Title	微分可能性と分岐について
Sub Title	On differentiability and bifurcation
Author	Stuart, Charles Alexander(Stuart, Charles Alexander) Evéquoz, Gilles(Evéquoz, Gilles) 加藤, 寛之(Kato, Hiroyuki)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2006
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.98, No.4 (2006. 1) ,p.633(87)- 661(115)
JaLC DOI	10.14991/001.20060101-0087
Abstract	バナッハ空間の間に作用する関数の, アダマール微分可能性とw- アダマール微分可能性の概念について, また, それらのガトー微分可能性やフレッシェ微分可能性といった一般的な概念との関係について想起する。実ヒルベルト空間H上で, 0においてアダマール微分可能かつw-アダマール微分可能だが, フレッシェ微分可能でない関数F : H→Hに対しても, F (0) のスペクトルに属さない点λにおいて式F(u)=λuに分岐が存在し得ることを見る。そうした場合にλが分岐点となる必要条件を確立し, この結果が, こうした状況の生じる以下のような偏微分方程式の文脈において如何にして利用され得るかを示す。 −Δu(x) + q(x)u(x) = λe−|x| tanh(e|x|u(x)) for u ∈ H2(RN).
Notes	小特集 : 経済の数理解析
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20060101-0087

「三田学会雑誌」98 巻 4 号（2006 年 1 月）

微分可能性と分岐について*

チャールス・A・スチュアート
ジル・エヴェコ
加　藤　寛　之　訳

要　　旨

バナッハ空間の間に作用する関数の，アダマール微分可能性と w-アダマール微分可能性の概念について，また，それらのガトー微分可能性やフレッシェ微分可能性といった一般的な概念との関係について想起する。実ヒルベルト空間 H 上で，0 においてアダマール微分可能かつ w-アダマール微分可能だが，フレッシェ微分可能でない関数 $F : H \to H$ に対しても，$F'(0)$ のスペクトルに属さない点 λ において式 $F(u) = \lambda u$ に分岐が存在し得ることを見る。そうした場合に λ が分岐点となる必要条件を確立し，この結果が，こうした状況の生じる以下のような偏微分方程式の文脈において如何にして利用され得るかを示す。

$$-\Delta u(x) + q(x)u(x) = \lambda e^{-|x|} \tanh\left(e^{|x|}u(x)\right) \text{ for } u \in H^2(\mathbb{R}^N).$$

キーワード

分岐，アダマール微分可能，w-アダマール微分可能，スペクトル，非線形楕円型偏微分方程式

1.　序

関数 $F : X \to Y$ を考える，但し X と Y は実バナッハ空間とする。二つの最も知られた F の微分可能性の概念は，ガトー（Gâteaux）とフレッシェ（Fréchet）に由来するものであるが，多くの変形版がある。[3]，[11]。

最も簡潔な形で，抽象的分岐理論は以下のような形の式を扱う，

$$F(u) = \lambda u \text{ for } (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X \tag{1.1}$$

＊［本稿は，*Advances in Mathematical Economics*, 8(2006), Springer-Verlag Tokyo, pp.155-184 に英文で掲載された原論文を出版社の許可を得て翻訳したものである。原題 “On Differentiability and Bifurcation”.――編者］

但し，$F : X \to Y$ は，$X \subset Y$ で，$F(0) = 0$ を満たすものとする。　また，

$$F(u_n) = \lambda_n u_n \text{かつ} u_n \neq 0 \text{ for all } n \in \mathbb{N},$$
$$\lambda_n \to \lambda, \ \|u_n\|_X \to 0 \ (n \to \infty)$$

を満たす点列 $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbb{R} \times X$ が存在するとき，点 $\lambda \in \mathbb{R}$ は，（自明解 $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R} \times X$ の線からの）（1.1）の分岐点（bifurcation point）である，という。

$B_F \subset \mathbb{R}$ を（1.1）の全ての分岐点の集合とする。古典的な分岐理論における最も基本的な結果によると，F が $u = 0$ でフレッシェ微分可能ならば，$B_F \subset \sigma(F'(0))$ がいえる，但し，

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : T - \lambda I : X \to Y \text{ が同型写像ではない }\}$$

は線形作用素 $T : X \to Y$ のスペクトルである。それから $\lambda \in B_F$ となるための F と $\lambda \in \sigma(F'(0))$ についての追加的条件を求める。それらの結果は多くの分野において重要な応用を持つ。

微分方程式や関数方程式を伴う具体的な問題が（1.1）の形で表現されるとき，F は，いくつかのより弱い意味での微分可能性を満たすことはあっても，0 においていつでもフレッシェ微分可能というわけではない。([12]，[14])。ここでは，有限次元空間ではフレッシェ微分可能性と同値である，アダマールの意味での微分可能性に焦点を当てる。例を示すことで，無限次元においては，0 における F のアダマール微分可能性からは，$B_F \subset \sigma(F'(0))$ は導けない，従って $\lambda \in \sigma(F'(0))$ であることはもはや λ が（1.1）の分岐点であるための必要条件ではないということを示す。ヒルベルト空間の枠組みにおいて，アダマールの意味でのみ微分可能であるような関数 F に応用可能な，$\lambda \in B_F$ であるための必要条件を確立する。

2 節は，アダマール微分可能性と w-アダマール微分可能性について割く。前者は X と Y における強収束，後者は弱収束に関するものである。定義といくつかの予備的な議論を紹介した後，一連の例を示す。我々は偏微分方程式への関心から動機付けされているので，主な例はルベーグ空間やソボレフ空間の間に作用する代替作用素（substitution operators）に関するものである。我々の結論の例証として，次のことを述べておく。任意の $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ に対し，式

$$F(u)(x) = e^{-|x|} \tanh\left(e^{|x|} u(x)\right)$$

はソボレフ空間 $H^k(\mathbb{R}^N)$ から $L^2(\mathbb{R}^N)$ への連続なコンパクト作用素となり，さらにいえば，$F_k : H^k(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ は全ての $u \in H^k(\mathbb{R}^N)$ においてアダマール，w-アダマール微分可能であるが $u = 0$ においてフレッシェ微分可能ではない。

3 節は以下のような例から始める。Ω を $\mathbb{R}^N$ のある開部分集合とし，$X = Y = L^2(\Omega)$ とすると，アダマール，w-アダマール微分可能である関数 $F : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ に対して，ある初等的なやり方で B_F を正確に決めることができる。この例（例 3.1）のおいて，$\sigma(F'(0))$ は一点集合 $\{\Lambda\}$ であ

るが，F が線形でなければ，B_F は閉区間 $[a,b]$，$a<b$ で，$\Lambda \in [a,b]$ となる。次に $X=Y=H$ が実ヒルベルト空間であるとき，λ が（1.1）の分岐点でなくなるような条件を与える結果を述べ，証明する。この結果の使い方を説明するため，まず，最初の例において，$B_F \subset [a,b]$ になるという明確な必要条件が導出できることを示す。それから，以下のような非線形楕円型偏微分方程式を伴う，より本質的な例を考える。

$$-\Delta u(x)+q(x)u(x)=\lambda e^{-|x|}\tanh\left(e^{|x|}u(x)\right) \text{ for } u\in H^2(\mathbb{R}^N) \tag{1.2}$$

但し $q\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$，$q(x)\geq \delta>0$ a.e. on $\mathbb{R}^N$ である。この問題において，$\Lambda\in\mathbb{R}$ は，以下を満たす解の点列 $\{(\lambda_n,u_n)\}\subset \mathbb{R}\times H^2(\mathbb{R}^N)$，$u_n\not\equiv 0$ が存在するとき，（1.2）の L^2-分岐点である，という，

$$\lambda_n\to\Lambda \text{かつ } |u_n|_2=\{\int_{\mathbb{R}^N}u_n^2dx\}^{1/2}\to 0.$$

λ_e を，自己共役シュレディンガー作用素 $-\Delta+q:H^2(\mathbb{R}^N)\subset L^2(\mathbb{R}^N)\to L^2(\mathbb{R}^N)$ の本質的スペクトルの下限とする。我々の一般的結果によれば，$\Lambda<\lambda_e$ が (1.2) の L^2- 分岐点ならば $\Lambda\in\sigma(-\Delta+q)$ である。例 3.2. を見よ。（1.2）の L^2- 分岐点は，$\sigma(-\Delta+q)$ に属さない点 $\lambda>\lambda_e$ において存在し得ることを強調しておきたい。実際，（1.2）の全ての L^2- 分岐点の集合は $\sigma(-\Delta+q)\cup[\lambda_e,\infty)$ とぴったり一致することが示されている。仮に，$q=p+r$，p は周期的で，$r(x)\to 0$ $(|x|\to\infty)$ ならば，$[\lambda_e,\infty)$ は $\sigma(-\Delta+q)$ に属さないある開区間を，通例含む。

この序論において，我々は分岐の必要条件の議論に焦点を合わせて来た。しかし，短い 4 節において我々は，3 節の非分岐の結果に使われたものと比較可能な形で，（1.1）の分岐を確立した結果を [6] から，証明抜きで示しておく。これによって我々はより完全な（1.2）の L^2- 分岐の議論とその一般化である例 3.2. を与えることが出来る。アダマール，w-アダマール微分可能であるだけの写像に応用することのできるような，分岐の十分条件をも含んだこれらの諸問題についてのより完全な吟味も行う。

この研究は第三回数理経済学国際会議（the Third International Conference on Mathematical Analysis in Economic Theory）にて報告されたものである。

2.　微分可能性の諸概念

この節を通して，X と Y は実バナッハ空間，$B(X,Y)$ は X から Y への有界線形作用素の全体の空間とする。写像 $F:X\to Y$ に対して，二つの最も広く使われる微分可能性の定義を想起することから始める。

（I）F が $u\in X$ で，ガトー微分可能（*Gâteaux* differentiable）とは，

$\exists T \in B(X, Y)$;

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = Tv \text{ for all } v \in X$$

となることをいう。

（II）F が $u \in X$ でフレッシェ微分可能（*Fréchet* differentiable）とは

$\exists T \in B(X, Y)$;

$$\lim_{\|w\| \to 0} \frac{F(u+w)-F(u)-Tu}{\|w\|} = 0$$

となることをいう。

以下の概念も極めて標準的である。([7])。

（III）F が $u \in X$ においてアダマール微分可能（*Hadamard* differentiable）とは，

$\exists T \in B(X, Y)$；

$$\lim_{t_n \to 0} \frac{F(u+t_n v_n)-F(u)}{t_n} = Tv \text{ for all } v \in X$$

$$\text{for all } \{t_n\} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ with } t_n \to 0,$$

$$\text{for all } \{v_n\} \subset X \text{ with } v_n \to v$$

となることをいう。

強収束を弱収束に置き換えると，我々が議論する最後の微分可能性の概念になる。

（IV）F が $u \in X$ で w-アダマール微分可能（*w-Hadamard* differentiable）とは，

$\exists T \in B(X, Y)$；

$$\lim_{t_n \to 0} \left\langle \frac{F(u+t_n v_n)-F(u)}{t_n}, \varphi \right\rangle = \langle Tv, \varphi \rangle \text{ for all } v \in X, \varphi \in Y^*$$

$$\text{for all } \{t_n\} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ with } t_n \to 0,$$

$$\text{for all } \{v_n\} \subset X \text{ with } v_n \rightharpoonup v \text{ weakly in } X.$$

