Title	不確実性と資産市場均衡IV(完)
Sub Title	Uncertainty and asset market equilibrium IV
Author	福岡, 正夫(Fukuoka, Masao) 須田, 伸一(Suda, Shinichi)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2006
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.99, No.3 (2006. 10) ,p.577(225)- 583(231)
JaLC DOI	10.14991/001.20061001-0225
Abstract	本稿では, 価値尺度財資産モデルを対象とした前稿に引きつづき, まず名目資産モデルについて, そこではこれまでの証明法が適用不可能となる理由を説明し, ついで一般的実物資産モデルについて, 不完備資産市場の下では, ほとんどすべての経済において, 資産市場均衡が制約された効率性を満たさないという本来の命題を証明する。 Following the authors' previous paper on the numéraire asset model, this study first explains that applying the preceding proof methods is impossible for the nominal asset model. Subsequently, it proves the original proposition that under an imperfect asset market, asset market equilibrium does not satisfy even the constrained efficiency in almost all economies.
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20061001-0225

不確実性と資産市場均衡 IV(完)

Uncertainty and Asset Market Equilibrium IV

福岡　正夫(Masao Fukuoka)
須田　伸一(Shinichi Suda)

本稿では，価値尺度財資産モデルを対象とした前稿に引きつづき，まず名目資産モデルについて，そこではこれまでの証明法が適用不可能となる理由を説明し，ついで一般的実物資産モデルについて，不完備資産市場の下では，ほとんどすべての経済において，資産市場均衡が制約された効率性を満たさないという本来の命題を証明する。

Abstract

Following the authors' previous paper on the numéraire asset model, this study first explains that applying the preceding proof methods is impossible for the nominal asset model. Subsequently, it proves the original proposition that under an imperfect asset market, asset market equilibrium does not satisfy even the constrained efficiency in almost all economies.

「三田学会雑誌」99 巻 3 号（2006 年 10 月）

不確実性と資産市場均衡 IV（完）

福 岡 正 夫
須 田 伸 一

要　　旨

本稿では，価値尺度財資産モデルを対象とした前稿に引きつづき，まず名目資産モデルについて，そこではこれまでの証明法が適用不可能となる理由を説明し，ついで一般的実物資産モデルについて，不完備資産市場の下では，ほとんどすべての経済において，資産市場均衡が制約された効率性を満たさないという本来の命題を証明する。

キーワード

資産市場均衡，不完備資産市場，制約された効率性，名目資産モデル，実物資産モデル

13

つぎにわれわれは，同様の定理が名目資産モデルについても成り立つかどうかを検討することにしたい。前にも見たように，名目資産モデルにおいては価格基準化の方法が価値尺度財モデルの場合とは相違し，$\bar{p}_{10} = \bar{p}_{11}(1) = \cdots = \bar{p}_{11}(S) = 1$ とはされずに，ただ

$$\bar{p}_{10} = \bar{p}_{11}(1) = 1$$

とされるにすぎない。ところがこの相違点にもとづき，当面のモデルでは，前稿で採用したアプローチは重大な困難に遭遇することになるのである。

まず従前どおりに価値尺度財（第 1 財）の価格を除いた価格ベクトルを

$$\begin{aligned} \hat{\bar{p}}_0 &= (\bar{p}_{20}, \cdots, \bar{p}_{L0})' \\ \hat{\bar{p}}_1(s) &= (\bar{p}_{21}(s), \cdots, \bar{p}_{L1}(s))',\ s = 1, \cdots, S \end{aligned}$$

のように記すとすれば，目下の場合，内生変数となるすべての価格を含む価格ベクトルは，価値尺度財モデルの場合のように $\hat{\bar{p}} = (\hat{\bar{p}}_0, \hat{\bar{p}}_1(1), \cdots, \hat{\bar{p}}_1(S))$ とはならずに

$$\hat{\bar{p}}_{nom} = (\hat{\bar{p}}_0, \hat{\bar{p}}_1(1), \bar{p}_1(2), \cdots, \bar{p}_1(S))$$

となる。すなわち未知数としての財価格の個数が $(L-1)(S+1)$ から $2(L-1)+L(S-1)=L(S+1)-2$ に $(S-1)$ 個だけ増えるのである。したがって全体としての未知数の数もそれに応じて前の $(L(S+1)+(S+1)+J)I+(L-1)(S+1)+J$ から $(L(S+1)+(S+1)+J)I+L(S+1)-2+J$ に増加するが，一方，均衡方程式の数は前とまったく変わらないから，未知数の数がその分だけ方程式の数を超えざるをえない。すなわち，この一事のゆえに，名目資産モデルにおいては均衡点が有限個の孤立点になるとはかぎらず，一般には連続体の濃度をもつ無限個となることを避けえないのである。[(65)]

