増澤拓也君学位授与報告

報 告 番 号	甲第 2522 号
学 位 の 種 類	博士（経済学）
授与の年月日	平成 18 年 3 月 23 日
学位論文題名	Strategic Analyses of Games with Coalitions (提携を考慮したゲームの戦略的分析)

内 容 の 要 旨

この論文は，一つの共著論文を含む，著者の三つの論文をもとに，著者の研究をまとめたものである。戦略形ゲームの性質を調べる事によって，経済モデルでの協力解「コア」の構造を調べるのが，本研究の主題である。

コアとは，どのような提携または個人も独力で自分達の利得を改善することができない，利得配分の集合である。そのような利得配分を達成できるのかという事が問題となる。そのような問いに対し，(1) どのような時にモデルの中にそのような利得配分が存在するのか，(2) どのような場合，そのような利得配分を現実的な時間内に探すことができるのか，という観点からの数学的な研究がこれまでに多くなされてきた。本研究も，その中の一つと位置づけることができる。

コアの数学的研究の，代表的な一方向として，各提携が独力で獲得できる利得を表現した提携形のゲームの構造に関する研究がある。本研究では，より詳しい情報を表現する戦略形ゲームの数学的構造に焦点をあてる。戦略形ゲームは，各人の行動を明確に表現できるという利点があり，コアの研究に対しては，別の角度からその非空条件を求めること，コアを達成する行動の組を特徴づけることなどが期待される。また，コアに含まれる元の計算に関しては，戦略形ゲームを入力と考える理論は，提携形ゲームを入力と考える場合よりも，望ましいものと考えられる。前者のほうがより直接的で原初的な情報を表しているからである。

本論文での主な目的は，戦略形ゲームのクラス「懲罰優位関係に関して完備なゲーム」を定義し，その α-コアが非空であることを示し，さらに，その α-コアを与える戦略を計算する効率的なアルゴリズムを示す事にある。また，それに先立って，概念上の整理を行っている。

本論は，四つの章からなる。第 1 章については，以上に述べた方法論の説明に割かれる。第 2 章の前半は，戦略形ゲーム，提携形ゲームの定義，戦略形ゲームから如何にして提携形ゲームを導くかなど，先行研究で確立されている基礎概念の説明に当てられている。第 2 章の後半は，譲渡可能効用が想定される状況とされない状況の違いを，戦略形ゲームの観点からまとめている。譲渡可能効用の想定とは，広義には戦略形ゲームに直接記述される行動の他に，プレーヤー間で合成財の再配分を行いうるという想定であり，狭義には，それに加え，各プレーヤーの効用が戦略形ゲームに記述された利得と合成財の消費量との和によって表すことができるという想定である。

独力で獲得できる利得をどのように定義するかについては，二つの考え方が確立されている。一つは，提携外のプレーヤーの行動に依存せずに自分達の戦略を選ぶ事によって獲得できる利得とする α-型提携形の考え，いま一つは提携外のプレーヤーの戦略に応じて自分達の戦略を選ぶことによって確保できる利得という β-型提携形の考え方である。本論文では，さらに，譲渡可能効用が想定される場合には，合成財の交換が相手の戦略に応じて行われるのか否かに応じて，数種類の提携形のゲームの定義がありうることを示した。

譲渡可能効用が想定されているか否か，また想定されている場合について，合成財の交換が提携外のプレーヤーの行動に応じて行われるのか否かによって，コアの非空であるか否かの結論は異なり，その意味でこれらの問題は無視できないものである。本論文では，特に，ゴミ処理ゲームについて，そのような事態が発生することを例証している。ゴミ処理ゲームとは，各人が自分の持っているゴミを自分の土地または他のプレーヤーの土地に選択して捨てるというゲームであり，Shapley and Shubik (1969) によって提唱されたゲームである。ここでは，合成財の交換が提携外のプレーヤーの行動に応じて行われる場合にコアが空になるという Shapley and Shubik の結論が，合成財の交換が提携外のプレーヤーの行動に依存せずに行われる場合には必ずしも成り立たなくなる事を示した。また，合成財の交換が認められない場合には，逆に，コアが常に非空になる事を示した。

