

|                  |                                                                                                                                                                                                                                             |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Title            | 第2帰納定理の応用とその周辺                                                                                                                                                                                                                              |
| Sub Title        | On game theoretic applications of the second recursion theorem                                                                                                                                                                              |
| Author           | 中山, 幹夫(Nakayama, Mikio)                                                                                                                                                                                                                     |
| Publisher        | 慶應義塾経済学会                                                                                                                                                                                                                                    |
| Publication year | 2005                                                                                                                                                                                                                                        |
| Jtitle           | 三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.98, No.3 (2005. 10) ,p.405(29)- 418(42)                                                                                                                                                             |
| JaLC DOI         | 10.14991/001.20051001-0029                                                                                                                                                                                                                  |
| Abstract         | 計算論における第2帰納定理や不動点定理,<br>さらにコルモゴロフ複雑度のゲーム理論的応用の可能性について述べる。<br>This study explains the second recursion theorem in computability theory, fixed-point theorem, and<br>the possibilities of game theory applications for Kolmogorov complexity. |
| Notes            | 小特集：組織とインセンティブの理論                                                                                                                                                                                                                           |
| Genre            | Journal Article                                                                                                                                                                                                                             |
| URL              | <a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20051001-0029">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20051001-0029</a>                           |

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

## 第 2 帰納定理の応用とその周辺

### On Game Theoretic Applications of the Second Recursion Theorem

中山 幹夫(Mikio Nakayama)

計算論における第 2 帰納定理や不動点定理, さらにコルモゴロフ複雑度のゲーム理論的応用の可能性について述べる。

#### Abstract

This study explains the second recursion theorem in computability theory, fixed-point theorem, and the possibilities of game theory applications for Kolmogorov complexity.

## 第2帰納定理の応用とその周辺

中山 幹 夫

### 要 旨

計算論における第2帰納定理や不動点定理, さらにコルモゴロフ複雑度のゲーム理論的応用の可能性について述べる。

### キーワード

第2帰納定理, s-m-n 定理, 自己複製ウイルスと自己認識プログラム, ライスの定理, コルモゴロフ複雑度

### 1. はじめに

経済学やゲーム理論において, 不動点定理は多くの存在問題に威力を発揮する重要な定理である。とくに,  $n$  人非協力ゲームのナッシュ均衡は, 形式的には角谷の不動点定理そのものであり, 非協力ゲーム理論の大黒柱となっている。

他方, 現代のネットワーク社会を基礎付けているインフォメーション・テクノロジーの根底にも, 不動点定理は形を変えて潜んでいることは, 専門家以外にはあまり知られていない。自己複製する, いわゆるコンピュータ・ウイルスを作ることが出来るという事実がそれを示しているのである。いま,  $P$  で自然数を自然数に変換するあるコンピュータ・プログラムを表そう。このようなプログラムは, 一定の算法のもとに, 自然数の全体と 1 対 1 の対応が付けられることが知られている。この対応  $\gamma$  による値ないし番号  $e = \gamma(P)$  は, プログラム  $P$  のゲーデル数または符号 (code) といわれる。自己複製ウイルス (self-replicating virus) とは, 工学的に表現すれば

$$\{e\}(n) \downarrow e, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

をみたすプログラム  $P = \{e\}$  のことである。すなわち, いかなる自然数が入力されても, つねに自分自身のゲーデル数を出力して停止するプログラムである。このようなプログラムの存在を一般的に示すのが, 表題に掲げた第2帰納定理 (second recursion theorem) であり, または計算論

(recursion theory) における不動点定理 (fixed point theorem)<sup>(1)</sup> である。

第 2 帰納定理は、この自己複製プログラムやその変形プログラムだけでなく、入力されたゲーデル数が自分のゲーデル数と同一であるか否かを判定するプログラムの存在をも直ちに導く。これは、たとえば囚人のジレンマにおいては、相手プレイヤーが自分と同じタイプであるか否かを判定して、同じならば協力し、異なるならば協力しないというプログラム = マシン・プレイヤーが存在することを意味する。また、不動点定理は、相手プレイヤーのタイプについて、実質的には何も知ることができないという不可能性を導くライスの定理の証明、さらに、必勝戦略が存在するのにそれをプレイできないというラビンのゲームに現われる単純集合 (simple set) の具体例として、自分自身が自分自身を記述する最小のプログラムであるような数の集合の補集合、すなわち、ランダム数 (random number) でない自然数の全体をとることができるという事実の証明などに応用出来る。

