慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	主体の測度空間をもつ厚生経済モデルと変分問題
Sub Title	A variational problem associated with a model of welfare economics with a measure space of agents
Author	Ioffe, Alexander(Ioffe, Alexander) 丸山, 徹(Maruyama, Toru)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2006
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.98, No.4 (2006. 1) ,p.663(117)- 682(136)
JaLC DOI	10.14991/001.20060101-0117
Abstract	消費者と生産者から成る経済主体がひとつの測度空間(T, Σ, μ)を形づくる経済を考える。消費者tの, 各消費xに対する選好を表現する実数値函数φ(t, x)に基づいて定義される正規非線形積分核f(t, y) とベクトルa が与えられたとき, (P) {Minimize ∫T f(t, y(t))dμ subject to ∫T y(t)dμ = a をオーマン-ペルレスの変分問題と称する。 問題(P)に解が存在するならば, この解に対応する配分はパレート最適となる。 問題(P)の解の存在条件を調べるために V (a) = inf {∫T f(t, y(t))dμ : ∫Ty(t)dμ = a } とし, V (a) に対するフェンシェルの共役変換をS*(p), 第二共役変換をS(a)として, 次の条件を考える。 （ a ） a ∈ ∂S*(p) を満たすpが存在する。 （ b–1 ） このp はdom S* の内点である。 （ b–2 ） このp はdom S* の内点ではない。 （ a ）, （ b–1 ）の下においては問題（ P ）に解が存在し, パレート最適な均衡が存在する。しかし（ a ）, （ b–2 ）の組み合せの下では, 問題(P)の解や均衡の存在は保証されず, 「一般化された変分問題」と「擬似均衡」の存在が確認されるにとどまる。さらに条件（ a ）および（ b–1, 2 ）が成り立つための, 経済的十分条件も究明される。 問題(P)の制約条件にあらわれる等号"="を不等号"≦"に変えた場合の存在証明にも, フェンシェルの共役変換と劣微分を活用する新しい方法を呈示する。
Notes	小特集 : 経済の数理解析
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20060101-0117

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

「三田学会雑誌」98 巻 4 号（2006 年 1 月）

主体の測度空間をもつ厚生経済モデルと変分問題*

アレクサンダー・イオッフェ
丸　山　　徹　訳

要　　旨

消費者と生産者から成る経済主体がひとつの測度空間 (T, Σ, μ) を形づくる経済を考える。消費者 t の，各消費 x に対する選好を表現する実数値函数 $\varphi(t, x)$ に基づいて定義される正規非線形積分核 $f(t, y)$ とベクトル a が与えられたとき，

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} \text{Minimize} & \int_T f(t, y(t))d\mu \\ \text{subject to} & \int_T y(t)d\mu = a \end{cases}$$

をオーマン–ペルレスの変分問題と称する。

問題（P）に解が存在するならば，この解に対応する配分はパレート最適となる。

問題（P）の解の存在条件を調べるために

$$V(a) = \inf\left\{\int_T f(t, y(t))d\mu : \int_T y(t)d\mu = a\right\}$$

とし，$V(a)$ に対するフェンシェルの共役変換を $S^*(p)$，第二共役変換を $S(a)$ として，次の条件を考える。

（a）$a \in \partial S^*(p)$ を満たす p が存在する。
（b–1）この p は $\mathrm{dom}\, S^*$ の内点である。
（b–2）この p は $\mathrm{dom}\, S^*$ の内点ではない。

（a），（b–1）の下においては問題（P）に解が存在し，パレート最適な均衡が存在する。しかし（a），（b–2）の組み合せの下では，問題（P）の解や均衡の存在は保証されず，「一般化された変分問題」と「擬似均衡」の存在が確認されるにとどまる。さらに条件（a）および（b–1, 2）が成り立つための，経済的十分条件も究明される。

問題（P）の制約条件にあらわれる等号 “=” を不等号 “≦” に変えた場合の存在証明にも，フェンシェルの共役変換と劣微分を活用する新しい方法を呈示する。［丸山 記］

キーワード

パレート最適，均衡，オーマン–ペルレスの変分問題，劣微分，フェンシェルの共役変換

---

* ［本稿は，*Advances in Mathematical Economics*, 8(2006), Springer-Verlag Tokyo, pp.297-314 に英文で掲載された原論文を出版社の許可を得て翻訳したものである。原題 “A Variational Problem Associated with a Model of Welfare Economics with a Measure Space of Agents”.——編者］

本研究の一部は US-Israel Binational Fund under the grant 2000157 による助成を受けた。

1. 序

ヒルデンブラントの厚生経済学のモデルは，主体が測度空間を成すことを想定するもので，本論文ではある形でこのモデルを考察しよう（たとえば [14] 参照）。すなわちここでは選好を表現する指標がある「効用」函数を用いて定義される。「効用」という言葉をかぎ括弧で囲んだことにはふたつの理由がある。第一のそして主たる理由は，選好の序列が依然として第一義的な関心の対象であるためである。効用函数は基本的には選好の序列を表現するひとつの手段と考えられており，そのような役割を果たすものとしては同一の劣位集合をもつ他のいかなる函数ともとりかえることができるのである。第二の理由は技術的なことである。つまりここでは便宜上，選好と表わす集合を効用函数の狭義の劣位集合として定義し，数理経済学の文献で通常なされているように，優位集合として定義する方法を採らない。一般的な経済理論では，選好が効用函数によって定義されるという前提はかなり限定的と考えられている。しかしながら，効用函数の存在を仮定することにより，モデル研究に一層強力な数学的手段を利用し，結局より豊かな諸結果を獲得する可能性が開かれるのである。

この点はおもに，効用函数を用いる場合にはパレート最適性がある種の変分問題と密接な関連を有し，それを凸解析の手法によって有効に研究することができるという，長きにわたって知られた事実によるのである（たとえば [3，2]）。しかし，この型の問題については，いくつかの強力な結果 [16，17] があって，それはまだ経済学のモデルに適した形に調整され，応用されてはいないように思われる。

一方において，これらの結果からは，（かなり一般的な）存在定理とともに，モデルのパレート最適および均衡価格の双方を計算する単純なアルゴリズムを導き出すことができる。他方，この変分問題の解析をつうじて，経済モデルの設定では，無視できるほど小さな消費者の結託が，利用可能な財のかなり大きな部分を獲得する可能性をもった「均衡」とみなしうる，ある一般的解の発見へと導かれるのである。専ら選好の序列のみによって規定される通常の均衡とちがって，一般的均衡は効用函数の選択に依存する可能性がある。

この変分問題は次節において導入し，詳しく議論することにしよう。そしてここでは，われわれの注目の焦点となる経済学のモデルをまず描写しておかねばならない。**経済主体から成る測度空間** (T, Σ, μ) が与えられたものとし，それは互いに共通部分をもたないふたつの部門，つまり**消費者**の部門 T_c と**生産**部門 T_p の合併であるとする。測度 μ は有限であること，つまり $\mu(T) < \infty$ を仮定する。$X(t)$ は T から $\mathbb{R}^n$ への，**配分**の範囲を表わす集合値写像，$P(t, x)$ は X のグラフ $\mathrm{Graph}X$ から $\mathbb{R}^n$ への選好を表わす集合値写像で，T の殆どすべての点において，$P(t, x) \subset X(t)$ がすべての $x \in X(t)$ で成り立つ。また $\bar{a}$ は初期保有量ベクトルである。

