 $Q^{(2)}$ は分散最小マルチンゲール測度と呼ばれる。そこで，以下のような単純な予想が浮かぶであろう: $p > 1$ に対する c^* は $E_{Q^{(q)}}[H]$ で与えられる。ところが，この予想は正しくない。この事実は後ほど明らかになるであろう。

$x^H \in G^p_T$ が $\text{Minimize}_{x \in G^p_T} \|H - x\|_{\mathcal{L}^p(P)}$ の解であることを思い出そう。ここで，$\widetilde{\pi}(\cdot) : \mathcal{L}^p(P) \to \mathcal{L}^p(P)$ を $\widetilde{\pi}(H) = H - x^H$ により定義する。従って，$\widetilde{\pi}(H) = \widetilde{Z}^{(q)}_T \left(E_{\widetilde{R}} \left[\frac{H}{\widetilde{Z}^{(q)}_T} \right] + L^H_T \right)$. 一方，$\pi(H)$ を $\text{Maximize}_{x \in G^\perp, \|x\|_q \le 1} \langle H, x \rangle$ の解とする。但し，$\langle H, x \rangle = E[Hx]$. $\pi(H)$ を H の空間 G^p_T の直交補空間 $G^\perp$ 上への射影と呼ぼう。ここで，$\widetilde{\pi}(0) = \pi(0) = 0$ であることを付記しよう。

注意 4　Luenberger [11] の定理 5.8.1 から，

$$\text{Minimize}_{x \in G^p_T} \|H - x\|_p = \text{Maximize}_{x \in G^\perp, \|x\|_q \le 1} \langle H, x \rangle$$

となるので，$\|\widetilde{\pi}(H)\|_p = \|H - x^H\|_p = \langle H, \pi(H) \rangle$ である。

π の表現と，π と $\widetilde{\pi}$ の関係は以下のように与えられる:

命題 19　$\widetilde{\pi}(H) \neq 0$ としよう。このとき，

$$\begin{aligned} \pi(H) &= \frac{1}{\|H - x^H\|_p^{p-1}} \operatorname{sgn}(H - x^H) |H - x^H|^{p-1} \\ &= \frac{1}{\|\widetilde{\pi}(H)\|_p^{p-1}} \operatorname{sgn}(\widetilde{\pi}(H)) |\widetilde{\pi}(H)|^{p-1}. \end{aligned}$$

さらに，$C_H := 1/\|\widetilde{\pi}(H)\|_p^{p-1}$ とすれば，

$$\widetilde{\pi}(H) = \frac{1}{C_H^{q-1}} \operatorname{sgn}(\pi(H)) |\pi(H)|^{q-1}$$

である。

注意 5　定数 1 は以下のように分解される:

$$1 = \widetilde{Z}_T^{(q)} E_{\widetilde{R}} \left[\frac{1}{\widetilde{Z}_T^{(q)}} \right] + G_T(\vartheta^1).$$

よって, $\widetilde{\pi}(1) = C^{\widetilde{R}} \widetilde{Z}_T^{(q)}$ である。従って，定数 1 の $G^{\perp}$ 上への射影 $\pi(1)$ は $\pi(1) = C_1 \operatorname{sgn}(\widetilde{\pi}(1))|\widetilde{\pi}(1)|^{p-1} = C_1 \left(C^{\widetilde{R}} \right)^{p-1} \frac{dQ^{(q)}}{dP}$ で与えられる。但し，C_1 は，1 を C_H の H の所に代入して得られる定数である。結果として，

$$\frac{dQ^{(q)}}{dP} = \frac{\pi(1)}{E[\pi(1)]}$$

を得る。

命題 20 では，射影作用素 π と $\widetilde{\pi}$ による $V(c)$ の表現を提示する。さらに，命題 21 では $V(c)$ の双対問題となるような $\mathcal{M}_q^s$ における最適化問題を導出する。

命題 20

$$\begin{aligned} V(c) &= E^p[\widetilde{\pi}(H-c)\pi(H-c)] = E^p[(H-c)\pi(H-c)] \\ &= \langle H-c, \pi(H-c) \rangle^p. \end{aligned}$$

証明　　まず，以下が成立する:

$$\begin{aligned} V(c) &= \operatorname{Minimize}_{x \in G_T^p} \|H-c-x\|_p^p = \|H-c-x^{H-c}\|_p^p \\ &= \|\widetilde{\pi}(H-c)\|_p^p. \end{aligned}$$