本稿では、これらの事項について解説し、計算論による限定合理的プレイヤーの初歩的分析を紹介する。

## 2. 不動点, s-m-n 定理 および 第 2 帰納定理

定理 1. (不動点定理). 関数  $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$  は自然数の集合  $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  からそれ自身への帰納的関数であるとする。このとき、

$$\varphi_{f(n)} = \varphi_n$$

をみたす番号  $n$  が存在する。

自然数の集合  $\mathcal{N}$  から  $\mathcal{N}$  への関数  $f$  は、それを計算する有限のアルゴリズムが存在するとき、部分帰納的関数 (partial recursive function) と呼ばれる。部分帰納的関数が  $\mathcal{N}$  のすべての点で定義されているとき、これをたんに帰納的関数 (recursive function)<sup>(2)</sup> という。計算可能関数 (computable function) とは、部分帰納的関数のことをいう。 $n$  変数の計算可能関数も同様に定義される。また、 $n$  個の変数の組  $(x_1, \dots, x_n)$  は、たとえば、2 から始まる最初の  $n$  個の素数  $p_1, p_2, \dots, p_n$  を用いて

$$p_1^{x_1+1} p_2^{x_2+1} \dots p_n^{x_n+1}$$

のように自然数に符号化できる。この符号化と復元の手順はもちろん一定のアルゴリズムで実行可能なので両方向の変換は帰納的である。<sup>(3)</sup> それゆえ、問題によっては、1 変数関数で分析することができる。

---

(1) これらは同値であることが証明できるので、文献によっては本稿でいう不動点定理を第 2 帰納定理と呼ぶものもある。e.g., Cutland [?]

(2) 厳密な定義については、たとえば、中山 [?] など参照。

(3) たとえば、Cutland [?]

他方，計算可能ではない関数の例として，次のように定義される関数  $f$  を考えよう。いま，命題  $Q(n)$  を『円周率  $\pi$  の 10 進展開にちょうど  $n$  個の連続する 7 がある』と定義する。このとき

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } Q(n) \\ 0 & \text{if } \neg Q(n) \end{cases}$$

で与えられる関数  $f$  は，命題  $Q(n)$  が偽であれば，計算可能ではない。どのようなアルゴリズムも，それを有限回のステップで確認することは出来ないからである。

一般に，各  $n = 0, 1, 2, \dots$  に対して， $n$  変数の計算可能関数の個数は可算個であり，重複を許してすべての  $n$  変数計算可能関数を

$$\varphi_0^n, \varphi_1^n, \varphi_2^n, \dots, \varphi_e^n, \dots$$

のように列挙することが出来る。しかも， $n+1$  変数の部分帰納的関数  $\varphi$  が存在して，

$$\varphi(e, x) \simeq \varphi_e^n(x)$$

が成り立つ（枚挙定理 (enumeration theorem)）。ここに， $\varphi_e^n$  は，ゲーデル数  $e$  のプログラム，すなわち  $\{e\}$  によって計算される  $n$  変数計算可能関数を表す。すると，上の不動点定理は，

任意に与えられた帰納的関数  $f$  は，あるプログラム  $\{n\}$  に対して，それが計算する関数と同じ関数を計算するプログラム  $\{f(n)\}$  を与える

ことを述べている。この意味において， $n$  を帰納的関数  $f$  の不動点 (fixed point) という。ただし，これはトポロジーや解析学でいう不動点とは不動点としての意味が違うので，擬似不動点と呼んでいる文献もある。

さて，本稿では，もうひとつの基本的定理である，次の s-m-n 定理を経由して第 2 帰納定理に向かうことにしよう。

定理 2. (s-m-n 定理). 与えられた自然数  $m, n$  に対して，次の条件をみたす帰納的関数  $S_n^m(e, x_1, \dots, x_n)$  が存在する：

$$\varphi_{S_n^m(e, x_1, \dots, x_n)}(y_1, \dots, y_m) \simeq \varphi_e(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

記号  $\simeq$  は，両辺が定義されているときは等しい，ということの意味し，関数として等しいことの別表現である。 $S_n^m(e, x_1, \dots, x_n)$  は，左辺の関数を計算するプログラムのゲーデル数であることを思い起こそう。右辺の  $n+m$  変数関数の値は，そのプログラム  $\{S_n^m(e, x_1, \dots, x_n)\}$  が計算することになる