X と P には標準的な可測性の仮定（つまり X のグラフが直積代数 $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$ に属することなど）を課すこととし，また X は閉値であるとする。われわれの主要な仮定は次のとおりである。

（A_1）正規非線形積分核[(1)] $\varphi(t,x)$ が存在して，それは $X(\cdot)$ のグラフ上で有限の値をとり，また任意の $x\in X(t)$ に対して

$$P(t,x)=\{u\in X(t):\ \varphi(t,u)<\varphi(t,x)\}$$

を満たすという意味での**選好の序列**を表現しているものとする。

（A_2）任意の $(t,x)\in \mathrm{Graph}X$ に対して，$P(t,x)=\emptyset$ であるか，または

$$\{u\in X(t):\ \varphi(t,u)\le\varphi(t,x)\}=\overline{P(t,x)}.$$

（ここでバーは閉包を表わす。）消費者 t の**飽和消費**の集合を $M(t)$ で表わす。これは φ が P を表現するとき，$\varphi(t,\cdot)$ がその絶対最小値をとる x の集合である。$x\in M(t)$ に対して，定義により

$$\overline{P(t,x)}=M(t).$$

（A_3）μ の T_c への制限は原子をもたない。また $t\in T_p$ が原子である場合，$X(t)$ は凸集合。

t が消費者であるか生産者であるかにかかわらず，$X(t)$ には他のいかなる凸性の要請も課せられていないことを強調しておこう。

（A_3）から導かれる事実として，集合

$$X_c=\int_{T_c}X(t)d\mu,\quad X_p=\int_{T_p}X(t)d\mu$$

は凸である。（ベクトル測度に関するリャプーノフの定理による。）

通常のとおり，

$$x(t)\in X(t)\quad \text{a.e.};\quad \int_{T_c}x(t)d\mu=\bar{a}+\int_{T_p}x(t)d\mu.$$

が成り立つとき，$x(t)$ は**実現可能な配分**と呼ぶ。

実現可能な配分 $x(t)$ がこの**モデルのパレート最適**であるというのは，他のいかなる実現可能な配分 $u(t)$ についても

―― $\varphi(t,u(t))\ge\varphi(t,x(t))$ a.e. on T_c,

――あるいは T_c の正の測度をもつ部分集合上で

$\varphi(t,u(t))>\varphi(t,x(t))$

のいずれかの成り立つことをいう。

---

(1) 「正規非線形積分核」（normal integrand）とは (t,x) の函数として標準的な意味で可測で，しかも x の函数として下半連続な，拡大された実数に値をとる函数を意味することを思い出しておこう。

次に [14] に従って，ある価格ベクトルに対応する擬似均衡および均衡の概念を定義しよう。すなわち $p \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，実現可能な配分 $x(t)$ が，殆どすべての $t \in T_c$ に対して

$$p \cdot w \geq p \cdot x(t),\ \forall\, w \in P(t, x(t)),$$

また殆どすべての $t \in T_p$ に対して

$$p \cdot w \leq p \cdot x(t),\ \forall w \in X(t).$$

を満たすとき，$x(t)$ は p についての**擬似均衡**であるという。これに加えて，本当に不等式

$$p \cdot w > p \cdot x(t),\ \forall\, w \in P(t, x(t))$$

が成り立つとき，$x(t)$ は p についての**均衡**と呼ばれる。

既に述べたように，件の変分問題は [16, 17] の関連する主要な結果および若干の文献上のコメントとともに，次節において導入される。第三節では，ひとつの例示としてオーマンおよびペルレス [3] によって考案された問題を吟味し，（若干の一般的な仮定の下に）解の存在定理が §2 に提示された主要な結果のひとつからいかにして導かれるかを示そう。§4 では，消費および選好の指標のどの性質が，§2 の定理の条件を満足する効用函数表現の存在を許すのか，この問題を論じよう。この節の結果から，通常の，および「一般化された」型のパレート最適均衡配分の存在に関する新しい諸定理が導かれるように思われる。最後に §5 では，「一般化された均衡」の概念を導入し，ひとりそのような均衡の存在だけが選好の序列を表現する効用函数の選択に依存しない安定的な現象たりうることを示そう。

いくつかの有益なご批評を賜った M.A. カーン氏と N.C. ヤネリス氏に感謝の意を表する。

2. 変分問題

P を表現するすべての正規非線形積分核 φ に対して，$T \times \mathbb{R}^n$ 上のいまひとつの函数を対応させることができる。つまり

$$f(t,x) = f_\varphi(t,x) = \begin{cases} \varphi(t,x), & \text{if } = t \in T_c,\ x \in X(t); \\ 0, & \text{if } t \in T_p,\ x \in -X(t); \\ \infty, & \text{if } t \in T_c,\ x \notin X(t); \\ \infty, & \text{if } t \in T_p,\ x \notin -X(t). \end{cases}$$

すると f はやはり正規非線形積分核で，φ を f で置き換えれば(A_1)，(A_2) が明らかに成り立つ。

そのような各 f について，次の問題を考えよう。

$$
(\mathsf{P}_\varphi)\qquad
\begin{aligned}
&\text{minimize} && \int_T f(t, y(t))d\mu,\\
&\text{s.t.} && \int_T y(t)d\mu = \bar{a}.
\end{aligned}
$$

以下においては，しばしば添字 φ を省略する。

次の命題が成り立つのは明白である。

命題 1. （A_1），（A_2）を仮定する。 $\bar{y}(t)$ が (P) の解であるならば，

$$
\bar{x}(t) = \begin{cases} \bar{y}(t), & \text{if} \quad t \in T_c; \\ -\bar{y}(t), & \text{if} \quad t \in T_p \end{cases}
$$

を以って定義される $\bar{x}(t)$ はモデルにおけるパレート最適である。

証明　証明はもちろん初等的である。検討しなければならない唯一の点は，$x(t)$ が (P) おける許容函数であるときには必ず

$$
x(t) = \begin{cases} y(t), & \text{if} \quad t \in T_c; \\ -y(t), & \text{if} \quad t \in T_p \end{cases}
$$

が実現可能な配分となること，それだけであろう。 □

（P）のような変分問題は，数理経済学では長きにわたって知られている。f に対する特殊な仮定の下で，このような問題は [3，4，20] において考察された。これらはまた，そのほかの多くの応用との関連でも現れている。(たとえば数理物理 [8]，線形システムの最適制御 [1，17])。ロシアの文献では，この型の問題は通常**リャプーノフ問題**と呼ばれ，われわれもこの用語に従うことにしたい。

$T = [0, 1]$, μ をルベーグ測度としたときのリャプーノフ問題の広範な研究は [16] および [17] に含まれている。しかし [16，17] の証明法を，たとえば以下の定理 1，2 におけるような一般的な状況に持ち込むことは容易であり，この拡張は [15] で開発された劣微分の理論に基づいて行なわれる（[17] の 8.3 節をも見よ）――詳細については他の機会に発表することにしたい。いくつかの理由で，これらの研究は殆ど知られぬままであった。いずれにせよ，リャプーノフ問題に捧げられたその後の多くの著作（たとえば [2，6，7，11，12，13，18，19]）において，解の存在，最適性の必要／十分条件に関する諸成果が，[16，17] の結果から，あるいは同種の議論の援用により，困難なく得られているのである。これはまた，形式的にはリャプーノフの形で述べることのできない問題に関するいくつかの結果についても適用できる。たとえば [5，9] のような問題がその例である。さらに [16，17] で開発された理論の射程は実際にははるか遠方にまで及び，加うるに，乗数や解の単純な計算法や，また制約条件の右辺に現れるベクトルのうち，それに対して問題が解を有するものの集合を計算す

