Title	直接的コネクションと間接的コネクションから形成されるネットワークの安定性
Sub Title	The stability of networks with direct and indirect connections
Author	川又, 邦雄(Kawamata, Kunio) 玉田, 康成(Tamada, Yasunari)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2005
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.98, No.3 (2005. 10) ,p.393(17)- 404(28)
JaLC DOI	10.14991/001.20051001-0017
Abstract	本稿はリンク形成ゲームにおける最適なネットワークと安定的なネットワークの性質を分析する。ネットワークにおいて, プレーヤーはリンクを通じて直接的に, もしくは間接的に結ばれており, プレーヤーのリンクを結ぶインセンティブはこれらのリンクの相対的な重要度に依存する。本稿ではプレーヤーの利得（私的便益）をシャプレー値で評価する。 本稿では, とくにプレーヤーの数が3の場合に焦点をあて, ゲームの凸性と凹性, 及びリンクを結ぶ費用に依存して, 完全ネットワークだけではなく, すべてのネットワークが最適ネットワークや安定的ネットワークになりうることを示す。 This paper analyzes structure of the optimal networks and properties of stable networks in link formation games. In networks, players are either directly or indirectly connected through links, and the players' incentives to connect links depend on the relative importance of these links. This study evaluates players' gains (personal benefits) within the Shapley value framework. In addition, it particularly focuses on cases with three players, indicating that, (depending on the convexity (or the concavity) of games and the cost of connecting links,) not only the full networks, all networks can be optimal or stable.
Notes	小特集：組織とインセンティヴの理論
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20051001-0017

直接的コネクションと間接的コネクションから形成されるネットワークの安定性

The Stability of Networks with Direct and Indirect Connections

川又 邦雄(Kunio Kawamata)

玉田 康成(Yasunari Tamada)

本稿はリンク形成ゲームにおける最適なネットワークと安定的なネットワークの性質を分析する。ネットワークにおいて，プレーヤーはリンクを通じて直接的に，もしくは間接的に結ばれており，プレーヤーのリンクを結ぶインセンティブはこれらのリンクの相対的な重要度に依存する。本稿ではプレーヤーの利得（私的便益）をシャプレー値で評価する。

本稿では，とくにプレーヤーの数が 3 の場合に焦点をあて，ゲームの凸性と凹性，及びリンクを結ぶ費用に依存して，完全ネットワークだけではなく，すべてのネットワークが最適ネットワークや安定的ネットワークになりうることを示す。

Abstract

This paper analyzes structure of the optimal networks and properties of stable networks in link formation games. In networks, players are either directly or indirectly connected through links, and the players' incentives to connect links depend on the relative importance of these links. This study evaluates players' gains (personal benefits) within the Shapley value framework.

In addition, it particularly focuses on cases with three players, indicating that, (depending on the convexity (or the concavity) of games and the cost of connecting links,) not only the full networks, all networks can be optimal or stable.

「三田学会雑誌」98 巻 3 号（2005 年 10 月）

直接的コネクションと間接的コネクションから形成されるネットワークの安定性

川　又　邦　雄
玉　田　康　成

要　　旨

本稿はリンク形成ゲームにおける最適なネットワークと安定的なネットワークの性質を分析する。ネットワークにおいて，プレーヤーはリンクを通じて直接的に，もしくは間接的に結ばれており，プレーヤーのリンクを結ぶインセンティブはこれらのリンクの相対的な重要度に依存する。 本稿ではプレーヤーの利得（私的便益）をシャプレー値で評価する。

本稿では，とくにプレーヤーの数が 3 の場合に焦点をあて，ゲームの凸性と凹性，及びリンクを結ぶ費用に依存して，完全ネットワークだけではなく，すべてのネットワークが最適ネットワークや安定的ネットワークになりうることを示す。