さらに，命題 19 から

$$E[\widetilde{\pi}(H-c)\pi(H-c)] = C_{H-c} E[|\widetilde{\pi}(H-c)|^p] = \|\widetilde{\pi}(H-c)\|_p$$

が言える。そして，

$$E[\widetilde{\pi}(H-c)\pi(H-c)] = E[(H-c-x^{H-c})\pi(H-c)] = \langle H-c, \pi(H-c) \rangle$$

が成立する。以上から命題 20 が成立する。 □

命題 21　以下の双対性が成り立つ*:*

$$V(c) = \operatorname{Maximize}_{D \in \mathcal{D}^q} \frac{|E[DH] - c|^p}{E^{p-1}[|D|^q]}.$$

但し，$\mathcal{D}^q = \{dQ/dP | Q \in \mathcal{M}_q^s\}$. $E[\pi(H-c)] \neq 0$ であるとき，右辺の最大値は $D_c := \dfrac{\pi(H-c)}{E[\pi(H-c)]}$ において達成される。

証明　ヘルダーの不等式より

$$\begin{aligned}
\mathrm{Maximize}_{D\in\mathcal{D}^q}\frac{|E[DH]-c|^p}{E^{p-1}[|D|^q]} &= \mathrm{Maximize}_{D\in\mathcal{D}^q}\frac{|E[D(H-c-x^{H-c})]|^p}{E^{p-1}[|D|^q]} \\
&\le \mathrm{Maximize}_{D\in\mathcal{D}^q}\frac{\big|\|D\|_q\|H-c-x^{H-c}\|_p\big|^p}{\|D\|_q^p} \\
&= E[|H-c-x^{H-c}|^p] = V(c). \qquad (6.3)
\end{aligned}$$

$E[\pi(H-c)]\neq 0$ を仮定し，$D_c := \pi(H-c)/E[\pi(H-c)]$ と記述する。そのとき，命題 20 と $\|\pi(H-c)\|_q = 1$ より

$$\begin{aligned}
\mathrm{Maximize}_{D\in\mathcal{D}^q}\frac{|E[DH]-c|^p}{E^{p-1}[|D|^q]} &\ge \frac{|E[D_c(H-c)]|^p}{E^{p-1}[|D_c|^q]} \\
&= \frac{|E[\pi(H-c)]|^p\,|E[\pi(H-c)(H-c)]|^p}{E^{p-1}[|\pi(H-c)|^q]\,|E[\pi(H-c)]|^p} \\
&= \frac{V(c)}{\|\pi(H-c)\|_q^{q(p-1)}} \\
&= V(c) \qquad (6.4)
\end{aligned}$$

を得る。

次に，$E[\pi(H-c)]=0$ とする。ここで，$\widehat{c}$ を $E[\pi(H-\widehat{c})]=0$ を満たす定数とする。まず，$V(c)$ の連続性を示す。Minkowski の不等式から，任意の $\Delta c>0$ に対して，

$$\begin{aligned}
V^{1/p}(c+\Delta c) &= E^{1/p}[|H-c-\Delta c-x^{H-c}+\Delta c x^1|^p] \\
&\le E^{1/p}[|H-c-x^{H-c}|^p] + E^{1/p}[|\Delta c-\Delta c x^1|^p] \\
&= V^{1/p}(c) + |\Delta c|\|1-x^1\|_p
\end{aligned}$$

が成立する。但し，x^1 は $\mathrm{Minimize}_{x\in G_T^p}\|1-x\|_p$ の解である。同様にして，$V^{1/p}(c)\le V^{1/p}(c+\Delta c)+|\Delta c|\|1-x^1\|_p$ を得る。ゆえに，$V(c)$ は連続関数である。$n\ge 1$ に対して $D_n := \pi(H-\widehat{c}-$

$1/n)/E[\pi(H-\widehat{c}-1/n)]$ と置こう。そのとき，以下が成立する:

$$\begin{aligned}\text{Maximize}_{D\in\mathcal{D}^q}\frac{|E[D(H-\widehat{c})]|^p}{E^{p-1}[|D|^q]} &\geq \frac{|E[D_n(H-\widehat{c})]|^p}{E^{p-1}[|D_n|^q]}\\ &= \frac{|E[D_n(H-\widehat{c}-\frac{1}{n})+\frac{1}{n}D_n]|^p}{E^{p-1}[|D_n|^q]}\\ &= \left|\frac{E[D_n(H-\widehat{c}-\frac{1}{n})]}{\|D_n\|_q}+\frac{1/n}{\|D_n\|_q}\right|^p\\ &\geq \frac{E^p[\pi(H-\widehat{c}-\frac{1}{n})(H-\widehat{c}-\frac{1}{n})]}{\|\pi(H-\widehat{c}-\frac{1}{n})\|_q^p}\\ &\quad+\left(\frac{1}{n}\right)^p\frac{1}{\|D_n\|_q^p}\\ &= V\left(\widehat{c}+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^p}\frac{1}{\|D_n\|_q^p}\\ &\to V(\widehat{c})\quad \text{as } n\to\infty. \end{aligned}\tag{6.5}$$