関数に、変数  $y_1, \dots, y_m$  を入力して得られる値に等しい。この意味でこの定理は parametrization theorem と呼ばれている。前半の入力データを、プログラムを指定するパラメーターとして利用することが出来るからである。

証明は略すが、基本的アイディアは次のとおりである。<sup>(4)</sup> 部分帰納的関数  $\psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$  を計算するプログラムの符号を  $e$  とし、 $(x_1, \dots, x_n)$  がとる個々の値を  $(c_1, \dots, c_n)$  とすると、次の関数  $\gamma$  ,

$$\gamma(y_1, \dots, y_m) \simeq \psi(c_1, \dots, c_n, y_1, \dots, y_m)$$

を計算するプログラムが欲しいのであるから、そのゲーデル数は、 $e$  と  $(x_1, \dots, x_n)$  のとる値の帰納的関数  $S_n^m(e, x_1, \dots, x_n)$  によって与えられることになる。

この定理と不動点定理によって、次の第 2 帰納定理がえられる。

定理 3. (第 2 帰納定理). 任意の部分帰納的関数  $\psi$  に対して、

$$\varphi_e(x) \simeq \psi(e, x)$$

となる番号  $e$  が存在する。

関数  $\psi(w, x)$  は計算可能だから、これを計算するプログラムの符号を  $b$  とすれば、上に述べた s-m-n 定理から、ある帰納的関数  $S_1^1(b, w)$  が存在して、

$$\varphi_{S_1^1(b, w)}(x) \simeq \psi(w, x)$$

となる。ここで、 $h(w) = S_1^1(b, w)$  とおけば、 $h$  は帰納的関数だから、不動点定理によって

$$\varphi_e(x) \simeq \varphi_{h(e)}(x) \simeq \psi(e, x)$$

をみたす番号  $e$  が存在する。

では、この定理がもつ意味を考えてみよう。2 変数の計算可能関数  $g$  が与えられている。このとき、次のようなプログラムを定義したい。すなわち、任意の入力変数  $x$  に対して、

$$\varphi_e(x) \simeq g(e, x)$$

となるようなプログラム  $\{e\}$  である。定義したい対象が、定義式の中に現われていることに注意しよう。つまり、この定義は自己言及的 (self-referential) なのである。 $\{e\}(x)$  は  $\varphi_e(x)$  の別表現にすぎないので、第 2 帰納定理は、このような、関数の循環的定義を可能にしているのである。この事実は、次節で述べる自己認識プログラムにおいて、より具体的にみることができる。

---

(4) たとえば、Cutland [?] には、チューリング・マシンと同等であるが、より扱いやすいレジスタ・マシンによる証明がある。

直接の応用としては、冒頭にも述べた自己複製プログラムが代表的である。

(1) 自分自身をプリントするプログラム  $\{e\}$  :

$$\{e\}(x) \downarrow e, \quad \forall x \in \mathcal{N}$$

(2) 自分自身をプリントし与えられた帰納的関数  $h$  を計算するプログラム  $\{e\}$  :

$$\{e\}(x) \downarrow \langle e, h(x) \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{N}$$

(1) は、第 2 帰納定理において、 $\psi(e, x) = e, \forall x$  とればよい。自己言及的であることは、

$e$  は  $e$  をプリントするプログラムの符号である

と言葉で定義を書き換えてみればよくわかるだろう。

(2) に現われる  $\langle e, h(x) \rangle$  は、すでに述べたように、2 個の自然数を 1 個の自然数にコード化する関数、たとえば  $\langle p, q \rangle = 2^{p+1}3^{q+1}$  などであり、もちろん帰納的である。

次に示すのは、言葉で書かれたプログラムによる上の(1)の例、すなわち自分自身をコピーするプログラムの例である。<sup>(5)</sup>

下の文のコピーを二つ書き、二つ目のコピーはかぎ括弧で囲め。

『下の文のコピーを二つ書き、二つ目のコピーはかぎ括弧で囲め。』

同じ 2 行がコピーされることが容易にわかるだろう。こうして、第 2 帰納定理や不動点定理は、自己言及的な定義を帰納的手順 (アルゴリズム) によって実行可能にする方法を与えてくれるのである。