キーワード

ネットワークの形成，プレーヤー間のリンク, 対安定性，ゲームの凸性と凹性

JEL classification

C70; L13; L20

1.　はじめに

社会や経済の多くの状況で，プレーヤー間の協調はリンクによって形成されるネットワークとして描写できる。例えば企業間の技術の相互供与，国際貿易における FTA，研究者による共同研究などがそれにあたる。あるプレーヤーのペアを考える。このとき，両方のプレーヤーが協力関係，つまりリンクを結ぶことが有益であると考えたならば，実際にリンクは結ばれ，また，どちらか一方でも不利であると考えるならばリンクは切られるだろう。ネットワークは，このようなペアのインセンティブにもとづくリンクから生まれてくることになる。それでは，個別のリンクがネットワークの価値を最大化するような最適ネットワークの形成へとつながるのだろうか。

Jackson and Wolinsky（1996）や Slikker and Nouweland（2001）は，共著者ゲーム（co-authors game）をもちいて，リンクを結ぶインセンティブと，結果として生じるネットワークの最適性とのあいだにはトレードオフがあることを明らかにした。共著者ゲームでは，1 人のプレーヤーが各リ

ンクのために利用できる時間が一定であるため，リンクの数が増えると各リンクの生産性は落ちる。しかし，各プレーヤーは自分が直面するリンクからもたらされる便益のみに関心があるので，リンクを結ぶ相手の生産性の低下は考慮しない。結果として負の外部性が生じ，最適なネットワークと比較して過剰なリンクが結ばれてしまうのである。

共著者ゲームを始め，ネットワーク形成に関する従来の研究では，多くの場合，リンクの生産関数（または効用関数）について特殊な関数を想定している。したがって，結論も関数形に大きく依存することになる。（ネットワークの価値は各リンクから生まれた価値の合計として定義される。）また，それらの関数は直接的なリンクのみに依存すると仮定されており，リンクを通じた間接的なコネクションについては考慮されていない。しかし，数多くのリンクが結ばれネットワークが拡大すると，直接リンクが張られていなくても，プレーヤー間に間接的なコネクションが生まれ，そこから新たな価値が発生する可能性もある（例えば，情報の流れを想像すればいいだろう。直接的コネクションに比べて精度は落ちるかもしれないが，間接的コネクションを通じて情報を伝えることは可能である）。本論文では，それぞれのリンクが生み出す価値についてはとくに関数形を特定化せず，直接間接を問わず，コネクションの総体としてのネットワーク（や部分ネットワーク）から生まれる価値を先に定義する。そしてプレーヤーが得られる利得をシャプレー値（もしくはネットワークの設定ではマイヤソン値）によって与える。よって，本論文は提携形成ゲームと類似する一般的なアプローチによってリンクを結ぶインセンティブとネットワークの形成を分析するものである。もちろん，ネットワークの価値を決定する際には，そこにルールを設定しなければならないが，共著者ゲームや Jackson and Wolinsky（1996）のコネクション・ゲーム，技術の供与のゲームなど，多くのゲームを特殊ケースとできるような一般的なルールを用いる。

本論文では，とくにリンクがネットワークに与える効果の凸性と凹性に着目する。また，先述したように，プレーヤー間の間接的なコネクションがネットワークに与える効果にも注目する。そして，最適なネットワークと安定的なネットワークとのあいだの関係が，リンクを結ぶ費用にどのように依存するかを明らかにする。

最も関連する先行研究は, 先述したネットワーク形成に関する研究である。（Slikker and Nouweland（2001）が優れたサーベイである。）その他に，組織における情報の流れ（情報処理）に注目して，ネットワーク形成に関する研究を行ったものとしては Radner（1993）や Bolton and Dewatripont（1994）がある。また，Van-Zandt（1998）は情報処理の点から階層構造の効率性を議論している。また，Hurwicz（1960）に始まるメカニズム・デザインの研究も望ましいネットワークの「形」を議論するうえで関係している。提携の形成については多くの研究が存在する。関係するものとしては，Aumann and Dreze（1974）はシャプレー値にもとづく利得の分配についての研究である。また，Kim and Shin（2002）や Slikker and Nouweland（2001）も参照して欲しい。