但し，$0\leq\dfrac{1}{\|D_n\|_q^p}\leq 1$ に注意しなければならない。(6.3)，(6.4) と (6.5) から命題 21 が成り立つ。 □

前述の命題において，$E[\pi(H-c)]=0$ であるときには右辺の双対問題の最大値を達成するようなものは存在しない。それゆえ，$E[\pi(H-c)]=0$ を満たす c は何か特別な意味を持つものと思われる。実際，以下の定理ではそのような c が c^* と等しいことを明らかにする。定理の証明に際しては，(6.1) における最小化問題には 2 つの見方があり，それらをうまく組み合わせることが重要になる。1 つ目の見方は，$H-c$ の空間 G_T^p 上への射影であり，もう 1 つは H の空間 “定数 + G_T^p” 上への射影である。

定理 22　c^* は一意的に存在し，$E[\pi(H-c^*)]=0$ を満足する。

証明　$W_T^p:=\text{span}(1,G_T^p)$ としよう。そのとき，Choulli, Stricker and Krawczyk [5] の定理 5.1 から W_T^p は $\mathcal{L}^p(P)$ において閉である。w^H を $\text{Minimize}_{w\in W_T^p}\|H-w\|_p$ の解としよう。$w^H\in W_T^p$ は一意的に存在する。何故ならば，W_T^p は一様凸空間 $\mathcal{L}^p(P)$ の凸閉部分集合だからである。w^H を $c^H+x_W^H$ と記述しよう。但し，$c^H\in\mathbf{R}$ であり $x_W^H\in G_T^p$ である。x_W^H は $\text{Minimize}_{x\in G_T^p}\|H-c^H-x\|_p$ の解 x^{H-c^H} である。さらに，c^H は，任意の $c\in\mathbf{R}$ に対して $\|H-c^H-x^{H-c^H}\|_p\leq\|H-c-x^{H-c}\|_p$ として特徴付けられる。結局，$c^*=c^H$ が成立し，c^* は唯一つ存在する。

次に，W_T^p の直交補空間 $W^\perp$ は

$$W^\perp=\left\{w^\perp\in G^\perp|\langle 1,w^\perp\rangle=0\right\}$$

と書ける。$\widetilde{\pi}^W(\cdot):\mathcal{L}^p(P)\to\mathcal{L}^p(P)$ を $\widetilde{\pi}^W(H)=H-w^H=H-c^H-x^{H-c^H}$ によって定義しよ

う。つまり，$\widetilde{\pi}^W(H) = \widetilde{\pi}(H - c^H)$ である。π^W を H の $W^\perp$ 上への射影とする。言い換えると，$\pi^W(H)$ は $\mathrm{Maximize}_{w^\perp \in W^\perp, \|w^\perp\|_q \le 1} \langle H, w^\perp \rangle$ の解である。それゆえ，$\langle H, \pi^W(H) \rangle = \left\| \widetilde{\pi}^W(H) \right\|_p$ が成り立つ。定理 14 と同じ議論を展開すると

$$\begin{aligned} \pi^W(H) &= C_{H-c^H} \operatorname{sgn}(\widetilde{\pi}^W(H)) |\widetilde{\pi}^W(H)|^{p-1} \\ &= C_{H-c^H} \operatorname{sgn}(\widetilde{\pi}(H - c^H)) |\widetilde{\pi}(H - c^H)|^{p-1} \\ &= \pi(H - c^H) \end{aligned}$$

を得る。ゆえに，$\pi^W(H) \in W^\perp$ から

$$E\left[\pi(H - c^*)\right] = E\left[\pi(H - c^H)\right] = E\left[\pi^W(H)\right] = 0$$