この節を終えるにあたって、不動点定理と、これを使わない第 2 帰納定理の証明を与えておこう。いずれの証明にも、s-m-n 定理が使われる。

証明 (不動点定理). 帰納的関数  $f$  の不動点  $n$ 、すなわち、 $\varphi_{f(n)} = \varphi_n$  をみたす番号  $n$  の存在を示すのが目的である。計算可能関数

$$g(e, y) \simeq \varphi_{f(\varphi_e(e))}(y)$$

に、s-m-n 定理を適用すれば、帰納的関数  $\varphi_b(e)$  が存在して

$$\varphi_{\varphi_b(e)}(y) \simeq \varphi_{f(\varphi_e(e))}(y)$$

となる。ここで、もし  $\varphi_e(e)$  が定義されないならば、 $\varphi_b(e)$  は定義域が空集合である関数の符号番号となる。

---

(5) Sipser [?] による。

すると,  $e = b$  および  $n = \varphi_b(b)$  とおくことによって,

$$\varphi_n = \varphi_{f(n)}. \quad \square$$

証明.(第2帰納定理). 任意の帰納的関数  $h$  を固定する。関数  $\psi(h(e), x)$  は部分帰納的だから, それを計算するプログラムを  $\{a\}$  としよう。s-m-n 定理によって

$$\psi(h(e), x) \simeq \varphi_{S_1^1(a,e)}(x)$$

となるが, これは, とくに関数  $h$  を  $h(e) = S_1^1(e, e)$  としても成り立つので, 関数  $\psi(S_1^1(e, e), x)$  を計算するプログラム  $\{a\}$  に対して

$$\psi(S_1^1(e, e), x) \simeq \varphi_{S_1^1(a,e)}(x)$$

となる。ゆえに,

$$\psi(S_1^1(a, a), x) \simeq \varphi_{S_1^1(a,a)}(x). \quad \square$$

### 3. 自己認識プログラム

2人ゲームにおいて, プレイの前に相手のプレイヤーが自分と同じタイプか否かがわかれば, たとえば, 囚人のジレンマでは協力することが可能になる。ここで, 『同じ』とは, ロジカルに同じという意味であり, 自分の分身ないしコピーを意味する。そこで,

相手が自分と同じならば協力し, そうでなければ協力しない

というプログラムの存在が問題となるだろう。自分と同じ相手とは, もちろん, 自分と同じ行動をするプログラムである。このプログラムを, 自己認識プレイヤー (self-recognition player) と呼ぼう。<sup>(6)</sup>

次の囚人のジレンマを考える。ここで,  $c$  は協力プレイヤー,  $d$  は非協力プレイヤーと呼んでおく。

|     | $c$  | $d$  |
|-----|------|------|
| $c$ | 3, 3 | 0, 4 |
| $d$ | 4, 0 | 1, 1 |

---

(6) この定義は, Howard [?] による。また, つい最近, Tennenholtz [?] も同様なプログラムを考察している。

自己認識プレイヤーを  $s$  で表すと,  $s$  の参入によって, 囚人のジレンマは, 次のようなゲームとなる。

|     | $c$  | $d$  | $s$  |
|-----|------|------|------|
| $c$ | 3, 3 | 0, 4 | 0, 4 |
| $d$ | 4, 0 | 1, 1 | 1, 1 |
| $s$ | 4, 0 | 1, 1 | 3, 3 |

このように, 自己認識プレイヤーは, 同じ相手とは協力行動をすることがわかる。

人間のように, 臨機応変に行動を選ぶのではなく, あらかじめプログラムされた行動しかとれないという意味における限定合理的プレイヤーがプレイするゲームの世界では, 協力行動はむしろありふれたものになる。これは, 以下のように第 2 帰納定理によって示すことができる。

まず,  $c, d$  は各々, 囚人のジレンマにおける協力プレイヤー, 非協力プレイヤーのゲードル数であると仮定する。このとき, 値域が  $\{c, d\}$  であるような部分帰納的関数  $\varphi_e$  を計算するプログラム  $\{e\}$  を, 囚人のジレンマのプレイヤーと呼ぼう。

定義 1.  $\{x\}$  が囚人のジレンマの自己認識プレイヤーであるとは, すべての  $y \in \mathcal{N}$  に対して,

$$\{x\}(y) \downarrow \begin{cases} c & \text{if } y = x \\ d & \text{if } y \neq x \end{cases}$$