但し，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $Y \times Y^*$ 双対である。

これらの定義を比較するために，これらが同値な形で表現し得ることを見ておくことが有益である。

F が $u \in X$ でフレッシェ微分可能 $\Longleftrightarrow$

$$\text{(II')} \exists T \in B(X, Y);\ \lim_{t \to 0} \frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = Tv,$$

X の有界な部分集合上の v について一様収束

F が $u \in X$ でアダマール微分可能 $\Longleftrightarrow$

$$\text{(III')} \exists T \in B(X, Y); \lim_{t \to 0} \frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = Tv,$$

X のコンパクト部分集合上の v について一様収束

F が $u \in X$ で w-アダマール微分可能 $\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned}&(\text{IV'})\exists T \in B(X,Y)\ ;,\\ &\qquad \lim_{t\to 0}\left\langle \frac{F(u+tv)-F(u)}{t}, \varphi \right\rangle = \langle Tv, \varphi\rangle \text{ for all } \varphi \in Y^*,\\ &\qquad X \text{ の弱コンパクト部分集合上の } v \text{ について一様収束}\end{aligned}$$

以下のことにも注意（[10] の Section 2.8 を見よ）； X が反射的なら，F が $u \in X$ で w-アダマール微分可能 $\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned}&(\text{IV''})\exists T \in B(X,Y);\\ &\qquad \lim_{t\to 0}\left\langle \frac{F(u+tv)-F(u)}{t}, \varphi \right\rangle = \langle Tv, \varphi\rangle \text{ for all } \varphi \in Y^*,\\ &\qquad X \text{ の有界な部分集合上の } v \text{ について一様収束.}\end{aligned}$$

ここで，上で紹介した微分可能性の概念同士の関係を以下のように導出することができる。

（1）F が u において，上記のうち 2 つの微分可能性を満たしているとき，対応する導関数は等しい。

（2）フレェシェ微分可能 $\Longrightarrow$ アダマール微分可能 $\Longrightarrow$ ガトー微分可能
フレッシェ微分可能 $\Longrightarrow$w-アダマール微分可能。

（3）$\dim X < \infty$ ならば，フレッシェ微分可能 $\Longleftrightarrow$ アダマール微分可能
アダマール微分可能 $\Longrightarrow$w-アダマール微分可能。$\dim X = 1$ ならば，フレッシェ微分可能 $\Longleftrightarrow$ ガトー微分可能。

（4）$\dim Y < \infty$ ならば，w-アダマール微分可能 $\Longrightarrow$ アダマール微分可能。

（5）X が反射的かつ $\dim Y < \infty$ なら，フレッシェ微分可能 $\Longleftrightarrow$ w-アダマール微分可能。

（6）$\dim X < \infty$ かつ $\dim Y < \infty$ の時，フレッシェ微分可能 $\Longleftrightarrow$w-アダマール微分可能 $\Longleftrightarrow$ アダマール微分可能

アダマール微分可能性は w-アダマール微分可能性を含意せず，w-アダマール微分可能性はアダマール微分可能性を含意しないことを示す例を与える。しかし，まず，以下の議論に有益な微分可能な関数のいくつかの性質を挙げる。

（a）F が X の開部分集合 U の全ての点においてガトー微分可能かつ，$F' \in C(U, B(X,Y))$ ならば，F は U の全ての点においてフレッシェ微分可能。

（b）F が u でガトー微分可能かつ u の開近傍で Lipschitz 連続ならば，F は u でアダマール微分可能。

（c）F が u でアダマール微分可能かつ $u \in Z$，Z は X にコンパクトに埋め込みまれるバナッハ空間，ならば，$F : Z \to Y$ は u でフレッシェ微分可能。

（d）F が u でフレッシェ微分可能かつ，$F : X \to Y$（コンパクト），ならば，$T = F'(u) : X \to Y$ はコンパクト線形作用素。

（e）F が u でアダマール微分可能ならば，F は u で連続。

例 2.1（w-アダマール微分可能性はガトー微分可能性を含意しない，したがってアダマール微分可能性を含意しないことを示す例。）

$X = \mathbb{R}$，$Y = L^2(\mathbb{R})$ とする。

$z \in Y \backslash \{0\}$ を選び，$F : \mathbb{R} \to Y$ を

$$F(t) = \begin{cases} tz(\cdot + t^{-1}) & \text{for } t \neq 0 \\ 0 & \text{for } t = 0 \end{cases}$$

と定義する。$t \neq 0$ に対して，

$$\frac{F(t)}{t} = z(\cdot + t^{-1}) \rightharpoonup 0 \text{ weakly in } Y \text{ as } t \to 0$$

である。従って，F は $t = 0$ で w-アダマールに微分可能で，$F'(0) = 0$ である。しかし

$$\left\| \frac{F(t)}{t} \right\|_Y^2 = \int_{\mathbb{R}} z(x + t^{-1})^2 dx = \|z\|_Y^2 \neq 0 \text{ for all } t \neq 0$$

となる。結果として，仮に $t_n \to 0$ である $\{t_n\} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ が，

$$\left\| \frac{F(t_n)}{t_n} - u \right\|_Y \to 0 \text{ となるなら，} \|u\|_Y = \|z\|_Y > 0.$$

$\frac{F(t_n)}{t_n} \rightharpoonup 0$ weakly in Y であることより，$u = 0$ となるがこれは矛盾。よって F は $t = 0$ でガトー微分可能ではない。□

次の例は [4] の系 5 の証明で指摘されていたものである。

例 2.2（アダマール微分可能が w-アダマール微分可能を含意しない例）$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ は実ヒルベルト空間で，$\dim H = \infty$，また，$\{e_n : n \geq 1\}$ を H の直交系とする。$F : H \to \mathbb{R}$ を以下のように定義する。

$$F(u) = \sup_{n \geq 1} \{2 \langle e_n, u \rangle - \frac{1}{n}\}.$$

明らかに $F(0) = 0$ で，F は H 上 Lipschitz 連続で，$|F(u) - F(v)| \leq 2\|u - v\|$，$u, v \in H$ である。さらに，$\langle e_n, u \rangle \to 0$ $(n \to \infty)$ であることから，$F(u) \geq 0$，$u \in H$ である。F が 0 でアダマール微分可能で $F'(0) = 0$ となることを示すため，H の任意のコンパクト部分集合 W を考える。

$\varepsilon > 0$ とする。$W \subset \cup_{i=1}^m B(u_i, \varepsilon/2)$ となる H の有限個の点 $u_1, \ldots, u_m$ が存在する，但し $B(u, r)$ は H の u を中心とし半径 $r > 0$ の開球である。各 i に対し，$n(i, \varepsilon)$ が存在して，$|\langle e_n, u_i \rangle| \leq \varepsilon/2$, $n \geq n(i, \varepsilon)$ とできる。$n(\varepsilon) = \max_{1 \leq i \leq m} n(i, \varepsilon)$ とする。$n \geq n(\varepsilon)$ に対し，$|\langle e_n, v \rangle| \leq \varepsilon$, $v \in W$ である。よって，

$$2 \langle e_n, tv \rangle - \frac{1}{n} < 2\varepsilon |t| \text{ for all } t \in \mathbb{R}, v \in W, n \geq n(\varepsilon)$$

一方，

$$2 \langle e_n, tv \rangle - \frac{1}{n} \leq 2 \|v\| |t| - \frac{1}{n(\varepsilon)} \leq 0 \text{ if } |t| \leq \frac{1}{2Kn(\varepsilon)}, \ v \in W, 1 \leq n \leq n(\varepsilon),$$

がいえる，但し $K = 1 + \max\{\|v\| : v \in W\}$。従って，$|t| \leq \frac{1}{2Kn(\varepsilon)}$, $v \in W$ に対して，$\sup_{n \geq 1}\{2 \langle e_n, tv \rangle - \frac{1}{n}\} \leq 2\varepsilon |t|$ がいえる。よって

$$0 \leq \left| \frac{F(tv)}{t} \right| = \frac{F(tv)}{|t|} \leq 2\varepsilon \text{ for } |t| \leq \frac{1}{2Kn(\varepsilon)}, v \in W,$$

となり，$\frac{F(tv)}{t} \to 0$（$t \to 0$）$v \in W$ について一様収束，がいえる。$F(0) = 0$ から，F は $u = 0$ でアダマール微分可能で，$F'(0) = 0$ となる。

今，$t_n = 1/n$ として，点列 $\{e_n\}$ と $\{t_n\}$ を考える。明らかに，$t_n \to 0$ in $\mathbb{R}$ であり，$e_n \rightharpoonup 0$ weakly in H，である。仮に F が $u = 0$ で w-アダマール微分可能ならば，以下になるだろう。

$$\frac{F(t_n e_n)}{t_n} \to 0 \text{ in } \mathbb{R} \text{ as } n \to \infty.$$

しかし，

$$\begin{aligned} \frac{F(t_n e_n)}{t_n} &= nF(\frac{e_n}{n}) = n \sup_{m \geq 1}\{2 \left\langle e_m, \frac{e_n}{n} \right\rangle - \frac{1}{m}\} \\ &\geq n\{2 \left\langle e_n, \frac{e_n}{n} \right\rangle - \frac{1}{n}\} = 1 \text{ for all } n \geq 1, \end{aligned}$$

であるから，F は $u = 0$ で w-アダマール微分できない。H は反射的なので，これは F が $u = 0$ でフレッシェ微分可能でないことも意味する。□

我々は，主にアダマール微分可能だが w-アダマール微分可能でない写像に関心がある。微分方程式を伴うような問題の検討に関連するこの種の 2 つの写像を扱う。我々の仮定より，それらの関数はアダマール微分可能かつ w-アダマール微分可能であるが，より強い制約がなければ，フレッシェ微分可能でなくなってしまう。

例 2.3

Ω を $\mathbb{R}^N$ の開部分集合とし，$X = Y = L^2(\Omega)$ とする。以下の性質を持つ実関数 f を考える。

(f1) $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ であり，$M > 0$ が存在して，$|f'(s)| \leq M$, $s \in \mathbb{R}$ とできる。