る公式も導かれるのである。（本節末尾の注意を見よ。）上記の事情に鑑み，[16，17] に含まれるリャプーノフ型の問題についての二，三の主要結果を以下に引用しておこう。

本節では以下，正規非線形積分核 $f(t,x)$ は固定されたものと考える。f がいかにして得られたかという点は，これからの議論では重要性をもたない。$f^*(t,p)$ は函数 $f(t,\cdot)$ のフェンシェルの共役函数であり，$V(a)$ は次の問題の価値函数である。

$$V_\varphi(a) = \inf\left\{\int_T f(t,x(t))d\mu : \quad \int_T x(t)d\mu = a\right\}.$$

また

$$S^*(p) = S^*_\varphi(p) = \int_T f^*(t,p)d\mu\,;\ S_\varphi(a) = \sup_p (p\cdot a - S^*(p))$$

と定義する。（再び添字の φ は省略することが多い。）簡単な計算により，S^* は V に関するフェンシェルの共役函数であり，S はその第二共役函数であることが知られる。上記の仮定から V 自体は凸函数であることが導かれるが，それはおそらく閉じた函数ではないであろう。だがいずれにせよ，$a \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}\ V)$ ならば $S(a) = V(a)$ が成り立つ。

定理 2. (T,Σ,μ) は完備な有限測度空間とする。また t が原子である場合には必ず $f(t,\cdot)$ は凸であると仮定する。ある $\bar{p} \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\ S^*)$ に対して $\bar{a} \in \partial S(\bar{p})$ であるとすれば，（P）には解が存在する。また $\bar{y}(t)$ が（P）の解であるためには

$$f(t,\bar{y}(t)) + f^*(t,\bar{p}) = \bar{p}\cdot\bar{y}(t) \quad \text{a.e.} \tag{1}$$

であることが必要十分である。

さて $\bar{p}$ が内点でない場合に移ろう。この場合には当該の問題に解が存在しないという事態が生じうる。ところが，T が完備な距離空間で μ が正則な測度ならば，以下に述べるような意味である種の一般化された解が存在するのである。$T(\bar{p})$ を次のような性質をもつ $t \in T$ の集合とする。つまり $\bar{t}$ の任意の近傍 U に対して，$\bar{p}$ が

$$S^*_U(p) = (S^*_\varphi(p))_U = \int_U f^*(t,p)d\mu \tag{2}$$

の有効定義域の内部に属さないような $t \in T$ の集合がこれである。任意の $t \in T(\bar{p})$ に対して，t のすべての近傍 U についての $\mathrm{dom}\ S^*_U$ の合併を $Q(t)$ とする。そこで

$$\mathsf{y} = (y(\cdot), t_1, \cdots, t_k, w_1, \cdots, w_k),\ t_i \in T(\bar{p}),\ w_i \in \mathrm{I\!R}^n, (k \le n)$$

の集合 Y を考えてみよう。T 上の $\mathrm{I\!R}^n$-値の測度でそのラドン－ニコディム微分が $y(t)$ であり，その特異部分が点 t_i に重味 w_i を与える原子から成るもの m を考えると，y はこのような測度に対応するものとみなすことができる。各 $\mathsf{y} \in \mathsf{Y}$ に対して，次のような問題を対応させる。

$$
\text{(GP)} \qquad \begin{cases} \text{minimize} \displaystyle\int_T f(t, y(t))d\mu + \sum_{i=1}^{k} s(Q(t_i), w_i) \\ \\ \text{s.t.} \qquad \displaystyle\int_T x(t)d\mu + \sum_{i=1}^{k} w_i = \bar{a}. \end{cases}
$$

（ここで $s(P, \cdot)$ は P の支持函数を表わす。）

定理 3. 上記の仮定に加えて，T は完備な距離空間， μ は T 上の完備・正則な有限測度であり，int (dom S^*) $\neq \emptyset$ であると仮定する。$\bar{a} \in \partial S^*(\bar{p})$ で $\bar{p}$ は内部に属さないならば，（GP）は解を有する。さらに $\bar{y}$ が（GP）の解であるためには，殆どすべての点で（1）が成り立ち，かつ

$$
(3) \qquad \bar{p} \cdot \bar{w}_i = s(Q(\bar{t}_i), \bar{w}_i), \ \forall\, i = 1, \cdots, k
$$

の成り立つことが必要十分である。さらに $\bar{m}$ が $\bar{y}$ に対応する $\mathrm{I\!R}^n$-値の測度であるとすれば，$\bar{m}$ に $*$ 弱収束し，

$$
\int_T f(t, y_k(t))d\mu \longrightarrow \int_T f(t, \bar{y}(t))d\mu + \sum s(\bar{w}_i, Q(\bar{t}_i)).
$$

を満たす列 $(y_k(\cdot))$ が存在する。* また $\bar{a} \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}\ V))$ であるならば，(y_k) を

$$
\int_T y_k(t)d\mu = \bar{a}, \quad \forall\, k = 1, 2, \cdots
$$

を満たすように選ぶことができる。

注意 1. 等式（1）は，殆どすべての点で $\bar{y}(t) \in \partial f^*(t, p)$ の成り立つことと同値である。命題 1 を考慮すれば，これから $\bar{y}(t)$ は $-\bar{p}$ に関するモデルの均衡であるという帰結が得られる。

2. 同じ理由により，この定理は問題 (P)（制約条件中の $\bar{a}$ を a で置き換える）が解をもつような $\bar{a} \in \mathrm{I\!R}^n$ を間接的に特徴づける内容を含むものとみなすことができる。つまり

$$
a \in \bigcup_{p \in \mathrm{int}\ (\mathrm{dom}\ S^*)} \int_T \partial f^*(t, p)d\mu
$$

なる条件の下で（P）は解を有する。

3. 等式（3）は w_i が各 $Q(t_i)$ の**法線ベクトル**であること，したがって $\bar{p}$ における dom S^* の法線ベクトルであることを示している。

---

* ここでは可積分函数 $y_k(\cdot)$ と，それをラドン−ニコディムの微分とする T 上の測度とを同一視して考えているのである。［訳者注］

4. 先に [16，17] の証明を定理 2，3 において考察された状況にそのまま持ち込むことができると述べた。これはまた，ここでは μ が原子をもつ可能性があり，各原子 t について函数 $f(t,\cdot)$ が凸であるという事実に関係している。その理由は [16，17]（およびリャプーノフ問題の他のすべての研究）において，原子をもたないという性質は，問題の価値函数の凸性を保証するためにだけ必要とされているにすぎないからである。

5. この定理は，等式の形ではない凸制約を含む問題に容易に応用することができる。とくに全く制約がない場合には，ゼロが dom S^* の内部に属しているや否やをチェックするだけでよい。もし内部に属しているならば，$\bar{a} \in \partial S^*$ が存在し，この $\bar{a}$ を含む問題に定理を適用して，解の存在を示すことができる。これがたとえば [6, 11] で考察されている場合である。またゼロが dom S^* には含まれるがその内部に属さないときにも，$\partial S^*(0) \neq \emptyset$ ならば，やはり解の存在を確証することができる。実際，この場合には（GP）に解が存在する。しかし解の特異部分に対応する汎函数成分は定理 3（$\bar{p}=0$ として）によりゼロに等しく，したがって解の「絶対連続」部分はまた無制約の問題をも解くことになるのである。