となることである。

これは囚人のジレンマをプレイする自己認識プレイヤーの形式的定義である。右辺の条件は 2 つの数が等しいか否かの判定であるが, これは自明なアルゴリズムで決定できる。一般に, 変数  $x_1, \dots, x_n$  の間に成立する関係を  $R(x_1, \dots, x_n)$  と書くとき, この関係の特性関数, すなわち, 任意の  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{N} \times \dots \times \mathcal{N}$  に対して,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{if } R(x_1, \dots, x_n) \\ 0 & \text{if } \neg R(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

をみたす関数  $f$  が計算可能ならば, 関係  $R$  は帰納的であると定義される。帰納的關係とは, こうして, 対応する特性関数が計算可能であることと同値であるから, 自己認識プレイヤーの行動を記述する関係  $R(x, y) \Leftrightarrow x = y$  の特性関数  $f(x, y)$  は計算可能である。すると,

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) \cdot c & \text{if } y = x \\ f(x, y) + d & \text{if } y \neq x \end{cases}$$

で定義される関数  $g(x, y)$  は計算可能であるから、第 2 帰納定理によって、不動点  $x \in \mathcal{N}$  が存在して、

$$\varphi_x(y) = g(x, y), \quad \forall y \in \mathcal{N}$$

となる。この番号  $x$  が自己認識プレイヤーのゲーデル数であり、以下に示すように無限個存在する。

命題 1. 囚人のジレンマをプレイする無限個の自己認識プレイヤーが存在する。

不動点の個数が無限個であることは、次のように証明できる。帰納的関数  $f$  の不動点全体は有限集合  $A$  であると仮定し、関数  $\psi$  を、集合  $A$  に属する番号を符号として持ついかなる計算可能関数とも異なる計算可能関数であるとする。このとき、次のように定義される帰納的関数  $h$  は、不動点を持たず、不動点定理に矛盾する。

$$\varphi_{h(x)} \simeq \begin{cases} \psi & \text{if } x \in A \\ \varphi_{f(x)} & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

何故ならば、関数  $h$  が不動点  $n$  を持てば、 $\varphi_{h(n)} = \varphi_n$  であるが、 $n \in A$  ならば  $\psi = \varphi_n$  となって、 $\psi$  の作り方に反する。他方、 $n \notin A$  ならば、 $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$  となり、 $f$  が  $A$  の外で不動点を持たないことに反するからである。

こうして、計算可能性を限定合理性のモデルとするならば、囚人のジレンマにおける協力は、ありふれた現象であるといえるだろう。ただし、 $x$  と  $y$  が自己認識プレイヤーであっても、 $x = y$  でない限り  $x$  と  $y$  は互いに非協力行動をすることになる。この意味で、自己認識プレイヤーの認識能力はきわめて低いものであるといえる。<sup>(7)</sup>

#### 4. ライスの定理

定理 4.  $B_1$  を、1 変数の計算可能関数の全体とし、集合  $A$  は、

$$\emptyset \neq A \subsetneq B_1$$

をみたすとする。このとき、集合  $A = \{x | \varphi_x \in A\}$  は帰納的ではない。

集合が帰納的であるとは、その集合に属するか否かという関係を判定する特性関数が帰納的であることをいう。このとき、その関係は決定可能 (decidable) であるといい、その集合を帰納的集合 (recursive set) という。つまり、帰納的集合とは、そのメンバーシップであるか否かという関係を判定するアルゴリズムが存在する場合をいい、そうでないとき、その関係は決定不能である。

---

(7) この能力を、仲間や血縁にまで広げる試みについては、Nakayama [?] 参照。

ライスの定理は、したがって、任意に選んだ 1 変数計算可能関数が、集合  $A$  を特徴づける属性をもっているか否かを判定するアルゴリズムは存在しないことを述べている。意味のある属性とは、もちろん、特定の関数だけがもつ性質であるから、この定理は、たとえば囚人のジレンマにおける相手プレイヤーが、つねに協力するとかつねに非協力であるなどの特定の属性を持っているか否かは、いかなるアルゴリズムによっても決定できないことを意味している。