$|f(s)| \leq M\,|s|$, $s \in \mathbb{R}$ なので，以下のように写像 $F: X \to X$ を定義できる。

$$F(u)(x) = f(u(x)) \text{ for } u \in X, x \in \Omega. \tag{2.1}$$

さらに，任意の $u \in X$ に対し，作用素 $T_u \in B(X,X)$ を以下のように定義できる。

$$T_u(v)(x) = f'(u(x))v(x) \text{ for } v \in X, x \in \Omega. \tag{2.2}$$

ここで，$F: X \to X$ が持ついくつかの性質を示す。

(i) F は X 上で Lipschitz 連続である。

(ii) F は全ての $u \in X$ でアダマール微分可能で $F'(u) = T_u$ となる。

(iii) F は全ての $u \in X$ で w-アダマール微分可能である。

(i) $|f(s) - f(t)| \leq M\,|s-t|$，$s, t \in \mathbb{R}$ であることから，以下がただちにわかる。

$$\|F(u) - F(v)\| \leq M\,\|u - v\| \text{ for } u, v \in X.$$

(ii) 最初に関数 $F: X \to Y$ は全ての $u \in X$ でガトー微分可能で，$F'(u) = T_u$ であることを見る。この主張を示すために，$u, v \in X$ と $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ を考える。すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{F(u+tv) - F(u)}{t} - T_u(v) \\
&= t^{-1}\{f(u+tv) - f(u) - tvf'(u)\} \\
&= t^{-1}\{\int_0^1 \frac{d}{d\tau} f(u+\tau tv)d\tau - tvf'(u)\} \\
&= v\int_0^1 f'(u+\tau tv) - f'(u)d\tau
\end{aligned}$$

となり，従って，

$$\left\|\frac{F(u+tv) - F(u)}{t} - T_u(v)\right\| = \{\int_\Omega v^2[\int_0^1 f'(u+\tau tv) - f'(u)d\tau]^2 dx\}^{1/2}.$$

となる。f' が $\mathbb{R}$ 上連続で，全ての s で $|f'(s)| \leq M$ より，優収束定理から主張はいえる。性質（b）から F が全ての $u \in X$ でアダマール微分可能であることが分かる。

(iii) 証明のために，$\varphi, v \in X$ と，$t_n \to 0$，$v_n \rightharpoonup v$ weakly in H である点列 $\{t_n\} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ と $\{v_n\} \subset X$ を考える。X^* と X を同一視し，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を通常の $X = L^2(\Omega)$ のスカラー積とする。

$$\langle T_u v_n, \varphi\rangle \to \langle T_u v, \varphi\rangle$$

であることから，以下が示せればよい。

$$\left\langle \frac{F(u+t_n v_n) - F(u)}{t_n} - T_u v_n, \varphi \right\rangle \to 0. \tag{2.3}$$

今，

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \frac{F(u+t_n v_n)-F(u)}{t_n} - T_u v_n, \varphi \right\rangle \\
&= t_n^{-1} \int_\Omega [f(u+t_n v_n) - f(u) - t_n v_n f'(u)]\varphi dx \\
&= \int_\Omega \varphi(x) v_n(x) \{ \int_0^1 f'(u(x)+st_n v_n(x)) - f'(u(x)) ds \} dx,
\end{aligned}
$$

がいえる。従って，

$$
\begin{aligned}
&\left| \left\langle \frac{F(u+t_n v_n)-F(u)}{t_n} - T_u v_n, \varphi \right\rangle \right| \\
&\leq \|v_n\| \, [\int_\Omega \varphi(x)^2 \{ \int_0^1 f'(u(x)+st_n v_n(x)) - f'(u(x)) ds \}^2 dx]^{1/2} \\
&\leq C[\int_\Omega \varphi(x)^2 \{ \int_0^1 f'(u(x)+st_n v_n(x)) - f'(u(x)) ds \}^2 dx]^{1/2}
\end{aligned}
$$

但し，全ての n で $\|v_n\| \leq C$

$$
A_n = \{ x \in \Omega : |v_n(x)| \geq |t_n|^{-1/2} \},
$$

とすると，

$$
C^2 \geq \int_\Omega v_n(x)^2 dx \geq \int_{A_n} v_n(x)^2 dx \geq \frac{|A_n|}{|t_n|} \text{ for all } n
$$

がいえる，ここで，$|A_n|$ は A_n の $N-$ 次元ルベーグ測度である。よって $|A_n| \to 0$ （$n \to \infty$）。しかし，

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_\Omega \varphi(x)^2 \{ \int_0^1 f'(u(x)+st_n v_n(x)) - f'(u(x)) ds \}^2 dx \\
&\leq 4M^2 \int_{A_n} \varphi(x)^2 dx + \int_{\Omega \setminus A_n} \varphi(x)^2 \{ \int_0^1 f'(u(x)+st_n v_n(x)) - f'(u(x)) ds \}^2 dx
\end{aligned}
$$

となる，ここで，

$$
\int_{A_n} \varphi(x)^2 dx \to 0 \ \ (|A_n| \to 0 \text{ より}),
$$

である。例えば，系 3.6[8] 参照。さらに，

$$
0 \leq \chi_{\Omega \setminus A_n}(x) \varphi(x)^2 \{ \int_0^1 f'(u(x)+st_n v_n(x)) - f'(u(x)) ds \}^2 \leq 4M^2 \varphi(x)^2
$$

a.e. on Ω がいえるので，以下がいえるのであれば，優収束定理から（2.3）がいえる。

$$
\chi_{\Omega \setminus A_n}(x) \varphi(x) \int_0^1 f'(u(x)+st_n v_n(x)) - f'(u(x)) ds \to 0 \text{ as } n \to \infty
$$

a.e. $x \in \Omega$。（測度 0 の集合上で，u と φ を修正することで，$|u(x)| < \infty$ と $|\varphi(x)| < \infty$ が全ての $x \in \Omega$ でいえる，としてよい。）

$\varepsilon > 0$，$x \in \Omega$ とする。$\delta(\varepsilon, x) > 0$ が存在して，

$$|\varphi(x)|\,|f'(u(x)+s) - f'(u(x))| \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad |s| \leq \delta(\varepsilon, x)$$

であり，$n(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$|t_n|^{1/2} \leq \delta(\varepsilon, x) \text{ for } n \geq n(\varepsilon, x).$$

とできる。従って，$x \notin A_n$ に対し，$|st_n v_n(x)| \leq |t_n|^{1/2}$，$s \in [0,1]$, であることから，

$$\begin{aligned}
&\left|\chi_{\Omega\setminus A_n}(x)\varphi(x)\int_0^1 f'(u(x)+st_n v_n(x)) - f'(u(x))ds\right| \\
&\leq \chi_{\Omega\setminus A_n}(x)\int_0^1 |\varphi(x)|\,|f'(u(x)+st_n v_n(x)) - f'(u(x))|\,ds \\
&\leq \begin{cases} 0 & x \in A_n \\ \varepsilon \ \ x \in \Omega\setminus A_n & , n \geq n(\varepsilon, x). \end{cases}
\end{aligned}$$

よって

$$\left|\chi_{\Omega\setminus A_n}(x)\varphi(x)\int_0^1 f'(u(x)+st_n v_n(x)) - f'(u(x))ds\right| \leq \varepsilon \text{ for all } n \geq n(\varepsilon, x),$$

となることから，

$$\chi_{\Omega\setminus A_n}(x)\varphi(x)\int_0^1 f'(u(x)+st_n v_n(x)) - f'(u(x))ds \to 0 \text{ as } n \to \infty,$$

a.e. on Ω が示せた。（2.3）がいえたので，F は u で w-アダマール微分可能である。□

注意　仮にある $u \in X$ が存在して，F が u でフレッシェ微分可能になるなら，f' は，$\mathbb{R}$ 上定値でなければならず，従って F は線形となることがよく知られている。例えば，命題 0.2.8[2] を参照。

一方，フレッシェ微分可能性は，f に関しての代替作用素の定義域を変えることで回復する。全ての $p \in [2, 2^*)$ において，$H^1(\Omega)$ が $L^p(\Omega)$ に連続に埋め込まれるように，Ω は Lipschitz 境界をもつとする，但し，$2^* = \frac{2N}{N-2}$（$N \geq 3$），$2^* = \infty$ ($N = 1, 2$) とする。（[5] の系 IX.13 と [1] の Lemma A 5.8 参照）。ここで仮定 (f1) のもとで，（2.1）によって定義された写像 $F_1 : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ を考える。また，$u, v \in H^1(\Omega)$，$2 \leq 2p < 2^*$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ に対し，以下のことがいえることに注意。

$$\begin{aligned}
|F_1(u+v) - F_1(u) - T_u(v)|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega v^2 [\int_0^1 f'(u+\tau v) - f'(u)d\tau]^2 dx \\
&\leq \{\int_\Omega v^{2p}dx\}^{\frac{1}{p}}\{\int_\Omega [\int_0^1 f'(u+\tau v) - f'(u)d\tau]^{2q}dx\}^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C_p\|v\|^2_{H^1(\Omega)}\{\int_\Omega\int_0^1 \left|f'(u+\tau v) - f'(u)\right|^{2q} d\tau dx\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

従って，仮に p を，

$$R(v) = \int_\Omega \int_0^1 \left| f'(u+\tau v) - f'(u) \right|^{2q} d\tau dx \to 0 \text{ as } \|v\|_{H^1(\Omega)} \to 0.$$

となるように選べるならば，$F_1 : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ は u でフレッシェ微分可能である。仮にそうならないとするなら，$H^1(\Omega)$ において 0 に収束する点列 $\{v_n\}$ と $\delta > 0$ をとり，全ての n で，$R(v_n) \geq \delta$ とできる。部分列をとることで，$v_n \to 0$ a.e. on Ω であるとしてよい。

Ω が有界ならば，優収束定理から，$R(v_n) \to 0$ がいえる。従って，仮に，

（a）Ω が Lipschitz 境界をもつ有界であり，かつ

（b）f が (f1) を満たす，ならば，$F_1 : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ は全ての $u \in H^1(\Omega)$ においてフレッシェ微分可能である。実際，Ω は Lipschitz 境界をもつ有界であることから，$H^1(\Omega)$ は $L^2(\Omega)$ にコンパクトに埋め込まれ，F のアダマール微分可能性と性質 (c) から，F_1 のフレッシェ微分可能性がいえる。

Ω が非有界で，さらに $f \in C^2(\mathbb{R})$ で $\sup_{s\in\mathbb{R}} |f''(s)| \leq K$ を仮定する。すると，

$$R(v) \leq \int_\Omega \int_0^1 [K|\tau v|]^{2q} d\tau dx \leq [K|v|_{L^{2q}(\Omega)}]^{2q} \leq [KC_{2q}|v|_{H^1(\Omega)}]^{2q}$$

である，但し $2 \leq 2q < 2^*$ とする，あるいは $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ より $2^*/(2^*-2) < p \leq \infty$ としても同様。従って p についての全ての要請を満たすためには $2^*/(2^*-2) < 2^*/2$ でなければならず，これは $N \leq 3$ であることと同値である。

最後に，N についての制約は，十分大きな k で，$F_k : H^k(\Omega) \to L^2(\Omega)$，$F_k(u(x)) = f(u(x))$ を考えることによって取り除くことができることを見ておく。実際，それによって $H^k(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ に連続に埋め込まれるのだから，$k > N/4$ となる，但し，$p \in [2, 2_k^*)$ は，$N \leq 2k$ に対しては，$2_k^* = \infty$，$N \geq 2k+1$ に対しては，$2_k^* = \frac{2N}{N-2k}$ となるものである。従って，仮に，