本稿の構成は以下の通りである。2 節ではモデルの基本的な概念と枠組みを説明する。3 節では，3 人のプレーヤーのモデルに限定した上で最適ネットワークと対安定ネットワーク，そして両者の関係を議論する。そして，4 節で結論を述べる。

2.　モデル

ネットワーク

プレーヤーのリンクを結ぶインセンティブに基づいたネットワーク形成の動学的な特徴について考える。いま，$N = \{1, \cdots, n\}$ をプレーヤーの集合としよう（グラフ理論における節点，node に対応する）。また，ij をプレーヤー i と $j(i, \in N)$ を結ぶ**直接リンク**とする（グラフ理論での枝 edge に対応）。ネットワークはプレーヤー（節点）と直接リンク（枝）によって特徴付けられるグラフである。また，直接リンクで結ばれていないプレーヤー間が，複数の直接リンクによって，間接的に結ばれているとき，プレーヤーは**間接リンク**によって結ばれている。

さて，$L^N \equiv \{ij | ij \subset N,\ j \neq i\}$ と定義すると，L^N は N 上の可能な直接リンクの集合を示す。つまり，L^N は N 上の完全グラフ（complete graph）である。すると，ネットワークは $L \subset L^N$ によって表現できる。次に，$L_i \subset L$ をプレーヤー i が L において結ぶリンクの集合であるとし，$d_i \equiv |L_i|$ を集合 L_i の基数とする。すると，各ネットワーク (N, L) は（i）直接リンクの数（L の基数），および（ii）各プレーヤー $i \in N$ が結ぶ直接リンクの数（すなわち d_i）によって特徴付けられる。

ここで，ネットワークはプレーヤーの「名前」には依存しないと仮定する（対称性の仮定）。また，議論を単純化するために，$n = 3$ の場合に焦点を絞って議論する。一般的な $n \geq 4$ の場合については Kawamata and Tamada（2005）を参照して欲しい。$n = 3$ という状況では，プレーヤーを 3 種類のタイプに分類することができる。まず，タイプ $\emptyset$ プレーヤーは直接リンクを持たない $(d_\emptyset = 0)$。次に，タイプ A プレーヤーは 1 つの直接リンクで結ばれている $(d_A = 1)$。最後に，タイプ B プレーヤーは 2 つの直接リンクを持つ $(d_B = 2)$。$n = 3$ の場合の可能なネットワークは図 1 でまとめられている。ここで，例えば，A^s はネットワーク L^s におけるタイプ A プレーヤーを意味してい

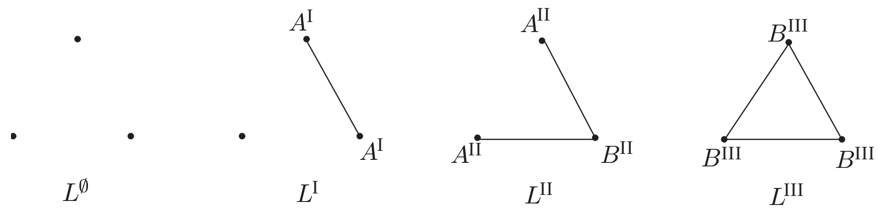

図 1　可能なネットワーク（$n = 3$）

る。また線形のネットワーク L^{II} と，完全ネットワーク L^{III} の2つがすべてのプレーヤーを結ぶことに注意して欲しい。

ネットワークの価値と各プレーヤーの私的価値（利得）

ネットワークの価値は直接リンクと間接リンクの数によって決まる。いま $\mathscr{L}$ をネットワークの集合とし，$V : \mathscr{L} \rightarrow \mathbb{R}$ を各ネットワーク $L^s \in \mathscr{L}$ に価値を割り当てる実数値関数としよう。とくに，それは $V(L^s) =$[リンクから形成されたネットワークの総価値]$-$[直接リンクを結ぶ費用] によって与えられるとしよう。