前節で定義した自己認識プレイヤーの全体を  $A$  とすると、

$$\emptyset \neq A \subsetneq B_1$$

であるから、ライスの定理から直接に、次のように述べる事が出来る。

命題 2. 囚人のジレンマのプレイヤーが、自己認識プレイヤーであるか否かは決定不能である。

こうして、たとえば、自分も相手も互いに自己認識プレイヤーであるとき、およびそのときに限って協力するというような能力をもつプログラムは存在しないことがわかる。このように、ライスの定理は、アルゴリズムとしての限定合理性に、きわめて重大な制約を課しているのである。

このような不可能性が成立する直観的な理由は、ひとつの関数を計算するアルゴリズムは不規則に無限個存在するので、集合  $A$  がたとえ単一の関数しか含まなくても、集合  $A$  は可算無限集合であり、しかも、帰納的ではないからである。以下に、第 2 帰納定理を使うライスの定理の証明を述べておこう。

証明 (ライスの定理). 番号  $a, b$  は、 $a \in A, b \notin A$  をみたすとする。もし  $A$  が帰納的ならば、次の関数  $f$  は計算可能である。

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{if } x \notin A, \\ b & \text{if } x \in A. \end{cases}$$

さらに、 $f$  は、

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \notin A, \quad \forall x$$

をみたす。他方、第 2 帰納定理によって、

$$\varphi_{f(n)} = \varphi_n$$

をみたす番号  $n$  が存在するので、

$$f(n) \in A \Leftrightarrow n \in A$$

となるが、これは矛盾である。 □

## 5. 単純集合とコルモゴロフ複雑度

計算可能性という制約は、厳密に手順としての実行可能性を要求するので、たとえば最適戦略が存在するならば、それを実行することが当然の目的となる。しかし、存在はそのままでは、実行可能性を意味するわけではない。有名なラビンのゲーム (Rabin [?]) は、必勝戦略が自明に存在するにもかかわらず、それを実行するアルゴリズムが存在しないという注目すべき性質をもつゲームである。

集合  $S \subseteq \mathcal{N}$  が与えられており、 $S$  はそれ自身もその補集合  $S^c \subseteq \mathcal{N}$  も無限集合であるとしよう。このとき、次のようなルールでプレイされるゲームを考えよう。

- (1) 先手  $J_1$  が  $x_1 \in \mathcal{N}$  を選ぶ。
- (2) 後手  $J_2$  が、 $x_1$  を知って、 $x_2 \in \mathcal{N}$  を選ぶ。
- (3)  $x_1 + x_2 \in S$  ならば  $J_1$  が勝ち、 $x_1 + x_2 \in S^c$  ならば  $J_2$  が勝つ。

このゲームでは、まず、後手が必勝戦略をもつことがわかる。ある  $x_1$  に対して、いかなる  $x_2$  を選んでも  $x_1 + x_2 \notin S^c$  だったとしたら、 $S^c$  が無限集合であるという仮定に反する。それゆえ、後手は、先手の任意の戦略  $x_1$  に対して、ある  $x_2$  を選べば必ず  $x_1 + x_2 \in S^c$  とすることができる。つまり、後手は必勝戦略をもっているのである。

しかし、この必勝戦略を実行できるだろうか？ ラビンのゲームでは、集合  $S$  は次に述べる単純集合 (simple set) として与えられている。

定義 2. 集合  $S \subseteq \mathcal{N}$  が単純集合であるとは

- $S$  は帰納的可算 (recursively enumerable, r.e.) である
- $S^c$  は無限集合で、帰納的可算な無限部分集合を含まない

の 2 条件がみたされることである。

集合  $S$  が帰納的可算であるとは、

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in S \\ \text{undefined} & \text{if } x \notin S \end{cases}$$

で定義される半特性関数  $f$  が計算可能であること、つまり  $S$  のメンバーを残らず数え上げるアルゴリズムが存在することをいう。このとき、関係  $x \in S$  は半決定的 (partially decidable) であるといわれる。さらに、集合  $S \subseteq \mathcal{N}$  もその補集合  $S^c \subseteq \mathcal{N}$  もともに帰納的可算であるとき、 $S$  はすでに述べた帰納的集合となる。 $S$  のメンバーシップの決定手順と  $S^c$  のそれとを交互に走らせれば、有限のステップで必ずこの手順は停止するからである。

こうして、 $S$  が単純集合ならば、補集合  $S^c$  のメンバーシップを判定するアルゴリズムは存在しないので、後手は必勝戦略を計算することができない。

定理 5. ラビンのゲームでは、後手が必勝戦略をもつが、いかなる戦略もそれが必勝戦略であるか否かは決定不能である。

では、どのような集合が単純集合の例となるのだろうか。ラビンがこの論文を書いた 1957 年以前には人為的に構成された例があったが、6 年後の 1963 年にコルモゴロフ [?] によってランダム数の集合の補集合という具体的な単純集合が発見された。