（a）Ω が Lipschitz 境界をもつ非有界であり，かつ

（b）f は (f1) と $f \in C^2(\mathbb{R})$ を満たし，$\sup_{s\in\mathbb{R}} |f''(s)| \leq K$ とする，

ならば，$F_k : H^k(\Omega) \to L^2(\Omega)$ は全ての $u \in H^k(\Omega)$ についてフレッシェ微分可能である。

例 2.4　この例においては，$X = H^1(\mathbb{R}^N)$，$Y = L^2(\mathbb{R}^N)$ を考える。

ξ，$\eta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ は可測関数で，$\xi\eta \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ とし，f は (f1) を満たす，とする。

$|f(\eta(x)u(x))| \leq M|\eta(x)u(x)|$ より，$F : X \to Y$ を

$$F(u)(x) = \xi(x) f(\eta(x)u(x)) \text{ for } u \in X, x \in \mathbb{R}^{N.}. \tag{2.4}$$

と定義する。各 $u \in X$ に対し，作用素 $T_u \in B(X, Y)$ を以下のように定義する。

$$T_u(v)(x) = \xi(x)\eta(x) f'(\eta(x)u(x)) v(x) \text{ for } v \in X, x \in \mathbb{R}^{N.}. \tag{2.5}$$

ここで，この写像が以下の性質を満たすことを示す:

（i）F は X 上で Lipschitz 連続である。

（ii）F は全ての $u \in X$ でアダマール微分可能であり，$F'(u) = T_u$ である。

（iii）F は全ての $u \in X$ において w-アダマール微分可能である。

（i）$|f(s) - f(t)| \leq M|s-t|$, $s, t \in \mathbb{R}$, であることより，$|F(u) - F(v)|_2 \leq |\xi\eta|_\infty M|u-v|_2 \leq |\xi\eta|_\infty M\|u-v\|$，$u, v \in X$, である，ここで，$|\cdot|_p$ は $L^p(\mathbb{R}^N)$ の通常のノルムで，$\|\cdot\|$ はスカラー積

$$\langle u, v\rangle_1 = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + uv\, dx$$

に関する $X = H^1(\mathbb{R}^N)$ 上のノルムである。

（ii）まず，$F : X \to Y$ は全ての $u \in X$ でガトー微分可能で，$F'(u) = T_u$ である。この主張を見るため，$u, v \in X$，$t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ を考える。すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{F(u+tv) - F(u)}{t} - T_u(v) \\
&= t^{-1}\xi\{f(\eta[u+tv]) - f(\eta u) - tv\eta f'(\eta u)\} \\
&= t^{-1}\xi\{\int_0^1 \frac{d}{ds} f(\eta[u+stv])ds - tv\eta f'(\eta u)\} \\
&= v\xi\eta \int_0^1 f'(\eta[u+stv]) - f'(\eta u)ds
\end{aligned}$$

となるので，

$$\left|\frac{F(u+tv) - F(u)}{t} - T_u(v)\right|_2 \leq |\xi\eta|_\infty \{\int_{\mathbb{R}^N} v^2 [\int_0^1 f'(\eta[u+stv]) - f'(\eta u)ds]^2 dx\}^{1/2}$$

がいえ，優収束定理から主張がいえる。

性質（b）を使うと，$F : X \to Y$ は全ての $u \in X$ で，アダマール微分可能であることが分かる。

（iii）これを示すために，$\varphi, v \in X$ と，$t_n \to 0$，$v_n \rightharpoonup v$ weakly in X となる，点列 $\{t_n\} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ と $\{v_n\} \subset X$ を考える。すると，

$$\left\langle \frac{F(u+t_n v_n) - F(u)}{t_n} - T_u v_n, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} v_n \xi\eta\{\int_0^1 f'(\eta[u+st_n v_n]) - f'(\eta u)ds\}\varphi dx.$$

である。$|f'(s)| \leq M$，$s \in \mathbb{R}$ より，任意の $R > 0$ に対し以下がいえる。

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{|x|\geq R} v_n \xi\eta\{\int_0^1 f'(\eta[u+st_n v_n]) - f'(\eta u)ds\}\varphi dx\right| \\
&\leq 2M \int_{|x|\geq R} |v_n|\,|\xi\eta|\,|\varphi|\, dx && (2.6) \\
&\leq 2M\,|\xi\eta|_\infty\,|v_n|_2\,[\int_{|x|\geq R} |\varphi|^2 dx]^{1/2} \\
&\leq C[\int_{|x|\geq R} |\varphi|^2 dx]^{1/2} && (2.7)
\end{aligned}$$

ここで，$\{v_n\}$ が $X=H^1(\mathbb{R}^N)$ において有界，よって $L^2(\mathbb{R}^N)$ においてもそうであることから，定数 C は R と n と独立である。次に，任意の $R>0$ に対し，

$$\int_{|x|\le R} v_n\xi\eta\{\int_0^1 f'(\eta[u+st_nv_n])-f'(\eta u)ds\}\varphi dx \to 0 \text{ as } n\to\infty. \tag{2.8}$$

が成立することを示す。仮にそうでないなら，$R>0, \varepsilon>0$，点列 $\{v_{n_k}\}$ が存在して，

$$\left|\int_{|x|\le R} v_n\xi\eta\{\int_0^1 f'(\eta[u+st_nv_n])-f'(\eta u)ds\}\varphi dx\right| \ge \varepsilon \text{ for all } n_k. \tag{2.9}$$

となる。しかし，$v_{n_k}\to v$（$L^2(B(0,R))$ における強収束）から，さらに部分列をとることによって，次のような $w\in L^2(B(0,R))$ が存在するとしてよい。

$$|v_{n_k}|\le w \text{ a.e. on } B(0,R) \text{ かつ}$$
$$v_{n_k}\to w \text{ a.e. on } B(0,R).$$

（[5] の定理 IV.6 を参照）従って，

$$\left|v_{n_k}\xi\eta\{\int_0^1 f'(\eta[u+st_{n_k}v_{n_k}])-f'(\eta u)ds\}\varphi\right| \le 2Mw\,|\xi\eta|_\infty\,|\varphi| \text{ for all } n_k$$

但し，$2Mw\,|\xi\eta|_\infty\,|\varphi|\in L^1(B(0,R))$ で，また，$t_{n_k}v_{n_k}\to 0$ a.e. on $B(0,R)$ より，

$$v_{n_k}\xi\eta\{f'(\eta[u+st_{n_k}v_{n_k}])-f'(\eta u)\}\varphi\to 0 \text{ a.e. on } B(0,R), s\in[0,1]\ (n_k\to\infty)$$

である。優収束定理から

$$\int_{|x|\le R} v_{n_k}\xi\eta\{\int_0^1 f'(\eta[u+st_{n_k}v_{n_k}])-f'(\eta u)ds\}\varphi dx\to 0,$$

が成立するが，（2.9）に矛盾。よって，（2.8）がいえ，（2.7）と合わせて，

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\left\langle\frac{F(u+t_nv_n)-F(u)}{t_n}-T_uv_n,\varphi\right\rangle\right| \le C[\int_{|x|\ge R}|\varphi|^2\,dx]^{1/2} \text{ for } R>0.$$

がいえる。しかし，$\varphi\in X\subset L^2(\mathbb{R}^N)$ であることから，

$$\lim_{R\to\infty}\int_{|x|\ge R}|\varphi|^2\,dx=0$$

であり，かつ，

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle\frac{F(u+t_nv_n)-F(u)}{t_n}-T_uv_n,\varphi\right\rangle=0$$

が成立する。

$$\langle T_uv_n,\varphi\rangle\to\langle T_uv,\varphi\rangle$$

であることより，F は u において w-アダマール微分可能である。□

注意　仮に (f1) に加えて，関数 f が，$\sup_{s\in\mathbb{R}}|f(s)|<\infty$ という意味で有界かつ $\xi\in L^2(\mathbb{R}^N)$ ならば，写像 $F:X\to Y$ はコンパクトである。実際，任意の $\varepsilon>0$ に対し，これらの追加的仮定から，$R_\varepsilon>0$ が存在して，

$$\int_{|x|\geq R_\varepsilon}|\xi f(\eta u)|^2\,dx\leq\sup_{s\in\mathbb{R}}|f(s)|^2\int_{|x|\geq R_\varepsilon}\xi^2dx\leq\varepsilon \text{ for } u\in X.$$

となる。

$X=H^1(\mathbb{R}^N)$ における任意の有界点列 $\{u_n\}$ から，$u\in X$ に弱収束する部分列 $\{u_{n_k}\}$ を選び出すことができる。よって，任意の $\varepsilon>0$ に対し，

$$\begin{aligned}|F(u_{n_k})-F(u)|_2^2&\leq\int_{|x|\leq R_\varepsilon}\{\xi f(\eta u_{n_k})-\xi f(\eta u)\}^2dx+4\varepsilon\\&\leq\int_{|x|\leq R_\varepsilon}\{\xi M\eta(u_{n_k}-u)\}^2dx+4\varepsilon\\&\leq M^2\,|\xi\eta|_\infty^2\int_{|x|\leq R_\varepsilon}(u_{n_k}-u)^2dx+4\varepsilon\end{aligned}$$

が分かる，但し，

$$\lim_{n_k\to\infty}\int_{|x|\leq R_\varepsilon}(u_{n_k}-u)^2dx=0$$

が $H^1(B(0,R_\varepsilon))$ の $L^2(B(0,R_\varepsilon))$ への埋め込みのコンパクト性からいえている。従って，

$$\limsup_{n_k\to\infty}|F(u_{n_k})-F(u)|_2^2\leq 2\varepsilon \text{ for } \varepsilon>0,$$

となり，$|F(u_{n_k})-F(u)|_2\to 0$，またそこから F がコンパクトであることが示せる。

しかしながら，もし，$\liminf_{|x|\to\infty}\xi(x)\eta(x)>0$ かつ $f'(0)\neq 0$ ならば，$F'(0)=T_0:X\to Y$ はコンパクト線形作用素ではない。

性質（d）から，これらの追加的仮定のもとでは，F は $u=0$ でフレッシェ微分可能ではない。さらに，これらの議論で分かることは，この状況は F の定義域としてより高い次元のソボレフ空間を使っても改善されないということである。より正確にいうと，

（a）$f\in C^1(\mathbb{R})$, $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$, $\sup_{s\in\mathbb{R}}|f(s)|+|f'(s)|<\infty$ かつ,

（b）ξ，$\eta:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ は可測関数で，$\xi\in L^2(\mathbb{R}^N),\xi\eta\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ かつ $\liminf_{|x|\to\infty}\xi(x)\eta(x)>0$ を満たす