を得る。 □

最後に，c^* が $E_{Q^{(q)}}[H]$ ではないことを確かめよう。$\alpha := E_{Q^{(q)}}[H]$ と書くとき，$H - \alpha$ は $G_T(\vartheta^{H-\alpha}) + \widetilde{Z}^{(q)}_T L^H_T$ と分解される。$E_{\widetilde{R}}[(H - \alpha)/\widetilde{Z}^{(q)}_T] = 0$ であることに注意せよ。ゆえに，$\widetilde{\pi}(H - \alpha) = \widetilde{Z}^{(q)}_T L^H_T$ が成立。従って，

$$\pi(H - \alpha) = \frac{1}{\|\widetilde{Z}^{(q)}_T L^H_T\|_p^{p-1}} \operatorname{sgn}(\widetilde{Z}^{(q)}_T L^H_T) |\widetilde{Z}^{(q)}_T L^H_T|^{p-1}$$

を得る。加えて，$Y^0 = 1/\widetilde{Z}^{(q)}$ より

$$\begin{aligned} E[\operatorname{sgn}(\widetilde{Z}^{(q)}_T L^H_T) |\widetilde{Z}^{(q)}_T L^H_T|^{p-1}] &= E\left[(\widetilde{Z}^{(q)}_T)^p \operatorname{sgn}(L^H_T) |L^H_T|^{p-1} \frac{1}{\widetilde{Z}^{(q)}_T} \right] \\ &= E[(\widetilde{Z}^{(q)}_T)^p \operatorname{sgn}(L^H_T) |L^H_T|^{p-1}] \frac{1}{\widetilde{Z}^{(q)}_0} \end{aligned}$$

である。結局，以下の等式が成立する:

$$E[\pi(H - \alpha)] = 0 \Longleftrightarrow E_{\widetilde{R}}[\operatorname{sgn}(L^H_T) |L^H_T|^{p-1}] = 0.$$

L^H は $\widetilde{R}$-マルチンゲールなので，一般に $E[\pi(H - \alpha)]$ は 0 に等しくない。ところで一方，$p = 2$ のときには，$E_{\widetilde{R}}[\operatorname{sgn}(L^H_T) |L^H_T|^{p-1}] = E_{\widetilde{R}}[L^H_T] = 0$ が成立する。

（経済学部助教授）

参 考 文 献

[1] Arai, T. (2005a) An extension of mean-variance hedging to the discontinuous case. *Fin. Stoch.* **9** 129–139.

[2] Arai, T. (2005b) Some properties of the variance-optimal martingale measure for discontinuous semimartingales. *Stat. Probab. Lett.* **74** 163–170.

[3] Arai, T. (2006) $\mathcal{L}^p$-projections of random variables and its application to finance, submitted.

[4] Choulli, T., Krawczyk, L. and Stricker, C. (1998) $\mathcal{E}$-martingales and their applications in mathematical finance. *Ann. Prob.* **26** 853–876.

[5] Choulli, T., Stricker, C. and Krawczyk, L. (1999) On Fefferman and Burkholder-Davis-Gundy inequalities for $\mathcal{E}$-martingales. *Prob. Th. Relat. Fields* **113** 571–597.

[6] Dellacherie, C. and Meyer, P.A. (1982) *Probabilities and Potential B*, North-Holland, Amsterdam.

[7] Gourieroux, C., Laurent, J.P. and Pham, H. (1998) Mean-variance hedging and numéraire. *Math. Fin.* **8** 179–200.

[8] Grandits, P. and Krawczyk, L. (1998) Closedness of some spaces of stochastic integrals. *Séminaire de Probabilités, XXXII. Lecture Notes in Math.* **1686** 73–85. Springer.

[9] Grandits, P. and Rheinländer, T. (2002) On the minimal entropy maritingale measure. *Ann. Prob.* **30** 1003–1038.

[10] Jacod, J. (1979) *Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales*, Lecture Notes in Mathematics **714**, Springer-Verlag.

[11] Luenberger, D. (1969) *Optimization by vector space methods*, Wiley.

[12] Pham, H. (2000) On quadratic hedging in continuous time. *Math. Meth. Oper. Res.* **51** 315–339.

[13] Rheinländer, T. and Schweizer, M. (1997) On L^2-projections on a space of stochastic integrals. *Ann. Prob.* **25** 1810–1831.

[14] Schweizer, M. (1996) Approximation pricing and the variance-optimal martingale measure. *Ann. Prob.* **24** 206–236.

[15] Schweizer, M. (2001) A guided tour through quadratic hedging approaches. *Option pricing, interest rates and risk management. Handb. Math. Fin.* 538–574. Cambridge Univ. Press.