定義 3. 自然数  $x$  のコルモゴロフ複雑度 (Kolmogorov complexity) とは、

$$K(x) := \mu e(\varphi_e(0) \simeq x)$$

で与えられる自然数  $K(x)$  のことである。

記号  $\mu e$  は「最小の  $e$ 」を表す。コルモゴロフ複雑度とは、このように、入力 0 のもとで  $x$  を出力する最短のプログラムのゲーデル数のことである。また、

$$x \leq K(x)$$

をみたす自然数  $x$  をランダム数という。プログラムは自然数と 1 対 1 に対応させることができるので、ランダム数とは、自分自身が自分自身を記述する最短のプログラムとなっているような自然数のことである。たとえば、コインを 1 億回投げてえられる表と裏の列の記録は、これをそのまま伝達する以外に正確に伝える方法はない。これが、ランダム数の本質である。

チャイティン [?] は、2 進展開の小数点  $n$  桁までの列が、任意の  $n$  桁においてランダムであるような実数  $\Omega$  を区間  $(0, 1)$  の中に作り上げた。また、ブラサッド [?] は、これを用いてナッシュ均衡の個数が有限か無限かについて、コインを投げて決定するのと全く同じ意味で無秩序となるようなゲームを構成している<sup>(8)</sup>。このように、ランダム数とは、たんに決定不能であるだけでなく、いかなる規則性とも無縁な混沌状態がアルゴリズムを対象とする数学の世界にも存在することを物語っているのである。

定理 6. ランダムでない自然数の集合は単純集合である。

この事実によって、ラビンのゲームでは、和がランダム数でないならば  $J_1$  が勝ち、ランダム数ならば  $J_2$  が勝つことになるが、 $J_2$  の必勝戦略は計算可能でないことはすでに述べたとおりである。

---

(8) これを解説したものとしては、中山 [?] がある。

最後に、多少長いが、このコルモゴロフの定理の証明を与えておこう。証明には、s-m-n 定理と不動点定理が使われる。

証明． $A = \{x \mid K(x) < x\}$  をランダムでない数の集合とする。まず、この集合  $A$  が帰納的可算であることを示す。

$$x \in A \iff (\exists e < x)[\varphi_e(0) \simeq x]$$

であることに注意する。右辺に現われる関係  $[\varphi_e(0) \simeq x]$  は、半決定的である。 $\varphi_e(0)$  が定義されていて、しかも  $x$  に等しいときにのみ値 1 をとる半特性関数は計算可能となるからである。すると、右辺は、与えられた数  $x$  未満の有限個の  $e$  の中に、関係  $[\varphi_e(0) \simeq x]$  を成り立たせる  $e$  が存在するときにのみ成立する半決定的な関係である。ゆえに、左辺の半特性関数は計算可能となり、定義から集合  $A$  は帰納的可算となる。

次に、補集合  $A^c$  が無限集合であることを示す。与えられた数  $n$  に対して、

$$\varphi_0(0), \varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0)$$

の中で定義されている値に注目する。もし  $x$  がこれらのすべてと異なるならば、定義から  $n+1 \leq K(x)$  である。さらに、もし  $x$  がこれらの値の集合には含まれない最小値であるとすれば、 $x \leq n+1$  である。というのは、この値の集合が  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$  となる場合も排除できないからである。ゆえに、この  $x$  について  $x \leq K(x)$  となり、 $x$  はランダム数となる。こうして、任意に与えられた数  $n$  について、複雑度が少なくとも  $n+1$  であるようなランダム数が存在する。それゆえ、無限個のランダム数が存在し、集合  $S^c$  は無限集合である。

最後に、 $A^c$  は帰納的可算な無限部分集合を含まないことを示す。ランダム数の集合  $B \subseteq A^c$  が帰納的可算な無限集合であるとする。すると、帰納的な無限集合  $B' \subseteq B$  が存在する。<sup>(9)</sup> そこで、 $h$  を次のような帰納的関数であるとする。

$$\varphi_{h(e)} \simeq \mu y[y \in B' \wedge y > e]$$

このような  $h$  が存在することは、次のように示すことができる。集合  $B'$  は帰納的であるから

$$g(e, 0) = \mu y[y \in B' \wedge y > e]$$

で与えられる関数  $g$  は計算可能である。ゆえに、s-m-n 定理により、ある帰納的関数  $h$  が存在して

$$\varphi_{h(e)}(0) = g(e, 0)$$

---

(9) Cutland [?, p.130, Theorem 2.15].