とする時，（2.4）によって定義された作用素 $F_k:H^k(\mathbb{R}^N)\to L^2(\mathbb{R}^N)$ は $u=0$ でフレッシェ微分可能ではない。

従って, 任意の $k\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ に対し, 式 $e^{-|x|}\sin\left(e^{|x|}u(x)\right)$ は, 全ての $u\in H^k(\mathbb{R}^N)$ でアダマール微分可能かつ w-アダマール微分可能だが, $u=0$ でフレッシェ微分可能でない写像 $F_k:H^k(\mathbb{R}^N)\to L^2(\mathbb{R}^N)$ を定めている。

3.　分岐の必要条件

まず，F がアダマール，w-アダマール微分可能であっても，式（1.1）のすべての分岐点が，$F'(0)$ のスペクトルに属するとはいえないことを見ることから始める。

例 3.1　$F : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ を（2.1）で定義し，(f1) と式（1.1）を満たす f を考える。この場合，閉区間 $G = [a, b]$ を，

$$g(s) = \begin{cases} \frac{f(s)}{s} & \text{for } s \neq 0 \\ f'(0) & \text{for } s = 0 \end{cases}.$$

で定義された連続関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の値域の閉包とすると，$B_F = G$ であることを主張する。一方で，例 2.3 から，F は $X = L^2(\Omega)$ のすべての点においてアダマールと w-アダマール微分可能で，$F'(0) = f'(0)I$ であることは分かっている。従って，$\sigma(F'(0)) = \{f'(0)\}$ で，かつ

$$B_F \subset \sigma(F'(0)) \Longleftrightarrow G = \{f'(0)\} \Longleftrightarrow f \text{ が線形}$$

である。我々の主張を示すために，まず，ある $s \neq 0$ に対し，$\lambda = g(s)$ となることを仮定する。ω_n を，その $N-$ 次元ルベーグ測度 $|\omega_n|$ が $1/n$ であるような Ω の部分集合とする。ここで $L^2(\Omega)$ の要素 u_n を $u_n = s\chi_{\omega_n}$ として定義する，但し χ_{ω_n} は ω_n の特性関数である。明らかに，

$$F(u_n)(x) = f(0) = \lambda u_n(x) \text{ for } x \in \Omega \backslash \omega_n,$$
$$F(u_n)(x) = g(u_n(x))u_n(x) = g(s)u_n(x) = \lambda u_n(x) \text{ for } x \in \omega_n,$$

であり，実際，$1/n \leq |\Omega|$ である全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して (λ, u_n) は（1.1）の解である。明らかに $|u_n|_2 = |s| / \sqrt{n}$ であり，$\lambda \in B_F$ がいえる。従って，$\{g(s) : s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}\} \subset B_F$。しかし，分岐点の集合は常に閉集合であり，従って 0 における g の連続性から，$G \subset B_F$ がいえる。

逆に，$\lambda \in B_F$ とすると，任意の $n \in \mathbb{N}$ で $|u_n|_2 > 0$ で，$\lambda_n \to \lambda$，$|u_n|_2 \to 0$ である点列 $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbb{R} \times L^2(\Omega)$ が存在する。しかし，

$$F(u_n) = \lambda_n u_n \Longrightarrow \{g(u_n(x)) - \lambda_n\} u_n(x) = 0 \text{ a.e. on } \Omega$$

であり，よって，$u_n \not\equiv 0$ より，λ_n は g の値域に属さねばならない。従って，$\lambda \in G$ かつ $B_F \subset G$.□

ここで，フレッシェ微分可能性を要求しない，ある点が分岐点であるための必要条件を与える結果を形成する。

今後，$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を実ヒルベルト空間とする。よく知られているように，それは自己共役同型作用素によって，以下のように分解される。例えば，[9] の XVIII 章 系 5.2 を参照。

命題 3.1

$T : H \to H$ を自己共役作用素とする。

（1）$T(H_\pm) \subset H_\pm$ かつ

$$\sup\{\langle Tu, u\rangle : u \in H_- \text{ and } \|u\| = 1\} < 0 < \inf\{\langle Tu, u\rangle : u \in H_+ \text{ and } \|u\| = 1\}$$

であるような，H の一意の直交分解 $H_+ \oplus H_-$ が存在する。

$P_\pm(= P_\pm(T))$ を，それぞれ $H_\pm$ 上への対応する直交射影とし，$J = P_+ - P_-$ とする。

（2）その時，$P_\pm T = TP_\pm$ かつ，

$$\langle Tu, Ju\rangle \geq \alpha \|u\|^2 \text{ for } u \in H$$

但し，$\alpha = \min\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = d(0, \sigma(T))$。

（3）

$$\langle u, v\rangle_T = \langle Tu, Jv\rangle \text{ for all } u, v \in H,$$

とすると，$\langle\cdot,\cdot\rangle_T$ は H 上のスカラー積で，そのノルム $\|\cdot\|_T$ は $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$ と同等である。

定義　自己共役同型作用素 $T : H \to H$ は，$rgeP_-(T)$ が有限次元のとき，**本質的に正**（**essentially positive**）である，という。これは，$\sigma_e(T)$ を T の本質的スペクトルとした時の，$\inf \sigma_e(T) > 0$ という性質と同じことである。同様に，T は $-T$ が本質的に正であるとき，**本質的に負**（**essentially negative**）である，という。（$\sup \sigma_e(T) < 0$ と同値である）。

定理 3.2

$F(0) = 0$ なる関数 $F : H \to H$ を考える。以下を仮定する。

（H1）$F : H \to H$ は $u = 0$ で，w-アダマール微分可能で，$T = F'(0) - \mu I \in B(H, H)$ は自己共役同型作用素である。

（H2）（i）T が本質的に正かつ，

$$\lim \inf_{\|u\| \to 0} \frac{\langle F(u) - F'(0)u, u\rangle}{\|u\|_T^2} > -1,$$

であるか，（ii）T が本質的に負かつ，

$$\lim \sup_{\|u\| \to 0} \frac{\langle F(u) - F'(0)u, u\rangle}{\|u\|_T^2} < 1.$$

であるかのどちらかである。

その時，μ は，式 $F(u) = \lambda u$ の分岐点ではない。

注意 1　条件（H2）（i）は，

$$（\text{H2'}）（\text{i}）\mu < \inf \sigma_e(F'(0)) \text{ かつ} \lim \inf_{\|u\| \to 0} \frac{\langle F(u) - F'(0)u, u \rangle}{\|u\|^2} > -d(\mu, \sigma(F'(0)).$$

であれば，満たされる。実際，$\|u_n\| \to 0$ かつ

$$\frac{\langle F(u_n) - F'(0)u_n, u_n \rangle}{\|u_n\|_T^2} \to L = \lim \inf_{\|u\| \to 0} \frac{\langle F(u) - F'(0)u, u \rangle}{\|u\|_T^2}.$$

である点列 $\{u_n\} \subset H \backslash \{0\}$ を考える。$\langle F(u_n) - F'(0)u_n, u_n \rangle < 0$，$n \geq n_0$，と仮定してもよい，なぜなら，そうでない時は $L \geq 0$ で，明らかに（H2）は満たされるからである。しかし，それによって，$J = P_+(T) - P_+(T)$ として，（H1）から，$T = F'(0) - \mu I$ は同型作用素であり，命題 3.1（2）から

$$\langle [F'(0) - \mu I]u, Ju \rangle \geq d(\mu, \sigma(F'(0)) \|u\|^2 \text{ for all } u \in H$$

であることから，$n \geq n_0$ に対して，

$$\begin{aligned}\frac{\langle F(u_n) - F'(0)u_n, u_n \rangle}{\|u_n\|_T^2} &= \frac{\langle F(u_n) - F'(0)u_n, u_n \rangle}{\|u_n\|^2} \frac{\|u_n\|^2}{\langle [F'(0) - \mu I]u_n, Ju_n \rangle} \\ &\geq \frac{\langle F(u_n) - F'(0)u_n, u_n \rangle}{\|u_n\|^2} \frac{1}{d(\mu, \sigma(F'(0))}\end{aligned}$$

が分かる。従って，（H2'）（i）から，主張したような，

$$L \geq \frac{1}{d(\mu, \sigma(F'(0))} \lim \inf_{n \to \infty} \frac{\langle F(u_n) - F'(0)u_n, u_n \rangle}{\|u_n\|^2} > -1,$$

が成立する。

同様に，条件（H2）（ii）は，仮に，

$$（\text{H2'}）（\text{ii}）\mu > \sup \sigma_e(F'(0)) \text{ かつ } \lim \sup_{\|u\| \to 0} \frac{\langle F(u) - F'(0)u, u \rangle}{\|u\|^2} < d(\mu, \sigma(F'(0)).$$

であれば，満たされる。

系 3.1

$F : H \to H$ を，$F(0) = 0$ かつ F が $u = 0$ のおいて w-アダマール微分可能で，$F'(0) = F'(0)^*$ となる関数とする。$\mu \notin \sigma(F'(0))$ を仮定する。

仮に，（i）$\mu < \inf \sigma_e(F'(0))$ かつ，

$$\lim \inf_{\|u\| \to 0} \frac{\langle F(u) - F'(0)u, u \rangle}{\|u\|^2} > -d(\mu, \sigma(F'(0)),$$

もしくは，

（ii）$\mu > \sup \sigma_e(F'(0))$ かつ，

$$\lim \sup_{\|u\|\to 0} \frac{\langle F(u) - F'(0)u, u\rangle}{\|u\|^2} < d(\mu, \sigma(F'(0)),$$

のどちらかであるとき，μ は $F(u) = \lambda u$ の分岐点ではない。

定理の証明　条件（H1）と（H2）（i）が満たされるとする。

仮に μ が式 $F(\lambda, u) = 0$ の分岐点であるなら，全ての $n \in \mathbb{N}$ において $F(u_n) = \lambda_n u_n$ で，$\lambda_n \to \mu$ かつ $\|u_n\| \to 0$ である点列 $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ と $\{u_n\} \subset H\backslash\{0\}$ が存在する。$t_n = \|u_n\|$, $v_n = u_n / \|u_n\|$ と置くと，$v_n \rightharpoonup 0$ weakly in H であることをいう。実際，もしそうでないとすると，

$$|\langle v_{n_k}, \varphi\rangle| \geq \varepsilon \text{ for all } n_k. \tag{3.1}$$

なる $\varphi \in H$，$\varepsilon > 0$ と点列 $\{v_{n_k}\}$ が存在する。さらに部分列をとると，$\langle v_{n_k} - v, \varphi\rangle \to 0$ となるような $v \in H$ が存在する，と仮定してもよい。しかし，それによって，$F : H \to H$ が $u = 0$ で w-アダマール微分可能であることから，

$$\frac{F(u_{n_k})}{\|u_{n_k}\|} = \frac{F(t_{n_k} v_{n_k}) - F(0)}{t_{n_k}} \rightharpoonup F'(0)v \text{ weakly in } H,$$