6. ふたつの定理はさらに次のような問題にも適用できる。

$$\text{minimize} \int_0^1 f(t,x(t))d\mu,$$

$$\text{s.t.} \qquad \int_0^1 G(t,x(t))d\mu = \bar{a}.$$

ここで G は $T \times \mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ へのカラテオドリーの写像である。ただし，二，三の変更が必要である。まず $f^*(t,p)$ のかわりに函数

$$g(t,p) = \sup_x \{p \cdot G(t,x) - f(t,x)\}$$

を使わなければならない。そして第二に，定理 2 の言明中，等式（1）は

$$f(t,\bar{y}(t)) + g(t,\bar{p}) = \bar{p} \cdot G(t,\bar{y}(t))$$

で置き換えなければならない。

3. 例：オーマン–ペルレスの存在定理

1965 年，オーマンおよびペルレス [3] は（若干の仮定の下に）次の問題における解の存在を証明した。

$$\text{(AP)}\qquad \begin{aligned}&\text{minimize} \int_0^1 f(t,x(t))d\mu,\\ &\text{s.t.} \qquad \int_0^1 x(t)d\mu \le \bar{a}; \quad x \ge 0.\end{aligned}$$

ここで $\geq$ は $\mathbb{R}^n$ における順序を意味する。つまり x のすべての成分が非負であるときに $x \geq 0$ と書くのである。$\mathbb{R}^n$ の正象限を $\mathbb{R}^n_+$ と表記する。

[3] で課せられた諸仮定のうち主要なもの（$x \to \infty$ のとき f は可積分 $o(x)$）は，漸近的に $\|x\| \to \infty$ であるとき，$f(t,\cdot)$ の増減は任意の線形函数よりも緩慢でなければならないという要請である。われわれはこの仮定を厳密な表現で述べることはせず，そのかわりに一層緩い条件を用いることにしたい。これは [2] に現れた条件に近く，また凸解析の考え方により適合したものである。（以下に述べる仮定 II を見よ。）すなわち次のように仮定するのである。

I.　$f(t,x)$ は正規非線形積分核で，しかも $\mathbb{R}^n_+$ と原点のある近傍との共通部分に含まれる任意の x に対して，（t の函数として）可積分である。

II.　任意の $\varepsilon > 0$ に対して，可積分な $\alpha_\varepsilon(t)$ と $\|q_\varepsilon\| < \varepsilon$ なる $q_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ が存在して，

$$f(t,x) \geq \alpha_\varepsilon(t) + q_\varepsilon \cdot x, \quad \forall\, x \geq 0 \quad \text{a.e. on } [0,1].$$

上記の問題は等式制約をもつ問題として，たとえば次のように再構成することができる。

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \int_0^1 f(t,x(t))d\mu,\\ &\text{s.t.} \qquad \int_0^1 (x(t)+y(t))d\mu = \bar{a}; \quad x \geq 0,\ y \geq 0.\end{aligned}$$

定理 4.　問題（AP）は解を有する。

証明　解の存在だけが関心の対象であるから，一般性を失うことなく，$\bar{a} > 0$ と仮定してよい。実際，$\bar{a}$ が $\mathbb{R}^n_+$ の面上にある場合は，いかなる許容函数 $x(t)$（等号制約に還元した問題ではそれに加えて $y(t)$）も，殆どすべての点でこれと同一の面上に含まれねばならず，したがって $\mathbb{R}^n$ を，$\bar{a}$ を含む $\mathbb{R}^n_+$ の最小の面によって生成される部分空間で置き換えて考えることができるからである。さらに，凸解析で通常行われるように，$x \geq 0$ という条件は別箇の制約として考えるのではなく，ただ $x \notin \mathbb{R}^n_+$ に対しては $f(t,x) = \infty$ と想定すれば済む。

次の関係が成り立つ（前節末尾の最後の注意を見よ）。

$$\begin{aligned} g(t,p) &= \sup\{p\cdot(x+y) - f(t,x) :\ x \geq 0,\ y \geq 0\} \\ &= \begin{cases} f^*(t,p), & \text{if } p \leq 0; \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

次にいかなる $p<0$ も dom S^* に属することを示そう。実際，$p<0$ が与えられるとき，$\varepsilon>0$ を十分小さく選び，ノルムが ε よりも小さないかなる q についても $p<q$ とすることができる。こうすると，

$$-f(t,0) \le f^*(t,p) \le \sup_{x\ge 0}(p\cdot x-(\alpha_\varepsilon(t)+q_\varepsilon\cdot x)) \le -\alpha_\varepsilon(t)$$

であり，また仮定から $f(t,0)$ と $\alpha(t)$ はともに可積分である。したがって dom S^* の内部と，殆どすべての t について dom $f^*(t,\cdot)$ の内部は非空で，$\mathbb{R}^n_-$ の内部と合致する。次にこの事実から，定理 3 に述べた集合 $Q(t)$ はすべて合致し，$\mathbb{R}^n_+$ に相等しいことがわかる。

さらに仮定Ｉ，II から，価値函数 $V(a)$ は適正な凸函数で，dom $V=\mathbb{R}^n_+$ であることが知られる。$\bar{a}>0$ を仮定しているので，$\partial V(\bar{a})\ne\emptyset$，すなわち $\bar{a}\in\partial S^*(\bar{p})$ となるような $\bar{p}\in\mathbb{R}^n_-$ が存在する。定理 3 を適用して，

$$\int_0^1(\bar{x}(t)+\bar{y}(t))dt+\sum\bar{w}_i=\bar{a};$$
$$\int_0^1 f(t,\bar{x}(t))dt+\sum s(\mathbb{R}^n_-,\bar{w}_i)=V(\bar{a})$$

を満たす $\bar{x}(t)\ge 0, \bar{y}(t)\ge 0$，およびベクトル $\bar{w}_i\in N(\mathbb{R}^n_-,\bar{p})$ を見出すことができる。すると任意の $w\ge 0$ に対して $s(\mathbb{R}^n_-,w)=0$ であるから，$\bar{x}(t)$ は（AP）の許容函数であり（$\bar{w}_i\ge 0$ ゆえ），

$$\int_0^1 f(t,\bar{x}(t))dt=V(a)$$

が成り立つことが知られる。 □

注意　仮定 II のかわりに，次のようなより弱い仮定を課したならば何ごとが起こるか，それを手短に述べておこう。つまり，

$$f(t,x)\ge\alpha(t)+q\cdot x,\quad \forall\, x \text{ a.e.}$$

を満たす可積分な $\alpha(t)$ と $q\in\mathbb{R}^n_-$ が存在すると仮定してみるのである。この場合は，dom S^* の内部と $\mathbb{R}^n_-$ の内部が異なる可能性がある。確実なことは，$p<q$ なるいかなる p も dom S^* の内部に属するということだけである。この場合には，$s(Q(t),w)$ はある w に対して負になるかもしれず，したがってある（十分に大きな）$\bar{a}$ に対して，定理 3 の一般化された解だけが存在するという事態が生じうるのである。

4．厚生経済学モデル再論

ここで，序論において述べたモデルをもう一度ふり返ってみよう。ある効用函数 $\varphi(t,x)$ が与えられたとき，われわれは定理 2，3 を適用して，通常の解あるいは一般化された解の存在を確認し，均

衡価格および解そのものを見出し，さらに問題の解が存在する $\bar{a}$ の集合をつきとめることさえ可能である。原理的にはいかなる理論上の問題もこの方途には生じそうもない。