第 2 章の最後では，一般には一致しない合成財の交

換を許したゲームの様々な提携形ゲームを一致させる十分条件を指摘している。α-コアと β-コアが一致する条件として Nakayama (1998) によって提唱された優位懲罰戦略の存在が，その条件である。

第 3 章では，懲罰優位関係について完備なゲームの α-コアの非空性とその他の基本的な性質が取り上げられる。今，あるプレーヤーの戦略 x が別の戦略 y に対し懲罰優位にあるとは，戦略の y から x への変更は，他のプレーヤーが何を選んでいるかによらず，彼らのうちのどのプレーヤーの利得をも増加させることがないことをいう。懲罰優位関係について完備なゲームとは，文字通り，任意のプレーヤーの任意の 2 つの戦略が懲罰優位関係をもつようなゲームである。言うまでもなく，懲罰優位関係とは，優位懲罰戦略の概念の拡張である。

経済学上，よく知られた多くのモデルが，この条件を満たすことが示される。一つは，寡占市場に関するモデルであり，もう一つは公共財に関するモデルである。クールノーによる寡占市場のゲームの場合，ある企業の産出量の増加は，所得効果を無視できる情況では，必ず市場の価格を減少させ，他の企業の収入ひいては利潤を減少させる。産出量の大小関係は，懲罰優位関係を意味するということである。この様な事情は，ベルトランの価格競争モデルにおいても同様である。粗代替性が成立する情況においては，ある企業の価格の引き下げは，他の企業の商品の売り上げを減少させる。もう一つの顕著な例は，1 種類の公共財に対する自発的供給ゲームである。この場合，あるプレーヤーの公共財生産の為の私的財投入量の増加は，産出される公共財の量の増加を通じて，他のプレーヤーの効用を一様に増加させる。

この論文では，まず，このクラスのゲームから導かれる α-型提携形ゲームは β-型提携形ゲームと一致し，平衡性をみたし，かつ序数的に凸であることが示される。平衡性をみたすゲームは非空なコアを持つという Scarf (1967) による結果，または，序数的に凸であるゲームは非空なコアをもつという Greenberg (1985) による結果から，このゲームのコアが非空であることが導かれる。さらに，本論文では，このゲームの任意の順序に対する限界貢献ベクトルが，コアに含まれることを示した。譲渡可能効用をもつゲームについては，ゲームが凸であることは，限界貢献ベクトルがコアに含まれる事の必要十分条件であることが，Ichiishi (1981) によって示されているが，譲渡可能効用を想定しないゲームについては，必要条件でも十分条件でもないことが知られている。つまり，このクラスのゲームから導かれる，NTU 提携形ゲームは，平衡性，序数的な凸性，かつ限界貢献ベクトルがコアにふくまれるという，独立な 3 つの性質をすべて満たすことが示される。

同型式の命題としては，Scarf (1971) の定理が知られている。各プレーヤーの戦略の集合が凸であり，その利得関数が戦略集合の直積空間において準凹であれば，その戦略形ゲームの α-型提携形ゲームは非空なコアをもつ。利得関数が戦略集合の直積において準凹であるという仮定を，自然に満たすようなゲームのクラスは決して多くはない。また，戦略の集合が凸であるという仮定は，次章で扱うような有限の分析にはなじまない。反対に，懲罰優位関係についての完備性は，それを自然に満たす意味あるクラスが存在する，有限の分析に適用できるなどの特徴をもつ。

第 4 章の主題は，懲罰優位関係について完備なゲームの α-コアの元を求める効率的なアルゴリズムを与える事にある。任意の戦略の組に関する効用関数の評価，懲罰優位関係に関して後続の元を探す操作をそれぞれ 1 ステップと考えた場合に，そのアルゴリズムは，どのようなゲームに対しても $(L * |N|^2 \cdot \sum_{i \in N} |X^i|)$ 回のステップで終了する。ここで，N は，プレーヤーの集合，X^i はプレーヤー i の戦略の集合，L はある正の定数である。

効率的なアルゴリズムの鍵となるのは，以下に説明する最適化問題が効率的に解くことが出来ること，および，本論文で定義される縮小ゲームの性質である。まず，ここで言う最適化問題とは次のような問題である。

次のような条件をみたす戦略の組 x のうち，懲罰優位関係の直積についての最大元を求めよ：

$$x_i = d_i \quad \text{or} \quad u_i \quad (x) \geq a_i \quad \text{for all } i \in N.$$