がいえる。しかし，

$$\frac{F(u_{n_k})}{\|u_{n_k}\|} = \lambda_{n_k} v_{n_k} \rightharpoonup \mu v,$$

でもある，よって，$F'(0)v = \mu v$ で，それより，$F'(0) - \mu I : H \to H$ が同型作用素であることから，$v = 0$ である。従って，$v_{n_k} \rightharpoonup 0$ weakly in H であり，（3.1）に矛盾。従って，$v_n \rightharpoonup 0$ weakly in H

次に，$P_\pm = P_\pm(T)$ を，命題 3.1 経由の，自己共役作用素 $T = F'(0) - \mu I : H \to H$ に伴う直交射影とし，$J = P_+ - P_-$ とする。その時，

$$\|u\|_T^2 = \langle [F'(0) - \mu I]u, Ju\rangle \text{ for all } u \in H$$

で，よって，

$$\begin{aligned}\|u_n\|_T^2 &= \langle [F'(0) - \mu I]u_n, Ju_n\rangle = \langle [F'(0) - \mu I]u_n - F(u_n) + \lambda_n u_n, Ju_n\rangle \\ &= \langle F'(0)u_n - F(u_n), Ju_n\rangle + (\lambda_n - \mu)\langle u_n, Ju_n\rangle \\ &= \langle F'(0)u_n - F(u_n), u_n - 2P_- u_n\rangle + (\lambda_n - \mu)\langle u_n, Ju_n\rangle\end{aligned}$$

である。以下のことがいえる。

$$\begin{aligned}\frac{\langle F(u_n) - F'(0)u_n, u_n\rangle}{\|u_n\|_T^2} \leq -1 &+ \left(\frac{\|u_n\|}{\|u_n\|_T}\right)^2 \frac{2\|F'(0)u_n - F(u_n)\| \|P_- v_n\|}{\|u_n\|} \\ &+ \left(\frac{\|u_n\|}{\|u_n\|_T}\right)^2 |\lambda_n - \mu| \|Jv_n\| \text{ for all } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

しかし，$F'(0)-\mu I: H \to H$ が本質的に正であることから，P_- は有限のランクをもち，よって $v_n \rightharpoonup 0$ weakly in H であることから，$\|P_- v_n\| \to 0$ である。さらに，

$$\frac{F'(0)u_n - F(u_n)}{\|u_n\|} = F'(0)v_n - \frac{F(t_n v_n)}{t_n},$$

但し，

$$\|F'(0)v_n\| \leq \|F'(0)\| \text{ かつ } \frac{F(t_n v_n)}{t_n} \rightharpoonup F'(0)0 = 0$$

である。従って，$\{\frac{\|F'(0)u_n - F(u_n)\|}{\|u_n\|}\}$ は有界数列であり，かつ，

$$\frac{2\,\|F'(0)u_n - F(u_n)\|\,\|P_- v_n\|}{\|u_n\|} \to 0.$$

である。さらに，$\|Jv_n\|^2 = \|P_+ v_n\|^2 + \|P_- v_n\|^2 = \|v_n\|^2 = 1$ であり，それから，

$$|\lambda_n - \mu|\,\|Jv_n\| \to 0.$$

がいえる。$\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|_T$ は同等なノルムなので，

$$\begin{aligned}\lim\inf_{\|u\|\to 0} \frac{\langle F(u) - F'(0)u, u\rangle}{\|u\|_T^2} &\leq \lim\inf_{n\to\infty} \frac{\langle F(u_n) - F'(0)u_n, u_n\rangle}{\|u_n\|_T^2} \\ &\leq -1\end{aligned}$$

これは（H2）（i）に矛盾。ここで，条件（H1）と（H2）（ii）が満たされていると仮定する。$G = -F$ かつ $\nu = -\mu$ とすると，$\mu \in B_F$ であることと，$\nu \in B_G$ が同値であることが分かる。$T = F'(0) - \mu I$ かつ $S = G'(0) - \nu I$ とする。明らかに，$S = -T$ かつ $P_\pm(S) = P_\mp(T)$ である。従って，$\|\cdot\|_S = \|\cdot\|_T$ であり，F を G に，μ を ν に置き換えると，条件（H1）と（H2）（i）が満たされる。従って，$\nu \notin B_G$ であり，結果として，$\mu \notin B_F$ となる。□

例 3.1（再考） 例 2.3 から $F: L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ は $u = 0$ において w-アダマール微分可能で，$F'(0) = f'(0)I$ であり，これは $\sigma(F'(0)) = \sigma_e(F'(0)) = \{f'(0)\}$ が成立する自己共役作用素であることが分かる。$G = [a, b]$ とし，例 3.1 の表記でいうと，

$$\begin{aligned}\langle F(u) - F'(0)u, u\rangle &= \int_\Omega \{g(u(x)) - f'(0)\} u(x)^2 dx \\ &\geq (a - f'(0))\,|u|_2^2\end{aligned}$$

で，よって，

$$\lim\inf_{|u|_2\to 0} \frac{\langle F(u) - F'(0)u, u\rangle}{|u|_2^2} \geq a - f'(0).$$

従って，$\mu < a$ に対して，$f'(0) \in G$ から，$F'(0) - \mu I = [f'(0) - \mu]I$ で，$f'(0) > \mu$，かつ，$f'(0) \in G$ から，

$$\lim \inf_{|u|_2 \to 0} \frac{\langle F(u) - F'(0)u, u\rangle}{|u|_2^2} > \mu - f'(0) = -d(\mu, \sigma(F'(0))).$$

がいえる。系 3.3 (i) から $\mu \notin B_F$ で，よって $B_F \subset [a, \infty)$ である。系の (ii) を使うと，$B_F \subset (-\infty, b]$ が分かる。従って系から $B_F \subset [a, b] = G$ である。

例 3.2　以下のような式を考える，

$$-\Delta u(x) + q(x)u(x) = \lambda \eta^{-1}(x) f(\eta(x)u(x)) \text{ for } u \in H^2(\mathbb{R}^N) \tag{3.2}$$

但し，$q \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ で，$q(x) \geq \delta > 0$ a.e. on $\mathbb{R}^N$ とする。

$\eta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ は，$\eta > 0$ a.e. on $\mathbb{R}^N$ である可測関数で，f は条件 (f1) を満たし，$f'(0) = 1$ である。

注意　f が条件 (f1) を満たし，$f'(0) \neq 0$ である場合は，パラメーター λ を再調整することで，例 3.2 で扱われているような場合に要約することができる。

定義　数 $\Lambda \in \mathbb{R}$ は，$\lambda_n \to \Lambda$，$|u_n|_2 \to 0$ で，$u_n \not\equiv 0$ となる解の点列 $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbb{R} \times H^2(\mathbb{R}^N)$ が存在するとき，(3.2) の L^2- 分岐点という。

$\Lambda = 0$ が (3.2) の L^2- 分岐点でないということが，以下の不等式から分かる。

$$\delta |u_n|_2^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + q u_n^2 dx = \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} \eta^{-1} f(\eta u_n) u_n dx \leq |\lambda_n| M |u_n|_2^2 .$$

$\Lambda \neq 0$ が (3.2) の L^2- 分岐点である必要条件を見付けるために，$\lambda_n \to \Lambda \neq 0$，$|u_n|_2 \to 0$ で，$u_n \not\equiv 0$ かつ $\lambda_n \neq 0$ となる解の点列 $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbb{R} \times H^2(\mathbb{R}^N)$ を考える。すると

$$\left|\eta^{-1} f(\eta u)\right|_2 \leq M |u|_2 \text{ かつ，} -\Delta + q : H^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N) \text{ は同型作用素}$$

であることから，$H^2(\mathbb{R}^N)$ において $u_n \to 0$ であることが分かる。さらに，(3.2) は，

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + quv - \lambda \eta^{-1} f(\eta u) v dx = 0 \text{ for all } v \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

と同値であり，また，

$$\langle u, v\rangle_1 = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + quvdx \tag{3.3}$$

は，$H = H^1(\mathbb{R}^N)$ 上のスカラー積で，これは $q \equiv 1$ である通常のものと同値である。ここで $(\frac{1}{\lambda_n}, u_n)$ は，ヒルベルト空間 $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ において，(1.1) の形の式を満たすことを示す。一意的な関数 $K : H \to H$ が，恒等式

$$\langle K(u), v\rangle_1 = \int_{\mathbb{R}^N} \eta^{-1} f(\eta u) v dx \text{ for } u, v \in H. \tag{3.4}$$

で定義される。(3.2) の任意の解は，等式

$$u = \lambda K(u)\ , (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times H.$$

と，さらに，$u_n \to 0$ in $H^2(\mathbb{R}^N)$ を示していることから，$\|u_n\| \to 0$ ($\|u\| = \langle u, u\rangle_1^{1/2}$) を満たしている。以降の議論では，(i) $\Lambda > 0$ と (ii) $\Lambda < 0$ の場合を別々に扱うのが便利である。

(i) $\Lambda > 0$ を仮定し，$K : H \to H$ と $\mu = 1/\Lambda$ に対して，定理 3.2 の仮定 (H1) と (H2) (ii) の確認を目指す。最初に，作用素 $L \in B(H, H)$ が，

$$\langle L(u), v\rangle_1 = \int_{\mathbb{R}^N} uvdx \text{ for all } u, v \in H$$

で定義されることを見ておく。ここで，$K : H \to H$ が $u = 0$ で w-アダマール微分可能で，導関数が $K'(0) = L$ であることを示す。そのために，$\varphi, v \in H$ と，$t_n \to 0$，$v_n \rightharpoonup v$ weakly in H なる点列 $\{t_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ と，$\{v_n\} \subset H$ を考える。すると，$\xi = \eta^{-1}$，$f'(0) = 1$ とし，例 2.4 の記法によると，

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{K(t_n v_n)}{t_n} - Lv, \varphi \right\rangle_1 &= \int_{\mathbb{R}^N} \{\frac{\eta^{-1} f(\eta t_n v_n)}{t_n} - v\}\varphi dx \\ &= \left\langle \frac{F(t_n v_n)}{t_n} - T_0 v, \varphi \right\rangle\end{aligned}$$

がいえる。$F : H \to L^2(\mathbb{R}^N)$ が $u = 0$ で w-アダマール微分可能で，$F'(0) = T_0$ であることから，$K : H \to H$ は $u = 0$ で w-アダマール微分可能で，導関数は $K'(0) = L$ である。明らかに，

$$\langle Lu, v\rangle_1 = \int_{\mathbb{R}^N} uvdx = \langle u, Lv\rangle_1 \tag{3.5}$$

より，$T = K'(0) - \mu I : H \to H$ は自己共役である。

ここで，注意として，

$$\begin{aligned}\langle [K'(0) - \mu I]u, u\rangle_1 &= \int_{\mathbb{R}^N} u^2 - \mu\{|\nabla u|^2 + qu^2\}dx \\ &= -\frac{1}{\Lambda}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + qu^2 - \Lambda u^2 dx \text{ for all } u \in H.\end{aligned}$$