実際，たとえば定理 2 の仮定が満たされ，$\bar{a} \in \partial S^*(\bar{q})$ なる $\bar{q} \in \mathrm{int}\ (\mathrm{dom}\ S^*)$ が存在するとしてみよう。すると T 上の積分が $\bar{a}$ に等しく，殆どすべての $t \in T$ において（1）の成り立つような $\bar{y}(t)$ が存在する。後者の条件は

$$f(t, y) - f(t, \bar{y}(t)) \geq \bar{q} \cdot (y - \bar{y}(t)),\ \forall y \text{ a.e. on } T.$$

に同値である。命題 1 から

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} \bar{y}(t) & \text{if } t \in T_c; \\ -\bar{y}(t) & \text{if } t \in T_p \end{cases} \tag{4}$$

はモデルのパレート最適である。（4）から次の帰結が得られる。

—— $t \in T_c$, $w \in P(t, \bar{x}(t))$ ならば，　$\bar{q} \cdot w < \bar{q} \cdot \bar{x}(t)$;

—— $t \in T_p$, $w \in X(t)$（すなわち $-w \in \mathrm{dom}\ f(t, \cdot)$）ならば，$\bar{q} \cdot w \geq \bar{q} \cdot \bar{x}(t)$.

$\bar{p} = -\bar{q}$ とおくと，すべての $w \in P(t, \bar{x}(t))$ に対して $\bar{p} \cdot w > \bar{p} \cdot \bar{x}(t)$, すべての $w \in X(t)$ に対して $\bar{p} \cdot w \leq \bar{p} \cdot \bar{x}(t)$ を満たす価格ベクトル $\bar{p}$ の存在が確認される。換言すると，**選好の序列を表現するある効用函数について命題 1 の条件が成り立つならば，価格ベクトル $\bar{p}$ と，パレート最適でしかも $\bar{p}$ について均衡となる実現可能な配分 $\bar{x}(t)$ とが存在する。**

定理との関連で問われるべきもうひとつの問題は次のように定式化することができる。つまり選好の序列が効用函数によって表現可能としたとき，X および P のいかなる性質が定理の基本条件が満たされるような φ の存在を保証しうるのであろうか。定理 2 についていえば，次のふたつの条件を取り出すことができる。

（a）$\bar{a} \in \partial S^*(\bar{p})$ なる $\bar{p}$ が存在する。

（b）この $\bar{p}$ は $\mathrm{dom}\ S^*$ の内部に属する。

いま

$$W = \int_{T_c} X(t) d\mu - \int_{T_p} X(t) d\mu = X_c - X_p$$

としよう。P を表現し，$\varphi(t, x(t))$ が可積分となる実現可能な配分 $x(t)$ が存在するような，いかなる効用函数 φ についても第一の性質が成り立つための十分条件は，

$$\bar{a} \in \mathrm{ri}\ W \tag{5}$$

である。

実際，φ を P を表現する任意の正規非線形積分核としてみよう。また $x(t)$ は $\varphi(t, x(t))$ が可積分

函数であるような実現可能な配分とする。$\bar{a}$ は W の相対内点であるから，有限個の可積分な配分 $x_i(t),\ i=1,\cdots,k$ を適当に選んで，

$$a_i = \int_{T_c} x_i(t)d\mu - \int_{T_p} x_i(t)d\mu$$

とするとき，$\bar{a} \in \mathrm{ri}\ (\mathrm{conv}\ \{a_1,\cdots,a_k\})$ かつ $\mathrm{conv}\ \{a_1,\cdots,a_k\}$ のアフィン包と W のアフィン包とを合致せしめることができる。定義により，$\varphi(t,x)$ は X のグラフ上では有限で，したがって各函数 $\varphi(t,x_i(t))$ は殆どいたるところ有限である。$\varphi(t,x(t))$ の T_c 上の積分は有限であるから，必要ならば T_c の任意に小さな部分集合上で $x_i(t)$ に変更を加え，次のような状態を確保することができる。すなわち，新しい函数（これをたとえば $x'_i(t)$ と呼ぶ）について，$\varphi(t,x'_i(t))$ の T_c 上の積分がすべて有限であること，a_i と対応する a'_i との乖離が十分に小さく，それらのアフィン包の次元が不変にとどまること，また $\bar{a}$ は a'_i の凸包の相対内部に含まれるという事実を成り立たしめることができるのである。これは $\bar{a} \in \mathrm{ri}\ (\mathrm{dom}\ V)$，したがって $\partial V(\bar{a}) \neq \emptyset$ を意味する。

次の単純な命題は，(5) が自然な仮定であることを示している。なぜなら，そうでなければ，ある価格ベクトルについて**いかなる**実現可能な配分も，すくなくとも擬似均衡になるからである。

命題 5. $\bar{a} \notin \mathrm{ri}\ W$ ならば，すべての実現可能な配分が p についての擬似均衡となるような価格ベクトル $p \neq 0$ が存在する。

この命題を証明するには，$\bar{a}$ における W へのゼロでない法線ベクトルが存在することを見れば十分である。残りは標準的な可測選択子の存在に関する議論から導かれる。

以下，(4) が満たされること，したがって性質 (a) が満たされることを仮定しよう。

第二の仮定 (b) はより基本的である。この仮定が成り立つための自明な十分条件は $\mathrm{dom}\ S^* = \mathbb{R}^n$ である。また後者の条件が成り立つための初等的十分条件は $X(t)$ が**積分有界**であること，つまり任意の $x \in X(t)$ に対して $\|x\| \leq \rho(t)$ が T 上の殆どいたるところ成り立つ可積分函数 $\rho(t)$ が存在することである。

しかし $X(t)$ は T_p 上においてのみ積分有界である（以下そのように仮定する）が， T_c 上では積分有界でないと想定するのが自然である。$\mathrm{dom}\ S^* = \mathbb{R}^n$ を満たす P の函数表現（すくなくともひとつの函数表現が存在するという前提の下で）が存在するためのより弱い十分条件は次の命題によって与えられる。

$M(t)$ という記号は，消費者 t の飽和消費の集合を表わしていることを想起しておこう。

$$d_M(t,x) = \inf\{\|x-u\|:\ u \in M(t)\}$$

は x から $M(t)$ への距離とする。$M(t) \neq \emptyset$ であるような t について，$t \in T_c$，$x \in X(t)$ に対し

$$r(t,x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in M(t); \\ \sup\{d_M(t,y):\ y \in P(t,x)\}, & \text{if } x \notin M(t) \end{cases}$$

とおく。

命題 6.　次の仮定をおく。

（i）　$X(t)$ は T_p 上で積分有界。

（ii）　殆どすべての $t \in T_c$ に対して $M(t) \neq \emptyset$ で，しかも $\delta_M(t,0) = \sup\{\|u\|:\ u \in M(t)\}$ は T_c 上で μ-可積分。

（iii）　すべての $x \in X(t)$ に対して $r(t,x) < \infty$ が T_c 上で殆どいたるところ成り立つ。

このとき $P(t,x)$ を表現し，$\mathrm{dom}\ S^*_{\overline{\varphi}} = \mathbb{R}^n$ を満たす正規非線形積分核 $\overline{\varphi}$ が存在する。

次の補題を用意して，この命題の証明へと進もう。

補題 7.　φ と ψ は距離空間 X 上で定義された下半連続な函数で次の性質を有するものとする。

（a）　φ と ψ とは共通の最小点の集合を有する（これが空であってもよい）。

（b）　$\varphi(x) > \inf\varphi$ のとき，$\varphi(x_n) < \varphi(x)$ を満たしつつ x に収束する点列 (x_n) が存在する。