ただし，d_i は優位懲罰戦略を表し，a は任意の利得ベクトルである。

この問題の解が必ず存在して，それが比較的単純なアルゴリズムによって求められることが示される。

縮小ゲームの性質とは，上に述べた最適化問題と深く関わる。まず，ある提携 S の「部分ゲーム」$G(S)$ を提携外のプレーヤーの戦略を全て d_i に固定する事によって得ることのできるプレーヤーの集合が S であるようなゲームとする。一方，ある提携 $N \backslash S$ と S の利得ベ

クトル a^s に関する「縮小ゲーム」$G_*(N\backslash S, a^s)$ は，プレーヤーの集合が $N\backslash S$ であって，戦略の組 $y^{N\backslash S}$ に対して，利得が $u_i(x^s y^{N\backslash S})$ によって与えられる戦略形ゲームと定義される。但し，ここで x^s は，つぎの条件

$$x_i = d_i \quad \text{or} \quad u_i \quad (x^s, y^{N\backslash S}) \geq a_i \quad \text{for all } i \in S.$$

をみたす戦略の組のうち，懲罰優位関係の直積についての最大元であり，$y^{N\backslash S}$ に応じて決まるものである。

さて，本論文では，次の事が示される。S の部分ゲームとその α-コアに含まれるベクトル a が与えられたとき，

(1) 上に述べたアルゴリズムをうまく繰り返す事によって，計算量を押さえたまま，S の何らかの部分提携 $T, F := G_*(N\backslash S, a^S)$ の部分ゲーム $F(T)$，$F(T)$ の α-コアの元 a^T を探し出すことができる。

(2) さらに，(a^T, a^S) は，元のゲームの部分ゲーム $G(T \cup S)$ の α-コアに含まれる。

この2つの性質より，よりプレーヤーの数の多いゲームの α-コアの元を構成し，最終的に元のゲームの α-コアの要素を得るというのが，アルゴリズムの概要である。

第4.5節では，このアルゴリズムで得ることの出来る元の性質を説明している。特に与えられた，利得ベクトルが α-コアに含まれない場合，その元を支配するようなコアに含まれる元を探し出していることが指摘される。このような利得ベクトルの存在は，Peleg (1986) によって示されているが，本論文では，その効率的な計算も可能であることを示した。

第4章の最後には，一人あたり16個の戦略をもつ20人ゲームの数値計算を行っている。このことによって，現段階でも少なくとも，数値例を十分に短い時間で解けるだけの性能は持つことが示されている。

論文審査の要旨

増澤拓也君の論文 "Strategic Analyses of Games with Coalitions" は，提携行動を伴う戦略形ゲームのコアに関するいくつかの新しい結果を提示するものである。とくに，各プレイヤーの戦略集合が懲罰優位 (punishment dominance) と名付けた関係をもつゲームのクラスを定義し，そのゲームから誘導される α-NTU ゲームの凸性と α コアの性質，および α コアを計算するアルゴリズムを与えている。

ゲームの表現形式のうち，戦略形と呼ばれる形式は，各プレイヤーの利得が直接に他のプレイヤーの戦略にも依存して決まることを明示的に記述する表現形式であり，経済学でいう外部性を特殊ケースとして含んでいる。そのため，市場経済の分析だけでなく，公共経済や環境経済などへの応用の可能性をもったゲーム・モデルであるが，ここで考察しているゲームは，さらにプレイヤー達が提携を形成して行動することを許す戦略的協力ゲームと呼ばれる形式であり，より広い範囲をカバーしうるものである。増澤君の主要な貢献は，まずこの領域の基礎理論として懲罰優位関係を導入し，この関係をもつゲームが初等的な TU 協力ゲーム理論ではよく知られている凸性という重要な性質をもつことを示したこと，さらに，このクラスのゲームの構造を利用して，コアに到達する効率的なアルゴリズムを開発したことにある。

凸ゲームは，経済学的には雪だるま効果とかバンド・ワゴン効果を表現していると解釈される興味深いゲームであり，必然的にコアをもつことが知られているが，本論文の結果は，利得関数の準凹性と戦略集合の凸性を前提とする Scarf (1971) による基本的な α コアの存在定理とは独立である。また，α-NTU ゲームの凸性という性質が，戦略集合の構造から生じうることを示したのは本論文が最初である。このほかにも，廃棄物処理ゲーム (garbage disposal game) と名づけた戦略的協力ゲームの α-NTU コアが空でないという新しい結果も証明している。