そこでこの事実が推論の手筈にどう影響するかを見るために，前節での証明の論理構造をいま一度要約してみることにしよう。それはつぎのような三つのステップから成るものであった。

（イ）定理の前提からいわゆる（ND）条件が成り立つことを示す。

（ロ）（ND）条件が成り立てば，$(\bar{\omega},0)$ のある近傍が存在して，そこで $F(\xi,\theta,\omega,C)=0$ を満たす任意の (ξ,θ,ω,C) において $D_{(\xi,\theta,\omega,C)}F$ がフル（行）ランクになることを示す。

（ハ）上記の帰結が成り立てば，横断性定理にもとづき定理の結論が成り立つことを示す。

ここで目下の場合，均衡点が前記の意味で無限個になると差し障りが生じてくるのは，とりわけ（イ）のステップと（ロ）のステップにおいてである。

さきに後者について問題となる点にかかわる前稿の議論[(66)]をより立ち入って敷衍すると，いま $(\bar{\omega},0)$ においてかりに均衡点が有限個たとえば K 個 $(1,2,\cdots,k,\cdots,K)$ であったとすれば，それらの集合を M として，(ND) からすべての $(\xi,\theta,\bar{\omega},0)\in M$ に対して $D_{(\xi,\theta,\omega,C)}F(\xi,\theta,\bar{\omega},0)$ はフル（行）ランクになることがいえている。するとこのことは，$D_{(\xi,\theta,\omega,C)}F(\xi,\theta,\omega,C)$ が連続であるところから，それらの均衡点をそれぞれほんの僅か動かしても，やはり当該のフル（行）ランク性が維持されることを意味しており，これは換言すればそれぞれの $(\xi,\theta,\bar{\omega},0)\in M$ に対して開近傍 N_k $(k=1,\cdots,K)$ が存在して，$D_{(\xi,\theta,\omega,C)}F(\xi,\theta,\omega,C)$ は N_k 上でフル（行）ランクになるということである。よってそれらの近傍の (ω,C) 上への射影を考え，

$$\tilde{N}=\bigcap_{k=1}^{K}\mathrm{proj}\,N_k$$

として，その $\tilde{N}$ を（ロ）の主張中の開近傍とすればよいという手順になっていたわけである。

ところが名目資産モデルの場合には $(\bar{\omega},0)$ での均衡点が無限個となりうるから，上記のような各均衡点の近傍もまた無限個となり，したがってそれらの共通部分 $\tilde{N}$ が1点に退化してしまって開集

(65) この点については Y. Balasko and D. Cass, “The Structure of Financial Equilibrium: I. Exogenous Yields and Unrestricted Participation,” *Econometrica*, Vol. 57, 1989, J. Geanakoplos and A. Mas-Colell, “Real Indeterminacy with Financial Assets,” *Journal of Economic Theory*, Vol. 47, 1989. などを参照されたい。

(66) 福岡正夫・須田伸一「不確実性と資産市場均衡 III」,『三田学会雑誌』2006 年 1 月号，pp.168–169.

合とはならない場合もあるのではないか，すなわち一般には問題の $(\bar{\omega}, 0)$ の開近傍がとれないのではないか，という懸念が生じてくる。が，この点に関するかぎりは実は心配は無用であって，問題点をクリアすることが可能である。というのは，均衡点の集合 M は標準的な議論からコンパクト集合になることが分かるので，M は無限集合であってもそのなかから適当に有限個の均衡点とそのそれぞれの近傍を選び，それらの近傍を $N_1, \cdots, N_H$ とすれば，$N_h (h = 1, \cdots, H)$ の合併で M を覆い，かつ各 N_h $(h = 1, \cdots, H)$ 上では $D_{(\xi,\theta,\omega,C)}F(\xi, \theta, \omega, C)$ がフル（行）ランクになるようにすることができるからである。したがってそれらの近傍の (ω, C) への射影を考え，その共通部分をとれば，所望の $\tilde{N}$ を得ることができるのである。