である。

$\Lambda \notin \sigma(-\Delta + q)$ かつ，$\Lambda < \inf \sigma_e(-\Delta + q)$ とする。E を Λ より小さい固有値に対応する，$-\Delta + q$ の全ての固有関数で張られた $H^2(\mathbb{R}^N)$ の部分空間とする。すると，$\dim E < \infty$ であり，P を E の上への $L^2(\mathbb{R}^N)$ の直交射影であるとする。しかしながら，P は，任意の $u, v \in H$ に対し，$Pu, Pv \in H^2(\mathbb{R}^N)$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\langle Pu, v\rangle_1 &= \int_{\mathbb{R}^N} [(-\Delta + q)Pu]vdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} [(-\Delta + q)Pu]Pvdx, \\
&= \langle Pv, u\rangle_1,
\end{aligned}
$$

であり，従って H において，対称で冪等であることが示せることから，$\langle \cdot,\cdot\rangle_1$ に関して，E 上への H の直交射影になっている。特に，$P \in B(H,H)$ である。

$$
W = \{u \in H : Pu = 0\},
$$

と定めると，$u \in W$ に対し，$\|u_n - u\|_1 \to 0$ なる点列 $\{u_n\} \subset H^2(\mathbb{R}^N)$ が存在し，従って $\|(I-P)(u_n-u)\|_1 \to 0$ であることに注意。$Pu_n \in H^2(\mathbb{R}^N)$ より，$(I-P)u_n \in W \cap H^2(\mathbb{R}^N)$ であり，そこから $W \cap H^2(\mathbb{R}^N)$ は W で稠密である。

スペクトル理論より，

$$
\|u\|_1^2 = \int_{\mathbb{R}^N} [-\Delta u + qu]udx \le \Gamma \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \text{ for } u \in E
$$

が分かる，但し，$\Gamma = \max \sigma(-\Delta + q) \cap (0, \Lambda)$ で，そこから，

$$
\begin{aligned}
\langle [K'(0) - \mu I]u, u\rangle_1 &= -\frac{1}{\Lambda}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + qu^2 - \Lambda u^2 dx \\
&\ge (\frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{\Lambda})\|u\|_1^2 \text{ if } u \in E.
\end{aligned}
$$

である。一方，

$$
\|u\|_1^2 = \int_{\mathbb{R}^N} [-\Delta u + qu]udx \ge \gamma \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \text{ for } u \in W \cap H^2(\mathbb{R}^N)
$$

但し，$\gamma = \min \sigma(-\Delta + q) \cap (\Lambda, \infty)$。従って，$W \cap H^2(\mathbb{R}^N)$ は W で稠密であることから，

$$
\begin{aligned}
\langle [K'(0) - \mu I]u, u\rangle_1 &= -\frac{1}{\Lambda}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + qu^2 - \Lambda u^2 dx \\
&\le -(\frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{\gamma})\|u\|_1^2 \text{ if } u \in W.
\end{aligned}
$$

が成立する。これらの不等号から分かることは，自己共役作用素 $T = K'(0) - \mu I \in B(H,H)$ は同型作用素であり，命題 3.1 の意味での $K'(0) - \mu I$ に伴う H の分解は $H_- = W$ と $H_+ = E$ で与えられ，従って（H1）が満たされ，$K'(0) - \mu I$ が本質的に負である，ということである。さらに，$P_+ = P$ かつ，$P_- = I - P$ であり，よって，任意の $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ に対し，

$$\begin{aligned}\|u\|_T^2 &= \langle [K'(0)-\mu I]u, Pu-(I-P)u\rangle_1 \\ &= -\frac{1}{\Lambda}\int_{\mathbb{R}^N}[-\Delta u+qu-\Lambda u][Pu-(I-P)u]dx \\ &\geq \frac{1}{\Lambda}d(\Lambda,\sigma(-\Delta+q))\,|u|_2^2\end{aligned}$$

であり，よって，$H^1(\mathbb{R}^N)$ における $H^2(\mathbb{R}^N)$ の稠密性から，$u \in H$ に対し，同様の不等号が得られる。

$$\|u\|_T^2 \geq \frac{1}{\Lambda}d(\Lambda,\sigma(-\Delta+q))\,|u|_2^2 \text{ for all } u \in H.$$

条件（H2）（ii）に戻ると，$u \in H$ に対し，

$$\begin{aligned}\langle K(u)-K'(0)u,u\rangle_1 &= \int_{\mathbb{R}^N}\eta^{-1}f(\eta u)u-u^2dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}u^2\{\frac{f(\eta u)}{\eta u}-1\}dx \\ &\leq m\,|u|_2^2\end{aligned}$$

が分かる，但し，$\lim_{s\to 0}\frac{f(s)}{s}=f'(0)=1$ であることから，$m=\sup\{\frac{f(s)}{s}: s\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\}-1\geq 0$ である。従って，

$$\begin{aligned}\frac{\langle K(u)-K'(0)u,u\rangle_1}{\|u\|_T^2} &\leq \frac{m\,|u|_2^2}{\|u\|_T^2} \\ &\leq \frac{\Lambda m}{d(\Lambda,\sigma(-\Delta+q))} \text{ for all } u\in H\backslash\{0\}.\end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned}\lim\sup_{\|u\|\to 0}\frac{\langle K(u)-K'(0)u,u\rangle_1}{\|u\|_T^2} &\leq \sup_{u\in H\backslash\{0\}}\frac{\langle K(u)-K'(0)u,u\rangle_1}{\|u\|_T^2} \\ &\leq \frac{\Lambda m}{d(\Lambda,\sigma(-\Delta+q))}.\end{aligned}$$

であることが分かる。従って，条件（H2）（ii）は，仮に

$$\Lambda m < d(\Lambda,\sigma(-\Delta+q))$$

なら，満たされる。従って，もし，$0<\Lambda<\inf\sigma_e(-\Delta+q)$ かつ，

$$\frac{d(\Lambda,\sigma(-\Delta+q)}{\Lambda} > m = \sup\{\frac{f(s)}{s}: s\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\}-1,$$

なら，定理3.2から，$\mu\notin B_K$ で，それにより Λ も（3.2）の L^2- 分岐点ではないことが分かる。

$$\inf\sigma_e(-\Delta+q)\geq Q=\lim\inf_{|x|\to\infty}q(x)$$

であることに注意。特に，もし $f'(0)=\sup\{\frac{f(s)}{s}: s\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\}$ なら，その時，$m=0$ で，

$(0, \inf \sigma_e(-\Delta + q))$ における（3.2）の全ての L^2- 分岐点は $\sigma(-\Delta + q)$ に属さねばならない。

（ii）ここで，$\Lambda < 0$ とすると，これから，$E = \{0\}$ かつ，

$$\langle [K'(0) - \mu I]u, u\rangle_1 = -\frac{1}{\Lambda}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + qu^2 - \Lambda u^2 dx \geq \frac{1}{|\Lambda|}\|u\|_1^2$$

である。従って，$T = K'(0) - \mu I : H \to H$ は正の定符号同型作用素で，

$$\begin{aligned}\|u\|_T^2 = \langle [K'(0) - \mu I]u, u\rangle_1 &= -\frac{1}{\Lambda}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + qu^2 - \Lambda u^2 dx \\ &\geq \frac{\Sigma - \Lambda}{|\Lambda|}|u|_2^2 \text{ for all } u \in H\end{aligned}$$

である。但し，$\Sigma = \inf \sigma(-\Delta + q)$。さらに，$u \in H$ に対し，

$$\begin{aligned}\langle K(u) - K'(0)u, u\rangle_1 &= \int_{\mathbb{R}^N} \eta^{-1} f(\eta u)u - u^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u^2\{\frac{f(\eta u)}{\eta u} - 1\}dx \\ &\geq -n|u|_2^2\end{aligned}$$

但し，$f'(0) = 1$ より $n = 1 - \inf\{\frac{f(s)}{s} : s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\} \geq 0$ である。従って，

$$\begin{aligned}\frac{\langle K(u) - K'(0)u, u\rangle_1}{\|u\|_T^2} &\geq -\frac{n|u|_2^2}{\|u\|_T^2} \\ &\geq -\frac{n|\Lambda|}{\Sigma - \Lambda} \text{ for all } u \in H\backslash\{0\}\end{aligned}$$

がいえる，但し，$\Sigma - \Lambda = d(\Lambda, \sigma(-\Delta + q))$ である。これによって，

$$\lim \inf_{\|u\|\to 0} \frac{\langle K(u) - K'(0)u, u\rangle_1}{\|u\|_T^2} \geq -\frac{n|\Lambda|}{d(\Lambda, \sigma(-\Delta + q))}$$

がいえ，よって $n|\Lambda| < d(\Lambda, \sigma(-\Delta + q))$ ならば（H2）（i）が満たされる。従って，定理 3.2 により，仮に

$$n < \frac{d(\Lambda, \sigma(-\Delta + q))}{|\Lambda|} = \frac{\Sigma - \Lambda}{|\Lambda|} = 1 + \frac{\Sigma}{|\Lambda|}.$$

が成立するとすると，$\Lambda < 0$ は（3.2）の L^2- 分岐点ではない。この条件は $n \leq 1$ の時，任意の $\Lambda < 0$ で満たされることに注意。

結論　$\Lambda < \inf \sigma_e(-\Delta + q)$ が（3.2）の L^2- 分岐点とする。すると，

$$\Lambda > 0 \text{ かつ } \frac{d(\Lambda, \sigma(-\Delta + q)}{\Lambda} \leq m = \sup\{\frac{f(s)}{s} : s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\} - 1,$$

か，

$$\Lambda < 0 \text{ かつ } 1 < \frac{d(\Lambda, \sigma(-\Delta+q))}{|\Lambda|} \le n = 1 - \inf\{\frac{f(s)}{s} : s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}.$$

のどちらかが成立する。

注意　仮に，

$$0 \le \frac{f(s)}{s} \le 1 = f'(0) \text{ for all } s \ne 0,$$

とすると，$m = 0$ かつ $n \le 1$ である。したがって，$(-\infty, \inf\sigma_e(-\Delta+q))$ における，(3.2) の任意の L^2- 分岐点は $\sigma(-\Delta+q)$ に属さねばならない。

仮に例 3.2 に対する仮定に加えて，$\eta^{-1} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ かつ，$\sup_{s\in\mathbb{R}} |f(s)| < \infty$ を仮定すると，

$$F_2(u)(x) = \eta^{-1}(x)f(\eta(x)u(x))$$

で定義された写像 $F_2 : H^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ は $u = 0$ でフレッシェ微分可能ではない。例 2.4. の後の注意を参照。これらの追加的仮定のもとで，定理 3.2. を通して (3.2) を扱うために導入された写像 $K : H \to H$ はコンパクトでやはり，$u = 0$ でフレッシェ微分可能でない（同様の理由で）。

4.　分岐の十分条件

ここで，系 3.3 の必要条件に使われたものと同様の脈絡で，λ が式 $F(u) = \lambda u$ に対する分岐点になる十分条件を与える [6] からの結果を述べる。