以下，各章の内容をより詳細にみていこう。本論文は4章から構成されている。

第1章 "Strategic Aspects of Cooperative Games" では，本論文で展開する戦略的協力ゲームによるアプローチと，非協力ゲームの経済学的応用の方法論的基礎であるナッシュ・プログラムの違いに留意して，分析の目的と方法，およびその意義について述べている。

第2章 "Coalitional Form and Strategic Form" では，戦略的協力ゲームの基礎概念の準備といくつかの命題を証明している。プレイヤー間での利得の移転を許す TU ゲームと，それを許さない NTU ゲームについて，平衡ゲームがコアをもつことを述べる Bondareva (1962), Shapley (1967) の定理と Scarf (1967) の定理，TU または NTU 凸ゲームの定

義と諸性質，NTU 提携形ゲームの導出，別払い（side payments）を伴う戦略形ゲームの定義と提携形ゲームへの変換，さらに，廃棄物処理ゲーム（garbage disposal game）および優位懲罰戦略とコアの関係などについて述べている。

廃棄物処理ゲームとは，Scarf（1971）の純粋交換ゲーム（pure exchange game）において，財をバッズに，効用関数を単調減少関数に置き換えて得られる戦略形ゲームである。本章で証明されている命題 1 と 2 は，このゲームのコアが空でないことを述べる新しい命題である。前者は，別払いを伴う戦略形ゲームとして定式化すると，その ex-ante α-提携形ゲーム，すなわち，別払いを先に行う α-提携形ゲームは，効用関数が凹ならば平衡ゲームとなること；さらに後者は，別払いを伴わない α-NTU ゲームに変換すれば，効用関数が単調減少関数である限りそれは平衡ゲームとなることを述べるものである。これらはいずれも，ex-post に別払いを実行できる場合に相当する Shapley and Shubik（1969）の古典的結果と異なる興味深い結果であり，とくに後者は，Mathematical Social Sciences 誌に掲載予定の Hirai, Masuzawa and Nakayama の共著論文 “Coalition-Proof Nash Equilibria and Cores in a Strategic Pure Exchange Game of Bads” の主要定理のひとつである。

以上のように，第 2 章は，戦略的協力ゲームの諸概念についてのサーベイとともに，このクラスのゲームに対する新しい貢献をも含んでいる。

第 3 章 “Games with Punishment-Dominance Relations” では，懲罰優位関係をもつ戦略的協力ゲームの分析を行っている。

プレイヤー i の戦略 x^i と y^i について，x^i が y^i よりも弱い意味で懲罰優位であるとは，プレイヤー i が x^i を選べば y^i を選んだ場合よりも，他のすべてのプレイヤーの利得が，彼らのいかなる戦略のもとでもつねに一斉に小さくなるかまたは等しいことと定義される。この関係は，反射的かつ推移的であるが，各プレイヤーの戦略集合上でこれがさらに完備となるゲームが本章での考察の対象である。この条件を PD（Punishment Dominance）と呼んでいる。条件 PD は，たとえば 1 国の温暖化ガスの増加が，地球全体の温暖化を促進し全般的な損害をもたらすというような関係を抽象化したものであり，最近の文献にしばしば現われる単調外部性（monotone externality）は，その特殊ケースである。

まず，PD をみたす戦略形ゲームから誘導される α-NTU ゲーム V_α の基本的性質として，

$$V_\alpha(S) \cap V_\alpha(T) \subset V_\alpha(S \cup T), \quad \text{for all} \quad S, T \subset N$$