となる。すると、不動点定理から、不動点  $e$  が存在して

$$\varphi_e = \varphi_{h(e)}.$$

作り方より、 $\varphi_e(0) > e$  であるから  $\varphi_e(0)$  はランダム数ではない。しかし、これは、 $\varphi_e(0) \in B' \subseteq B$  であること、つまり、 $\varphi_e(0)$  がランダム数であることに矛盾する。□

## 6. おわりに

本稿では、計算論の初歩的応用と、そのためのいくつかの基本的定理の解説を試みた。計算可能性が、人間の限定合理性のモデルとして適切か否かについては議論があるだろうが、1990年代から、ゲーム理論や経済理論において、最適戦略や均衡のアルゴリズムの実行可能性、つまり、計算可能性についての研究がいくつか現われるようになった。文献については、中山 [?], [?] などに紹介したが、より新しいものとしては、リクターとワン [?] による、競争均衡の計算不可能性を主張する研究がある。これは、計算可能実数を扱うもので、本稿の程度を超えているが、基本的には、計算可能な有理数列で近似できる実数のみを対象とする解析学の応用である。

計算不可能性は、原理的な不可能性であって、経済学で代表的なアローの不可能性定理のように、公理を変更すれば（意味はともかく）逆の可能性が成立する、という性質のものではない。しばしば直観や常識に反するような印象的な結果に導かれるが、それらはアルゴリズムの実行可能性の限界を明示しているわけである。また、不動点定理は本稿でも示したように、解析学におけると同様、特定の関数やプログラムなどの存在を保証するための技術として、よりポジティブな結果をもたらす可能性をもっている。まだ試みの域を出てはいないが、最近、ベルピレイ [?] による、“Computable Economics” というタイトルの本も出版されており、以上のような『帰納的経済分析』への関心が高まることが期待される。

（経済学部教授）

## REFERENCES

- [1] Chaitin, G., “Incompleteness Theorems for Random Reals,” *Advances in Applied Mathematics*, **8** (1987), 119–146.
- [2] Cutland, N. J., *Computability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [3] Howard, J. V., “Cooperation in the Prisoner’s Dilemma,” *Theory and Decision*, **24** (1988), 203–213.
- [4] Kolmogorov, A., “On Tables of Random Numbers,” *Indian Journal of Statistics*, **25** (1963), 369–376.

- [5] Nakayama Mikio, “Mutual Cooperation and Unilateral Altruism in a One-Shot Prisoner’s Dilemma - A Computability Approach -,” *KUMQRP Discussion Paper Series*, **DP2005-003** (2005).
- [6] 中山幹夫「ゲームと戦略の計算可能性について」『三田学会雑誌』 **91** 巻 4 号 (1999)
- [7] 中山幹夫「ナッシュ均衡のランダム性についての覚書」『三田学会雑誌』 **93** 巻 1 号 (2000)
- [8] Odifreddi, P., *Classical Recursion Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [9] Prasad, K., “Computability and Randomness of Nash Equilibrium in Infinite Games,” *Journal of Mathematical Economics*, **20** (1991), 429–442.
- [10] Rabin, M.O., “Effective Computability of Winning Strategies,” in *Contributions to the Theory of Games, Annals of Math. Studies*, **39**, M.Dresher, et al. eds., Princeton University Press, 1957.
- [11] Richter, M.K. and K-C. Wong, “Non-Computability of Competitive Equilibrium,” *Economic Theory*, **14** (1999), 1–27.
- [12] Sipser, M., *Introduction to the Theory of COMPUTATION*, PWS Publishing Company, A Division of International Thomson Publishing Inc. 1997. 邦訳：『計算理論の基礎』渡辺，太田監訳，阿部，植田，田中，藤岡訳，共立出版，2000 年。
- [13] Tennenholtz, M., “Program Equilibrium,” *Games and Economic Behavior*, **49** (2004), 363–373.
- [14] Velupillai, K., *Computable Economics*, Oxford University Press, 2000.