さてこうして（ロ）のステップがクリアされれば，前稿の推論を準用することで所望の証明を完うできるかといえば，事はそううまくは運ばないのであって，難点はむしろ（イ）のほうのステップに見出される。このステップでは，定理の前提から (ND) が成り立つこと，すなわち $F(\xi, \theta, \bar{\omega}, 0) = 0$ となるようなすべての $(\xi, \theta) \in \Xi \times R^{m+I}$ において行列 $\left[\begin{pmatrix} \Psi' \\ \theta' \end{pmatrix}, D_C F_{opt} \right]$ がフル（行）ランクになることを示すのが主眼となっているが，元来ここで $D_C F_{opt}$ の部分に現われる効用関数の摂動パラメーター C のつくり方そのものが有限個の均衡点を前提としているのである。すなわち前項の定義式[(67)]

$$u^i(x^i, C^i) = \bar{u}^i(x^i) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K} \rho^{ik}(x^i)[(x^i - \bar{x}^{ik})' C^i (x^i - \bar{x}^{ik})]$$

はそれ自体が K 個の均衡点を用いて定義されており，しかも x^i が $\bar{x}^{ik}$ に十分近いところでは $\rho^{ik}(x^i) = 1$, $\rho^{ik'}(x^i) = 0$, $k \neq k'$ となるように，すなわち

$$u^i(x^i, C^i) = \bar{u}^i(x^i) + \frac{1}{2}[(x^i - \bar{x}^{ik})' C^i (x^i - \bar{x}^{ik})]$$

となるようにされている。こうした措置は明らかに各均衡点が孤立点であることを必要としており，均衡点の集合が連続体となるような場合には適用できない。それゆえこの種のアプローチはそのままの形では名目資産の場合には適用不可能であり，よって前稿 p.169 以下の所論もまた成立しえないことになる。

以上に指摘したところから明らかなように，名目資産モデルの場合は，所望の定理を前稿に準じた推論をもってしては証明することができず，その抜本的に異なるとり扱いについてはとりあえず別個の機会に俟つほかはない。本稿で上記のような消極的な結果しか報告できないのははなはだ遺憾であるが，問題の所在が，たんに無限次元の横断性定理を用いればいいのではないかというだけではすまない点にあることをご理解いただければ幸いである。

（67） 福岡・須田，前掲論文，p.166。

ここで翻って，実物資産のモデルに目を転じることにしよう。名目資産モデルの場合とは対照的に，実物資産モデルについてはそれといった支障なしに前稿の推論を準用することができ，mutatis mutandis に問題の解決を図ることができる。[68] 以下では早速につぎの定理の証明に進むことにする。

定理 7　収益行列 $V(\bar{p})$ をもつ実物資産モデルを考え，そこで $J < S$，$I \geqq 2$ であるとする。そのとき $\Omega \times \mathscr{A} \times \mathscr{U}$ であらわされる経済 $\mathscr{E}$ には開かつ稠密な部分集合 $\mathscr{E}^*$ が存在し，どの $(\omega, A, u) \in \mathscr{E}^*$ についてもそこでの任意の資産市場均衡 $((x^*, z^*), (\bar{p}^*, q^*))$ における配分 x^* は制約された効率性を満たしえない。

証明

証明の骨子は前稿と同様（ND）条件が満たされること，すなわち $F(\xi, \theta, \bar{\omega}, A, 0) = 0$ となるようなすべての (ξ, θ) において行列 $\left[\begin{pmatrix} \Psi' \\ \theta' \end{pmatrix}, D_C F_{opt}\right]$ がフル（行）ランクをもつこと，を示す点にあるが，一般的な実物資産モデルの場合には前稿とは異なり，上記の行列の Ψ' に含まれる V が $\bar{p}$ に依存し，その関数 $V(\bar{p})$ となる事実が考慮されなくてはならない。この事実は，前稿 p.170 に掲げた $\tilde{\Psi}$ 行列の各ブロックのうち Z^i $(i = 1, \cdots, I)$ の部分，すなわち

$$-\Phi(\bar{p})(x^i - \omega^i) + \begin{bmatrix} \gamma^i \\ V(\bar{p})\tilde{z}^i \end{bmatrix}$$

を $\hat{p}$ に関して[69] 偏微分した部分が第 1 項を偏微分した成分ばかりでなく，また第 2 項を偏微分した成分をも含むことを意味している。実物資産モデルにおいては

$$V(\bar{p})\tilde{z}^i = \begin{bmatrix} \bar{p}_1(1)'A^1(1) & \cdots & \bar{p}_1(1)'A^J(1) \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{p}_1(S)'A^1(S) & \cdots & \bar{p}_1(S)'A^J(S) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1^i \\ \vdots \\ \tilde{z}_J^i \end{bmatrix}$$