であることが導かれる。α-NTU ゲーム V が序数的に凸（ordinally convex）であるとは，$V(S) \cap V(T) \subset V(S \cup T) \cup V(S \cap T)$, for all $S, T \subset N$ となることであるから，この基本的性質によって，ゲーム V_α は序数的に凸となる。これが本章での最初の結果（定理 7）である。さらに，NTU ゲーム V が平衡ゲームであるとは，任意の平衡集合族 B に対して，$\cap_{S \in B} V(S) \subset V(N)$ が成立することであるから，再び基本的性質を有限回適用することにより，ゲーム V_α は平衡ゲームであることが示される（定理 9）。また，より専門的な性質として，ゲーム V_α は限界的に凸（marginally convex）であることも証明されている（定理 8）。これは，各プレイヤーの限界的貢献を表す利得ベクトルがコアに属することを意味する結果である。TU 凸ゲームは限界的凸性をもつが，NTU ゲームでは，序数的凸性は限界的凸性を意味するとは限らない。しかし，戦略集合がコンパクト位相空間で利得関数が連続ならば，懲罰優位性は，序数的凸ゲーム V_α を限界的凸ゲームにすることをこの定理は述べている。以上の結果は，利得関数の準凹性も戦略集合の凸性も仮定せずに成立する。

懲罰優位性は，各プレイヤーの戦略集合に特殊な構造を要求するものであるが，この条件 PD をみたす経済学上の具体的ゲームは少なくない。本章では，基礎理論の展開の後，Shelling（1973）による n 人囚人のジレンマ，単一の公共財供給ゲーム，クールノー寡占ゲーム，ベルトラン寡占ゲーム，共同利用施設ゲームなどについて，条件 PD がみたされることを確かめている。

なお，本章の結果は International Journal of Game Theory, vol. 32（2003）に掲載された単著論文 “Punishment Strategies Make the α-Coalitional Game Ordinally Convex and Balanced” に基づいている。

第 4 章 “Computation of Cores of Games with Punishment-Dominance Relations” では，条件 PD をみたす有限ゲームのコアに到達するためのアルゴリズムが与えられている。文献では，一般のクラスのゲームに対する Scarf（1967）のアルゴリズムが

知られているが，これはコアの存在証明のためのものであり，計算量（computational complexity）に対する考察を含むものではない。実際，計算量はプレイヤーの人数の増加に伴い指数関数的に増大する。しかし，本章で与えられているアルゴリズムの計算量は，プレイヤーの数の 2 乗と全プレイヤーの戦略の総数との積のオーダーであり，十分に実用に耐えるものである。

提案されているアルゴリズムは，基本的に Greenberg (1985), Peleg (1986) によって与えられている NTU ゲームの縮小ゲーム（reduced game）の性質に基づいて創られたものである。この性質を用いれば，PD をみたすゲームにおいては，部分ゲーム $G(N\text{-}S)$ のコアに属する利得ベクトル $a^{N\text{-}S}$ と，対応する縮小ゲーム $G^*(S, a^{N\text{-}S})$ の部分ゲーム $F(T)$ のコアに属する利得ベクトル a^T を合成して得られる利得ベクトル $(a^T, a^{N\text{-}S})$ は，ゲーム $G(T \cup (N\text{-}S))$ のコアに属することが証明できる。それゆえ，利得ベクトル $a^{N\text{-}S}$ と a^T を探し，a^T を拡張して縮小ゲーム $G^*(S, a^{N\text{-}S})$ のコアに属する利得ベクトル a^S を構成することができれば，利得ベクトル $(a^S, a^{N\text{-}S})$ はもとのゲーム G のコアに属することになる。このような見通しのもとで，前者の仕事を実行するアルゴリズム 1 と，後者の仕事を実行するアルゴリズム 2 および 3 が巧妙に構成され，一連の定理を証明することによって当初の目的を達成している。

このアルゴリズムは，最初に入力された利得ベクトルがコアに属さないならば，それを支配する利得ベクトルをコアの中に探し出し，その利得ベクトルとこれを実現する提携を出力する。これは，NTU 凸ゲームのコアは，Neumann and Morgenstern による安定集合であるという Peleg (1986) の定理を忠実に反映するものである。また，対称戦略（symmetric strategy）と定義された戦略による利得ベクトルが入力されれば，コアの中のある対称戦略利得ベクトルが出力される。凸ゲームのコアが大きいことを考慮すれば，これはこのアルゴリズムの利点を表わしている。さらに，アルゴリズムに軽微な修正を施せば，限界貢献利得ベクトルを出力させることができる。限界貢献利得ベクトルがコアに属することは，第 3 章で得られた結果の一つであり，さらに出発点が戦略形ゲームであることに注意すれば，これもこのアルゴリズムの利点であると言える。最後の節では，各プレイヤーが 16 個の戦略をもつ 20 人ゲームを数値例として計算している。計算は，マイクロソフト・エクセルによって実行されており，このアルゴリズムの実用性を確認することができる。