（c）　$\varphi(y) < \varphi(x)$ ならば $\psi(y) < \psi(x)$。

するとすべての x について

$$\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \psi^{-1}(\psi(x)) \quad \text{かつ}$$
$$\varphi^{-1}((-\infty,\varphi(x))) = \psi^{-1}((-\infty,\psi(x))).$$

換言すれば，ふたつの函数は同一の等位集合と狭義の劣位集合を有する。

証明　最初の等式を示すだけで十分であろう。これを示せば第二の等式は (c) から導かれる。$\varphi(y) = \varphi(x) = \min\varphi$ の場合，$\psi(y) = \psi(x)$ なることが (a) から導かれ，逆も成り立つ。$\varphi(y) = \varphi(x) > \inf\varphi$ の場合には，$\varphi(y_n) < \varphi(y)$ を満たしつつ y に収束する点列 (y_n) が存在する。したがって（c）により，$\psi(y_n) < \psi(x)$ であり，下半連続性により $\psi(y) \leq \psi(x)$ が成り立つ。x, y の役割をとりかえれば，等式が得られる。 □

命題 6 の証明　証明をつうじて，選好の序列を表現するある正規非線形積分核 φ を固定して考える。一般性を失うことなく，φ が有界であることを仮定してよい。そうでない場合は，$\mathbb{R}$ 上の有界かつ厳密に増加的な適当な連続函数 $\gamma(\alpha)$ を用いて，φ を $\gamma(\varphi(x))$ でおきかえればよいからである。

1. まず $x \notin M(t)$ に対しては

$$y \in P(t,x) \quad \Longrightarrow \quad r(t,y) \leq r(t,x)$$

であることに留意する。実際，この場合には $P(t,y) \subset P(t,x)$ である。また $r(t,\cdot)$ は下半連続であることにも注意しよう。これをみるために $x_n \to x$ としてみる。$x \in M(t)$ とすれば，定義により $\liminf r(t,x_n) \geq r(t,x)$ である。そこで $x \notin M(t)$ とする。$y \in P(t,x)$ をとり出すと，φ は下半連続なので，十分に大きな n については $\varphi(t,y) < \varphi(t,x_n)$。したがってそのような n については $y \in P(t,x_n)$ であり，$r(t,x_n) \geq d_M(t,y)$ が導かれる。このように，すべての $y \in P(t,x)$ について $\liminf r(t,x_n) \geq d_M(t,y)$ であり，それゆえ $\liminf r(t,x_n) \geq r(t,x)$。

2. 既に了解済みのことであるが，$\bar{a} \in \mathrm{ri}\, W$，そこで次のような条件を満たす配分 $x_1(t), \cdots, x_k(t)$ が存在することをみよう。

（a） $\dim \mathrm{conv}\, \{a_1, \cdots, a_k\} = \dim W$ かつ $\bar{a} \in \mathrm{ri}\ (\mathrm{conv}\, \{a_1, \cdots, a_k\})$.
（ここで $a_i = \int_T x_i(t) d\mu$.）

（b） 函数 $r(t, x_i(t))$ は T_c 上で本質的に有界。

この目標のために, 上と同じように積分が $b_1, \cdots, b_k$ となる有限個の μ-可積分な配分 $u_1(t), \cdots, u_k(t)$ を選び，b_i の凸包の次元は W の次元に等しく，$\bar{a}$ はこの凸包の相対内点であるようにすることができる。次に $\|b_i - a_i\| < \varepsilon$ を満たす任意の a_i を以て b_i を置き換えれば，同一のことが成り立つように $\varepsilon > 0$ を見出すことができる。最後に，$M(t)$ の可積分選択子 $u(t)$ を選ぶのであるが，それは (ii) によって存在する。定義により，殆どすべての点で $r(t,u(t)) = 0$。函数 $r(t,u_i(t))$ のうちあるものが本質的に有界でないときは，N_i を十分に大きくとり，$E_i = \{t \in T_c : \ r(t,u_i(t)) > N_i\}$ に対して

$$\int_{E_i} \|u_i(t)\| d\mu < \frac{\varepsilon}{2} \quad ; \quad \int_{E_i} \|u(t)\| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{および} \quad \int_{T_c \setminus E_i} r(t,u_i(t)) d\mu < \infty$$

となるようにし，また

$$x_i(t) = \begin{cases} u_i(t), \text{ if } \ r(t,u_i(t)) \leq N_i; \\ u(t), \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくのである。$r(t,u_i(t))$ が本質的に有界の場合は，$x_i(t) = u_i(t)$ とする。このように定義された $x_i(t)$ は明らかに（a）と（b）を満たしている。

3. $\xi(t) = \max_i r(t, x_i(t))$ とおく。ξ は本質的に有界な函数で，しかも

$$\frac{\beta(\alpha)}{\alpha} \to \infty \ \text{ when } \ \alpha \to \infty, \quad \text{かつ} \quad \int_{T_c} \beta(\xi(t)) d\mu < \infty \tag{6}$$

を満たす，$\mathbb{R}_+$ 上の非負・凸でしかも狭義増加的な函数 $\beta(\alpha)$ が存在する。

$\rho(t,x) = \beta(r(t,x))$ とおこう。すると

$$\rho^*(t,p) = \sup_x (p \cdot x - \rho(t,x))$$

はすべての $p \in \mathbb{R}^n$ について可積分であることが知られる。実際，(6) によって，dom $\beta^* = \mathbb{R}$。さらに (A_2) によって

$$r(t,x) \geq d_M(t,x) \geq \|x\| - \delta_M(t,0)$$

であり，(ii) から $\eta(t) = \delta_M(t,0) \in L^1$. したがって $t \in T_c$ に対しては β の単調性から

$$\rho^*(t,p) \leq \sup_{x \in X(t)} (p \cdot x - \beta(\|x\| - \eta(t)) \leq \eta(t)\|p\| + \beta^*(\|p\|).$$

これで上の主張が示された。

4. 最後に

$$\overline{\varphi}(t,x) = \rho(t,x) + \varphi(t,x)$$

とおくことにしよう。第一のステップから導かれるように $\overline{\varphi}$ は下半連続で，$\varphi(t,y) < \varphi(t,x)$ ならば $\overline{\varphi}(t,y) < \overline{\varphi}(t,x)$。さらに $M(t)$ はちょうど $\overline{\varphi}(t,\cdot)$ の最小点の集合にあたり，(A_2) により，補題 7 の性質 (b) が φ について成り立つ。これで補題 7 が適用できることになり，φ と同様に $\overline{\varphi}$ も P を表現することがわかる。

次の結果はまさに int (dom S^*) $\neq \emptyset$ なる性質をもつ表現が存在するための十分条件を含んでいる。

命題 8. 上と同様，$X(t)$ は T_p 上で積分有界と想定する。X_c が直線を含まないならば，$P(t,x)$ を表現する正規非線形積分核 $\overline{\varphi}(t,x)$ で

$$\text{int (dom } S^*_{\overline{\varphi}}) \neq \emptyset$$

なるものが存在する。

証明　この命題の証明は，異った構成に基づくとはいえ，命題 6 の証明と多くの共通点を有する。X_c は直線を含まぬ凸集合なので，X_c の極集合 X_c° は非空の内部をもつ。つづいてこれから，集合 $Q = \{p \in \mathbb{R}^n :\ p \in X_c^\circ,\ \|p\| \leq \lambda\}$ の内部が非空であるような $\lambda > 0$ の存在が導かれる。函数

$$q(t,x,p) = \begin{cases} \sup\{p \cdot y :\ y \in M(t)\}, & \text{if } x \in M(t), \\ \sup\{p \cdot y :\ y \in P(t,x)\}, & \text{if } x \notin M(t) \end{cases}$$