---

(68) 実物資産モデルにおいては，価値尺度財資産モデルの場合と同様，均衡点の個数が生成的に有限個となるので，前稿と同様のアプローチをとることができるのである。この点については A. Villanacci, L. Carosi, P. Benevieri and A. Battinelli, *Differential Topology and General Equilibrium with Complete and Incomplete Markets*, 2002, p.384 の Theorem 29 およびそれにつづく議論を参照されたい。

(69) 実物資産モデルの場合，価格の基準化はふたたび価値尺度財資産モデルの場合と同じになる。

$$
= \begin{bmatrix} \sum_{\ell=1}^{L} \bar{p}_{\ell 1}(1) A_{\ell}^{1}(1) \tilde{z}_1^i + \cdots + \sum_{\ell=1}^{L} \bar{p}_{\ell 1}(1) A_{\ell}^{J}(1) \tilde{z}_J^i \\ \vdots \\ \sum_{\ell=1}^{L} \bar{p}_{\ell 1}(S) A_{\ell}^{1}(S) \tilde{z}_1^i + \cdots + \sum_{\ell=1}^{L} \bar{p}_{\ell 1}(S) A_{\ell}^{J}(S) \tilde{z}_J^i \end{bmatrix}
$$

となっており，また

$$
\hat{\bar{p}} = (\bar{p}_{20}, \cdots, \bar{p}_{L0}, \bar{p}_{21}(1), \cdots, \bar{p}_{L1}(1), \cdots, \bar{p}_{21}(S), \cdots, \bar{p}_{L1}(S))
$$

であるから，いま後者で前者を偏微分した結果を代表的に $\bar{p}_{\ell 1}(s)$ で偏微分した部分のみについて見ると

$$
\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_{\ell}^{1}(s) \tilde{z}_1^i + \cdots + A_{\ell}^{J}(s) \tilde{z}_J^i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

のようになっている。そこで以下記号を簡単化するため

$$
\zeta_{\ell s}^i = A_{\ell}^{1}(s) \tilde{z}_1^i + \cdots + A_{\ell}^{J}(s) \tilde{z}_J^i = \sum_{j=1}^{J} A_{\ell}^{j}(s) \tilde{z}_j^i
$$

と書くことにすれば，目下のモデルで前稿の Z^i に新たに付け加えられるべき部分 $\mathring{Z}^i$ は，γ^i を偏微分した結果である $[0 \cdots 0]$ をもつけ足して

$$
\mathring{Z}^i = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 \ \cdots \ 0 & & & & \\ \hline & \zeta_{21}^i \ \cdots \zeta_{L1}^i & & & \\ \hline & & \zeta_{22}^i \ \cdots \zeta_{L2}^i & & \\ \hline & & & \ddots & \\ \hline & & & & \zeta_{2S}^i \ \cdots \zeta_{LS}^i \end{array} \right]
$$

のようにあらわされ，よって新しい $\bar{Z}^i = Z^i + \overset{\circ}{Z}{}^i$ の第 2 行以下の対角ブロックは $s = 1, \cdots, S$ のそれぞれについて

$$(-(x_{21}^i(s) - \omega_{21}^i(s)), \cdots, -(x_{L1}^i(s) - \omega_{L1}^i(s))) + (\zeta_{2S}^i, \cdots, \zeta_{LS}^i)$$

あるいはより簡単に

$$-(\hat{x}_1^i(s) - \hat{\omega}_1^i(s)) + \zeta_s^i$$

から成ることになる。

さて Z^i を上記のように拡大した $\bar{Z}^i$ に置き換えても，前稿 pp.173–177 のケース 1 の推論が同様に当てはまることは明らかである。

そこで以下ではケース 2 のみに限定して考察を進めるが，前稿（41）式から，実物資産モデルについては

$$\sum_{i=1}^{I} (\alpha^i \Lambda^i + \beta^i \bar{Z}^i) = 0$$

となり，ケース 2 の条件からすべての i について $\alpha^i = 0$，また $\beta^i = \mu^i \lambda^i$ であるところから

$$\sum_{i=1}^{I} \mu^i \lambda^i \bar{Z}^i = 0$$

となるのでなくてはならない。これを $\lambda^i = (\lambda_0^i, \lambda_1^i(1), \cdots, \lambda_1^i(S))$ の $\lambda_1^i(1)$ の成分について見ると

$$\sum_{i=1}^{I} \mu^i \lambda_1^i(1)(x_{\ell 1}^i(1) - \omega_{\ell 1}^i(1) - \zeta_{\ell 1}^i) = 0$$