このように，本章は Greenberg（1985）と Peleg（1986）の定理を巧みに応用し，コアに到達する独創的なアルゴリズムを提示しており，ゲーム理論とともに計算理論にも習熟していることをうかがわせる。本章の内容は，現在，専門誌に投稿中である。

以上のように，本論文は，戦略的協力ゲームと呼ばれるゲームのクラスにおいて，懲罰優位性と名付けた概念の定式化，誘導される NTU ゲームの序数的凸性と平衡性およびコアの性質と経済学的応用，さらに，コアの計算アルゴリズムの考案を主たる貢献とするものである。これらはいずれも新しい結果であり，とくに，凸ゲームの戦略的構造を部分的に明らかにした貢献は大きい。経済学的には，懲罰優位性という戦略的構造が公共財や共同利用財などの問題の本質に関わっており，ゲームの凸性により，協力者の増加がこれらの問題の解決に加速度的に効果をもたらすことを意味している。増澤君の論文は，こうして，厳密な基礎理論に対する貢献であると同時に，解の計算を含む経済学上の具体的応用をも視野に入れたものである。よって審査委員会は増澤君の論文を博士（経済学）の学位に十分に値するものと判断する。

参考文献

Champsaur, P., (1975), How to Share the Cost of Public Goods?, *International Journal of Game Theory, 4,* 113–129.

Greenberg, J., (1985), Cores of Convex Games without Side Payments, *Mathematics of Operations Research, 10,* 523–525.

Hirai, T., Masuzawa, T., and Nakayama, M., (2004), Credible Deviations and Retaliations in a Class of Strategic Games, *KUMQRS Discussion Paper Series 2004–012,* Keio University.

Ichiishi, T., (1981), Super-Modularity: Applications to Convex Games and to the Greedy Algorithm for LP, *Journal of Economic Theory, 25,* 283–286.

Masuzawa, T., (2003), Punishment Strategies Make the α-Coalitional Game Oridinally Convex and Balanced, *International Jour-*

nal of Game Theory, 32, 479–483.
Masuzawa, T., (2005), Computation of Cores of Strategic Games with Punishment-Dominance Relations. mimeo. (A revised version of the paper of the same title: Masuzawa, T., (2004), KES Discussion Paper GS 04–01. Keio University)
Nakayama, M., (1998), Self-Binding Coalitions, *Keio Economic Studies, 35*, 1–8.
Peleg, B., (1985), An Axiomatization of the Core of Cooperative Games without Side Payments, *Journal of Mathematical Economics, 14,* 203–214.
Peleg, B., (1986), A Proof That the Core of an Ordinal Convex Game is a von Neumann-Morgenstern Solution, *Mathematical Social Science, 11,* 83–87.
Scarf, H., (1967), The Core of an N-person Game, *Econometrica, 35,* 50–69.
Scarf, H., (1971), On the Existence of a Cooperative Solution for a General Class of *N*-Person Games, *Journal of Economic Theory, 3,* 169–181.
Shapley, L.S., and Shubik, M., (1969), On the Core of an Economic System with Externalities, *American Economic Review, 59,* 678–684.
Vilkov, V.B., (1977), Convex Games without Side Payments, *Venstnik Leningradskiva University, 7,* 21–24 (in Russian).
Von Neumann, J., and Morgenstern, O., (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton: Princeton University Press.

論文審査担当者
主査　中村　慎　助（慶應義塾大学教授（経済学部）Ph.D.）
副査　中山　幹　夫（慶應義塾大学教授（経済学部）理学博士）
副査　船　木　由喜彦（早稲田大学政治経学部教授　理学博士）

学力確認担当者
須　田　伸　一（慶應義塾大学教授（経済学部）Ph.D.）
グレーヴァ香子（慶應義塾大学助教授（経済学部）Ph.D.）

追記：壽里　竜君ならびにチョイ，イー ケエヨン君の学位授与報告は，本来ならば 98 巻 2 号に掲載する内容でしたが，99 巻 2 号に掲載となりました。