を考え（ここで通常どおり $t \in T_c,\ x \in X(t)$），

$$\kappa(t,x) = \sup_{x \in Q} q(t,x,p)$$

と定義する。(A_2) により $q(t,x,p) \geq p \cdot x$ であること，および Q の定義により $\kappa(t,x) \leq 1$ であることは明らか。

さて $\varphi(t,x)$ を P を表現するある正規非線形積分核としよう。上と同様，φ は有界と仮定する。命

題 6 の証明と同様に，$q(t,\cdot,p)$ は下半連続であり，したがって $\kappa(t,\cdot)$ も下半連続であること，しかも $\varphi(t,y)<\varphi(t,x)$ ならば $\kappa(t,y)\leq\kappa(t,x)$ であることが判明する。ゆえに $p\in Q$ に対して

$$\kappa^*(t,p)=\sup_{x\in X(t)}(p\cdot x-\kappa(t,x))\leq\sup_{x\in X(t)}(p\cdot x-q(t,x,p))\leq 0.$$

他方，任意の $p\in Q$，任意の $x\in X(t)$ に対して

$$\kappa^*(t,p)\geq p\cdot x-1$$

であり，したがって，任意の μ-可積分な配分 $x(t)$ をとり，$b=\int_{T_c}x(t)d\mu$ とおいて，

$$\int_T\kappa^*(t,p)d\mu\geq p\cdot b-\mu(T_c)$$

が成り立つ。こうして

$$Q\subset\mathrm{dom}\ \left(\int_T\kappa^*(t,\cdot)d\mu\right).$$

そしてあとは命題 6 の証明と同様,

$$\overline{\varphi}(t,x)=\kappa(t,x)+\varphi(t,x)$$

とすればよいのである。 □

注意　1. 通常の，または一般化されたパレート最適の存在定理を，命題 6，8 および定理 2，3 の結合に基づいて定式化するのはたやすいことである。これは読者に委ねよう。

2. 命題 6 および 8 の仮定に経済的な内容が存在するや否やを理解するのは興味深い。命題 6 の仮定（$r(t,x)$ の有限性）は直感的にはおそらく選好が極端なひろがりをもつものであってはならず，飽和状態から無限に後退してはならないことを意味している。命題 8 の条件は諸文献で考察された状況の下では型どおりに満たされている（たとえば非負の量のみが可能な消費と考えられる場合）。それはまた，いかなるふたつの結託も正反対の消費上の利害をもってはならないことの要請とも見ることもできる。命題 8 の条件は，選好の序列には一切限定を加えるものでないことを注意しておこう。（ただしそれがなんらかの効用函数によって定義されているという事実は除く。）

5. 一般化された均衡と通常の均衡

$T_c\times\mathrm{I\!R}^n$ 上の正規非線形積分核が存在するものとし，§2のはじめに定義したように，$f(t,x)=f_\varphi(t,x)$ とする。また §2 と同様，S^*_U は（2）によって定義され，$Q(t)$ は t のすべての近傍 U にわたっての dom S^*_U の合併を表わしている。おしまいに

$$\mathsf{x}=(x(t),t_1,\cdots,t_k,w_1,\cdots,w_k),\quad t_1,\cdots,t_k\in T_c,\quad w_1,\cdots,w_k\in\mathrm{I\!R}^n$$

なる組み合せを考える。ここで $x(t)$ は T 上の殆どすべての点で $x(t) \in X(t)$ かつ μ-可積分であり，しかも $s(Q(t_i), w_i) < \infty$ であるとき x は φ **に対応する一般化された配分**であるということにしよう。（$S(Q, \cdot)$ は Q の支持函数であることを思い出していただきたい。）一般化された配分 x がこれらの条件に加えて

$$\int_{T_c} x(t) d\mu - \int_{T_p} x(t) d\mu + \sum_{i=1}^{k} w_i = \bar{a}$$

を満たすとき x は**実現可能**であるという。さらにある一般化された配分 $\bar{\mathrm{x}}$ に対して $\bar{x}(t)$ が擬似均衡（均衡）であり，これに加えて

$$\bar{p} \cdot \bar{w}_i \geq \bar{p} \cdot w, \quad \forall\, w \in Q(\bar{t}_i),\ i = 1, \cdots, k$$

を満たす $\bar{p} \in \mathrm{I\!R}^n$ が存在するとき，$\bar{x}$ は**一般化された擬似均衡（均衡）**であるという。

定理 3 により，dom S^*_φ の内部が非空であるような P に対する表現 φ が存在し，すくなくともひとつ実現可能な配分が存在するならば，通常の，あるいは一般化された擬似均衡が存在する。

もちろん，ある表現に対しては，対応する変分問題が一般化された解だけをもつような $\bar{a}$ が存在するという事態も生じうる。他方，（通常の）擬似均衡および均衡の概念は表現の選択から独立である。それらは集合値函数 $X(t)$ および $P(t, x)$ によって完全に規定されるのである。したがって，次のように問うてみることは自然と思われる。つまりある $\bar{a}$ と P に対するある表現の選択に対して一般化された解が存在するとき，通常の実現可能な擬似均衡，たとえば P に対する他の表現に対応する変分問題の通常の解がやはりいつでも存在するということが正しいかどうか，である。

以下の例が示すように，この問題に対する答えは否定的であり，同一の選好の序列を表現するすべての効用函数の与件のある組み合せに対しては，ただ一般化された擬似均衡だけが存在するという事態が生じうるのである。

例をあげる前に，次の事柄を想起しておこう。すなわち $\mathrm{I\!R}^n$ 上の凸函数 f，および $f(x) > \inf f$ でしかも $\partial f(x) \neq \emptyset$ であるような $x \in \mathrm{I\!R}^n$ に対しては，x における劣位集合 $\{u :\ f(u) \leq f(x)\}$ への法線錐は $\partial f(x)$ によって生成される閉錐と一致するのである。そこで例へと進む。

例．ここでは純粋な消費モデルと考えることとし，$T_c = T = [0, 1/2]$,

$$X(t) = \mathrm{I\!R}^2_+ = \{x \in \mathrm{I\!R}^2 :\ x_i \geq 0\}, \quad \forall\, t,$$
$$\varphi(t, x) = \max\{-2(x_1 - tx_2), -2(x_2 - tx_1), -x_1 + tx_2, -x_2 + tx_1\}$$

とする。

$$Q(t) = \{p \in \mathrm{I\!R}^2 :\ p_i \leq 2t,\ tp_1 + p_2 \leq 0,\ p_1 + tp_2 \leq 0,\ p_1 + p_2 \leq -1 + t\}$$

とおく。すると対応する非線形積分核 $f(t,x)=f_\varphi(t,x)$ のフェンシェル変換は $Q(t)$ の指標函数

$$f^*(t,p)=\delta_{Q(t)}(p)=\begin{cases}0, & \text{if} \quad p\in Q(t);\\ \infty, & \text{otherwise}\end{cases}$$

であり，また

$$S^*(p)=\int_0^{1/2} f^*(t,p)dt=\delta_Q(p)$$

である。ここで $P=\bigcap Q(t)=\{p\in \mathrm{IR}^2:\ p_i\le 0,\ p_1+p_2\le -1\}$.