とならねばならないということであり，そこで前稿と同じ推論を用いて

$$\mu^i \lambda_1^i(1) = \mu^1 \lambda_0^1 \frac{\lambda_1^i(1)}{\lambda_0^i}$$

を代入し，両辺を $\mu^1 \lambda_0^1\ (\neq 0)$ で割れば

$$\sum_{i=1}^{I} \frac{\lambda_1^i(1)}{\lambda_0^i}(x_{\ell 1}^i(1) - \omega_{\ell 1}^i(1) - \zeta_{\ell 1}^i) = 0$$

を得る。すなわち前稿のこれに対応する式と相違するところは，ただ $-\zeta_{\ell 1}^i$ の項が含まれる点のみであることが知られるのである。

よって証明を完うするためには，前稿 p.166 の正則経済の定義をつぎのように改変しさえすればよい。すなわち一般的な実物資産をもつ目下の経済については，

均衡条件 $F_{eq}(\xi, \omega, A, u) = 0$ を満たす点において

(i) rank $D_\xi F_{eq}(\xi, \omega, A, u) = n$

(ii) すべての i について $\displaystyle\sum_{i=1}^{I} \frac{\lambda_1^i(1)}{\lambda_0^i}(x_{\ell 1}^i(1) - \omega_{\ell 1}^i(1) - \zeta_{\ell 1}^i) \neq 0$

の 2 条件が成り立つ

ことをもって，新しい正則経済の定義とすればよいのである。そのとき上記の条件を満たす経済の集合をあらためて $\mathscr{E}_r$ とすれば，$\mathscr{E}_r$ は $\mathscr{E}$ の開かつ稠密な部分集合で，そこにおいてはケース 2 は存在しえないことになるから，$F(\xi, \theta, \bar{\omega}, A, 0) = 0$ となるようなすべての $(\xi, \theta) \in \Xi \times R^{m+I}$ に対して

$$\left[\begin{pmatrix} \Psi' \\ \theta' \end{pmatrix}, D_C F_{opt} \right]$$

はフル（行）ランクをもつことになり，その意味ですべての $(\bar{\omega}, 0) \in \mathscr{E}_r$ について（ND）が成り立てば，$\mathscr{E}_{sub}$ は $\mathscr{E}_r$ したがって $\mathscr{E}$ において稠密となる。一方与件に A が加わっても $\mathscr{E}_{sub}$ が $\mathscr{E}$ において開になることの証明は前稿のそれに準じうるから，これで定理 7 の証明は完了したことになる。

15

以上標記の主題について 4 回にわたって長々と述べてきたが，総括すればわれわれはまず完備資産市場の想定の下に資産市場の均衡がパレート最適性を満たすこと，したがってそれが条件付き先物市場均衡の代替物たりうること，を明らかにし，またもう一方，資産市場が不完備の場合には，いずれの資産市場均衡もパレート最適性を満たしえないことをも厳密に証明した。さらにつづけて，最適性の規準を若干緩和し，それをジーナコプロス＝ポレマルカキス流のいわゆる制約された効率性に代置した場合にも，なお不完備資産市場の均衡は当該の制約された効率性を満たしえないことの証明をも併せて示した。もっともこの後者の主張は，名目資産モデルに関するかぎりは，いまだ憶測にとどまらざるをえなかったが。

総じて上記の帰結は，資産市場が不完備の場合すなわち不確実性下に生じうるすべての事態に対して資産の種類数やそのヴァラエティーが十分対応できない場合には，市場均衡は最適性ないしは効率性を満たしえないことを示すものであり，これは序論的な考察でも述べたように，不確実性という要因が公共財や外部性といった現象の存在とともに市場の失敗ないしは欠落性の一要因たりうることを立証したものといいうるであろう。一般に資産市場は不完備であるのが現実であるから，これはまた政府が新たな資産市場を開発するとか不確実性の範囲を縮小するとかいった手段を講ずることによって，市場のパフォーマンスを改善する余地のあることをも意味するのである。（完）

（名誉教授）
（経済学部教授）