3 節と同様に，$(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ は実ヒルベルト空間とする。

定理 4.1

$F : H \to H$ を $u = 0$ でアダマール微分可能もしくは w-アダマール微分可能な関数で，$F'(0) \in B(H, H)$ は自己共役とする。

$$\Lambda_e = \inf\sigma_e(F'(0)) \text{ かつ } \Lambda^e = \sup\sigma_e(F'(0))$$

とする。以下のような追加的仮定をする。

(i) $\varphi(0) = 0$ かつ,

$$\varphi'(u)v = \langle F(u), v\rangle \text{ for all } u, v \in H$$

であるような，ポテンシャル $\varphi \in C^1(H, \mathbb{R})$ が存在する。さらに，φ は偶関数で，任意の $u \in H\backslash\{0\}$ で $2\varphi(u) \ne \langle F(u), u\rangle$ である。

(ii) $F : H \to H$ はコンパクトである。

(iii) $\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle F(u),u\rangle}{\|u\|^2} = 0.$

（A）その時，

$$[\Lambda_e, 0] \cup [0, \Lambda^e] \subset B_F$$

である。

（B）仮に $\Lambda^e \geq 0$ で，

$$\langle F'(0)u, u\rangle \geq \langle F(u), u\rangle \text{ かつ}, 2\varphi(u) > \langle F(u), u\rangle \text{ for all } u \in H\backslash\{0\},$$

ならば，$\sigma(F'(0)) \cap (\Lambda^e, \infty) \subset B_F$ でもある。

（C）仮に $\Lambda_e \leq 0$ で，

$$\langle F'(0)u, u\rangle \leq \langle F(u), u\rangle \text{ かつ}, 2\varphi(u) < \langle F(u), u\rangle \text{ for all } u \in H\backslash\{0\},$$

ならば，$\sigma(F'(0)) \cap (\infty, \Lambda_e) \subset B_F$ でもある。

注意　仮定（i）において，φ は H 上で，連続フレッシェ微分可能であることが要求されている。φ の偶性から $F(0) = 0$ がいえる。

仮に $\dim H < \infty$ ならば，$\sigma_e(F'(0)) = \varnothing$ かつ，$[\Lambda_e, 0] \cup [0, \Lambda^e] = \varnothing$ である。

仮に $\dim H = \infty$ ならば，$\sigma_e(F'(0)) \neq \varnothing$ で，さらに $\sigma_e(F'(0)) = \{0\}$ であることと $F'(0): H \to H$ がコンパクトであることは同値である。

仮に $\dim H = \infty$ で，かつ $F'(0): H \to H$ がコンパクトでないなら，$\Lambda_e < 0$ か $\Lambda^e > 0$ のどちらかであり，かつ，それによって，B_F は $[\Lambda_e, 0]$ か $[0, \Lambda^e]$ のどちらかを含んでいる。（もし，$\Lambda_e < 0 < \Lambda^e$ ならば，両方含む。）

$\Lambda^e > 0$ だが，$[0, \Lambda^e] \not\subset \sigma(F'(0))$ で，その時，$F'(0) - \lambda I : H \to H$ が任意の $\lambda \in (a, b)$ において同型作用素であるような区間 (a, b)，$a < b$ を B_F が含むということもあり得る。

　定理 4.1 は以下のような条件の下で，式（3.2）の L^2- 分岐点を確立するのに利用することができる。

　（I）$q \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ で，$q(x) \geq \delta > 0$ a.e. on $\mathbb{R}^N$,

　（II）$\eta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ は可測関数で，$\eta > 0$ a.e. on $\mathbb{R}^N$ かつ $\eta^{-1} \in L^2(\mathbb{R}^N)$,

　（III）f は条件 (f1) を満たし，$f'(0) = 1$ かつ $\sup_{s\in\mathbb{R}} |f(s)| < \infty$ である。さらに，f は奇関数で，$t = 0$ は $f(t)t - 2\int_0^t f(s)ds$ の唯一の 0 点である。

仮に f' が $[0, \infty)$ 上で，狭義単調ならば，$f(t)t - 2\int_0^t f(s)ds \neq 0$ for $t \neq 0$，であることが分かる。これらの条件の下で，式

$$\mu u = K(u) \text{ for } u \in H$$

をヒルベルト空間 $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ で考える，但し，$H = H^1(\mathbb{R}^N)$ で，$\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ と $K : H \to H$ は（3.3）と（3.4）でそれぞれ定義したものである。

$$\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \eta(x)^{-2}[\int_0^{\eta(x)u(x)} f(s)ds]dx \text{ for } u \in H,$$

とすると，定理 4.1（A）の仮定は，関数 K によって満たされる。例 3.2 から，$L \in B(H,H)$ を（3.5）で定義すると，$K'(0) = L$ であることを思い出すと，[13] の定理 3.4（iv）と（v）から

$$\sigma(K'(0)) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \frac{1}{\lambda} \in \sigma(-\Delta + q)\} \cup \{0\} \text{ かつ}$$
$$\sigma_e(K'(0)) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \frac{1}{\lambda} \in \sigma_e(-\Delta + q)\} \cup \{0\}.$$

であることが分かる，但し，$-\Delta + q : H^2(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ は $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の非有界自己共役作用素として扱われる。

$$\sigma(-\Delta + q) \subset [\delta, \infty) \text{ かつ } \sigma_e(-\Delta + q) \subset [Q, \infty) \text{ 但し } Q = \lim \inf_{|x|\to\infty} q(x),$$

であることより，

$$\sigma(K'(0)) \subset [0, \frac{1}{\delta}] \text{ かつ } \Lambda^e = \sup \sigma_e(K'(0)) \leq \frac{1}{Q}.$$

が成立する。しかし，$\sigma_e(-\Delta + q) \neq \varnothing$ より，定理 4.1 から，$\Lambda^e > 0$ かつ，$[0, \Lambda^e] \subset B_K$ である。

しかしながら，仮に $u \in H$ かつ $\mu u = K(u)$ ならば，$u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ であり，従って，もし $\mu \neq 0$ ならば，$(\frac{1}{\mu}, u)$ が（3.2）を満たすことが容易に分かる。

仮に q が周期的ならば，$\sigma(-\Delta + q) = \sigma_e(-\Delta + q)$ が可算個の閉区間の合併であり，そこから $\sigma(K'(0)) = \sigma_e(K'(0))$ もそうであることに注意する。従って，仮に (a, b) が $\sigma(-\Delta + q)$ のスペクトルの切れ目ならば，任意の点 $\lambda \in (a, b)$ は（3.2）の L^2- 分岐点である。しかし，

$$-\Delta + q - \lambda : H^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N) \text{ は同型作用素}$$

であり，言い換えれば，$(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}) \subset B_K$ であるが $(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}) \cap \sigma(K'(0)) = \varnothing$ である，ということである。

仮に，（III）に加えて，関数 f' が $[0, \infty)$ 上で狭義減少関数ならば，その時，全ての $t > 0$ で，

$$f'(0)t \geq f(t) = \int_0^t f'(s)ds > f'(t)t \text{ かつ} \int_0^t f(s)ds > \int_0^t f'(s)sds = f(t)t - \int_0^t f(s)ds$$

である。f は奇関数なので，これから，すべての $t \neq 0$ で，

$$f'(0) > \frac{f(t)}{t} \text{かつ } 2\int_0^t f(s)ds > f(t)t$$

で，そこから容易に

$$\langle K'(0)u, u\rangle_1 > \langle K(u), u\rangle_1 \text{ かつ } 2\varphi(u) > \langle K(u), u\rangle_1 \text{ for all } u \in H\backslash\{0\}.$$

が分かる。ここで，定理4.1（B）から $\sigma(K'(0)) \cap (\Lambda^e, \infty) \subset B_K$ となり，従って実際，$K'(0)$ が負のスペクトルを持たないことから，

$$\sigma(K'(0)) \cup [0, \Lambda^e] \subset B_K$$

が導かれる。これは，仮に（I），（II），（III）が満たされ，f' が $[0,\infty)$ 上で狭義単調減少ならば，$\sigma(-\Delta+q) \cup [\inf \sigma_e(-\Delta+q), \infty)$ の全ての点が（3.2）の L^2- 分岐点である，ということを意味する。仮に，追加的に f が $[0,\infty)$ 上で非負とするならば，その時，（3.2）のすべての L^2- 分岐点が $\sigma(-\Delta+q) \cup [\inf \sigma_e(-\Delta+q), \infty)$ に属する，言い換えると，

$$\sigma(K'(0)) \cup [0, \Lambda^e] = B_K$$

になる，ということに注意。最後に，$\inf \sigma_e(-\Delta+q) > \inf \sigma(-\Delta+q)$ という状況を得るためには，p が周期的で，$r(x) \to 0$ $(|x| \to \infty)$ である $q = p + r$ という形のポテンシャルを考えれば十分であることを思い出そう。

（Charles Alexander Stuart, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne Institut d'Analyse et de Calcul Scientifique, 教授）
（Gilles Evéquoz, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne Institut d'Analyse et de Calcul Scientifique, 博士課程）
（訳者　経済学研究科博士課程）

参 考 文 献

[1] H.W. Alt, Lineare Funktional-analysis, 2. Auflage, Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag, Berlin, 1992
[2] A.Ambrosetti and G. Prodi, A Primer of Nonlinear Analysis, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993
[3] V.I. Averbukh and O.G. Smolyanov, The various definitions of the derivative in linear topological spaces, Russian Math. Surveys, XXIII (1968), 67–113
[4] J. Borwein, and J. Vanderwerff, Convex functions on Banach spaces not containing l_1, Canadian Math. Bull., 40 (1997), 10–18
[5] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle, Masson, Paris, 1983
[6] G. Evéquoz and C.A. Stuart, Hadamard differentiability and bifurcation, in preparation
[7] T.M. Flett, Differential Analysis, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980
[8] G.B. Folland, Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications, 2nd edition, Wiley-Interscience Publication, New York, 1999
[9] S. Lang, Real and Functional Analysis, 3rd ed.,Graduate Texts in Math., Springer, Berlin, 1993
[10] R.E. Megginson, An Introduction to Banach Space Theory, GTM, Springer-Verlag, 1998

[11] M.Z. Nashed, Differentiability and related properties of nonlinear operators, some aspects of the role of differentials in nonlinear functional analysis, in Nonlinear Functional Analysis and Applications, Academic Press, New York, 1971, 103–309
[12] C.A. Stuart, Buckling of a heavy tapered rod, J. Math. Pures Appl., 80 (2001), 281–337
[13] C.A. Stuart, Spectrum of a self-adjoint operator and Palais-Smale conditions, J. London Math. Soc., (2) 61 (2000), 581–592
[14] C.A. Stuart and G. Vuillaume, Buckling of a critically tapered rod, global bifurcation, Proc. R. Soc. Lond. A, 459 (2003), 1863–1889