定理 3 を適用すると，まず任意の $\bar{a}\ne 0,\ \bar{a}\ge 0$ に対して，対応する $\bar{p}$ は Q の内部には属さないこと，さらに三本の半直線 $\{\bar{a}\in \mathrm{IR}^2_+;\ \bar{a}_2=0\}$，$\{\bar{a}\in \mathrm{IR}^2_+;\ \bar{a}_1=0\}$，$\{\bar{a}\in \mathrm{IR}^2_+:\ \bar{a}_1=\bar{a}_2\}$ を例外として，$\bar{p}$ は $(-1,0)$ または $(0,-1)$ であることに注意しよう。次に Q の任意の境界点 p に対して，集合 $T(p)$ はただ一点 $t=0$ から成り，またそのようないかなる点もすべての $t>0$ に対して $Q(t)$ の内部に属することが知られる。かくして定理 3 により，ゼロではないすべての $\bar{a}\in \mathrm{IR}^2_+$ に対して，この問題には恒等的にゼロに等しい可積分な成分と，$t=0$ に位置する跳びの成分とをもつ一般化された解だけが存在するのである。

さてそこで，任意の通常の擬似均衡 $x(t)$ は $x_1(t)=x_2(t)$ を満たさねばならず，したがってそのような擬似均衡は第一象限の対角線の $\bar{a}$ に対してのみ存在することを示そう。実際，$x(t)$ をある $p\ne 0$ に対応する擬似均衡としよう。このとき $p\le 0$ である。（実際，たとえば $p_2>0$ としてみると，十分に小さな t については $p_2+tp_1>0$ であり，これは $p\notin Q(t)$ を意味する。したがってそれは $f(t,\cdot)$ のいかなる劣位集合の法線ベクトルにもなりえないのである。）しかしこの場合，任意の $\lambda>0$ と任意の $t>0$ に対して，$\lambda p\in Q(t)$ なる包含関係が成り立つのは次のような場合だけである。つまり $\lambda p\in \mathrm{int}\ Q(t)$ あるいは $\lambda(p_1+p_2)=-1+t$ で $Q(t)$ の定義中の他のすべての不等号は λp において厳密に成り立つ場合がこれである。だがそのような点における $f^*(t,\cdot)$ の任意の劣微分 x は $x_1=x_2$ を満たさなくてはならない。

注意 1. 主体の空間上の位相構造が存在すると考えるのは，経済理論的観点からはきわめて困難な仮定である。（M.A. カーンと N.C. ヤネリスの注意による。）したがって [16,17] において開発された理論を拡充する努力は，位相構造をもたない測度空間に向けられるべきであろう。それは不可能な仕事ではないように思われる。

2. 通常の（擬似）均衡は選好の序列のみに依存し効用函数の選択には依らない。これと違って，一般化された（擬似）均衡は効用函数の選択に依存する。ある表現 $\varphi(t,x)$ とある $\bar{a}$ とについて，一般化された均衡だけが存在しうるのだが，$\lambda(t)\varphi(t,x)$ と定義される非線形積分核をもつ変分問題は同一の $\bar{a}$ に対する通常の解を有するという状況が存在し，これは次のような場合であることを示すことができる。すなわち，(a) 正の測度をもつ結託における各 t について飽和消費が存在せず，(b)

int dom $S^* \neq \emptyset$ でしかも dom S^* の閉包がそれの生成する閉錐の内部に属するような表現 φ が存在する。

3. 一般化された（擬似）均衡は，消費者の無視しうるほど小さな部分が，消費のかなり大きな部分を把むことのできる状態としてみることもできる。そのような観点から，例と上記の注意で論じた状況はともに，個別消費者の選好体系を変えることなく，より公正な財の分配を保証する「外力」の存在にかかわっているがゆえに，興味深いものといえるであろう。

（Alexander Ioffe, イスラエル工科大学教授,
Department of Mathematics, Technion, Haifa）
（訳者　経済学部教授）

参考文献

[1] Alekseev, V.M., Tihomirov, V.M., and Fomin, S.V., *Optimal Control*, Nauka, 1979 (in Russian); English translation: Consultants Bureau, N.Y. 1987.

[2] Artstein, Z., On a variational problem, *J. Math. Anal. Appl.*, **45**, 404–415 (1974).

[3] Aumann, R.J., and Perles, M., A variational problem arising in economics, *J. Math. Anal. Appl.*, **11**, 488-503 (1965).

[4] Aumann, R.J., and Shapley, L.S., *Values of Non Atomic Games*, Princeton Univ. Press, Princeton 1974.

[5] Balder, E.J., Existence results without convexity conditions for general problem of optimal control with singular components, *J. Math. Anal. Appl.,* **101**, 527–539 (1984).

[6] Balder, E.J., Comment on an existence result for a non-coercive nonconvex variational problem, *SIAM J. Control Opt.*, **40**, 328–332 (2002).

[7] Berliocchi, H., and Lasry, J.-M., Intégrandes normales et mesures paramétrées en calcul des variations, *Bull. Soc. Math. France*, **101**, 129–184 (1973).

[8] Cellina, A., and Perrotta, S., On minima of radially symmetric functionals of the gradient, *Nonlinear Analysis TMA*, **23**, 239–249 (1994).

[9] Cesari, L., An existence theorem without convexity assumptions, *SIAM J. Control Opt.* **12**, 319–331 (1974).

[10] Crasta, G., Existence of minimizers for nonconvex variational problems with slow growth, *J. Optim. Theory Appl.,* **99**, 381–401 (1998).

[11] Crasta, G., On the minimum problem for a class of non-coercive nonconvex functionals, *SIAM J. Control Optimization*, **38**, 237–253 (1999).

[12] Crasta, G., and Malusa, A., Euler-Lagrange inclusions and existence of minimizers for a class of non-coercive variational problems, *J. Convex Analysis*, **7**, 167–182 (2000).

[13] Fusco, N., Marcellini, P., and Ornelas, A., Existence of minimizers for some nonconvex one-dimensional integrals, *Portugal Math.*, **55**, 167–185 (1998).

[14] Hildenbrandt, W., Pareto optimality for a measure space of economic agents, *Int. Econ. Review*, **10**, 363–372 (1969).

[15] Ioffe, A.D., and Levin, V.L., Subdifferentials of convex functions, *Trudy Mosc. Matem. Ob.*

26 (1972), 3–73 (in Russian), English translation: *Trans. Moscow Math. Soc.*, **26**, 1–72 (1972).

[16] Ioffe, A.D., and Tihomirov, V.M., On minimization of integral functionals, *Funct. Anal. Appl.,* **3**, 218–227 (1969).

[17] Ioffe, A.D., and Tihomirov, V.M., *Theory of Extremal Problems*, Nauka, Moscow 1974 (in Russian); English translation: North Holland, 1979.

[18] Marcelli, C., One-dimensional non-coercive problems of the calculus of variations, *Ann. Math. Pura Appl.*, **173**, 145–161 (1997).

[19] Ornelas, A., Existence of scalar minimizers for nonconvex simple integrals of sum types, *J. Math. Anal. Appl.*, **221**, 559–573 (1998).

[20] Yaari, M.E., On the existence of optimal plan in continuous time allocation process, *Econometrica*, **32**, 576–590 (1964).