ネットワーク形成のゲームは $G = \{N, V(L), L \in \mathscr{L}\}$ によって定義される。プレーヤーのリンクを通じた貢献の価値，そして，直接リンクを通じたネットワークの価値は，各プレーヤーが結ぶリンクの数に依存する。直接リンクは2人のプレーヤーのコラボレーションを表現しているので，各プレーヤーのネットワークへの貢献は結ぶリンクの数の非減少関数となる。

間接リンクについては，2人のプレーヤー間の共同作業が情報の伝達を必要とする場合を想像するとよい。もし2人のプレーヤーが直接リンクによって結ばれていれば，正確な情報伝達が可能だろう。けれども，間接的にのみ結ばれている場合には，情報の伝達が困難となり，情報が失われていくだろう。

プレーヤー i はシャプレー値（Shapley value），もしくはネットワークゲームでのマイヤソン値（Myerson value）によって表現された「個人の貢献」（以下では，シャプレー値と呼ぶことにする）を，利得 $u_i(L)$ としてネットワーク L から受け取る。

対安定性とネットワーク形成ゲームのダイナミクス

プレーヤーは新しいリンクを結ぶことも既存のリンクを切ることも自由である。対安定性の概念はネットワークの動学的な調整過程における均衡（定常点）を描写している。それは次のように定義される。

定義 1（対安定性）

ネットワーク (N, L)　次の2つの条件が満たされるとき対安定である。

1. すべての $ij \in L$ について，$u_i(L) \geq u_i(L \backslash ij)$ と $u_j(L) \geq u_j(L \backslash ij)$ が満たされる。

2. すべての $ij \notin L$ について，もし $u_i(L) \leq u_i(L \cup ij)$ ならば $u_j(L) \geq u_j(L \cup ij)$ である。

この定義は Jackson and Wolinsky（1996）によるものであることを注記しておく。

ネットワークの動学過程は，それぞれの L^s に対して推移可能なネットワークを特定化するよ

うな多価写像として定義できる。

定義 2（動学的調整過程）

ネットワーク形成の動学的プロセスは，写像 $H : L^s \mapsto 2^{L^N}$ によって定義できる。ここで，$L^s \in H(L^s)$ であり，$t \neq s$ について，(i) L^s では結ばれていないが，L^t でリンクを結ぶことを弱い意味で選好するようなプレーヤーのペア ij が存在するか，もしくは，(ii)ネットワーク L^s でのリンクを切断し，L^t することを好むプレーヤーが存在するとき，$L^t \in H(L^s)$ が成立する。

ネットワーク L^s は，$\{L^s\} = H(L^s)$ が成立するとき均衡であり，それは対安定である。よって，対安定ネットワークは写像 H で描写される動学過程のシンク（sink）である。Jackson and Watts（2002）も同様の動学過程を考えている。

以下では，動学的な調整過程を $\rightarrow$ や $\leftarrow$ といった矢印を用いて記述する。ここで，$L \rightarrow L'$ は，ネットワーク L が L' へと新しいリンクが結ばれることで移行することを意味し，$L \leftarrow L'$ は，ネットワーク L' が L へと既存のリンクが切断されることで移行することを意味している。また，もし $u_i(L) = u_i(L')$ が成立し，L' はプレーヤー i がより多くのリンクを結ぶことを要求するならば，プレーヤー i は L を選好すると仮定する。[(1)]

3.　最適ネットワークと対安定ネットワーク

それでは，プレーヤーが 3 人のケースについて，ネットワークの総価値を最大化する最適ネットワークと，対安定ネットワークとを具体的に分析してみよう。動学過程はシャプレー値によって与えられた対のインセンティブに従う。とくに，動学過程が最適ネットワークに到達するかについて調べてみたい。そのために，ネットワーク全体の価値を先に定義し，それからプレーヤーの利得を決めるためにシャプレー値を求める。

リンクを結ぶコストは k である。3 人プレーヤーの場合には，4 つのネットワーク，$L^{\emptyset}, L^{\mathrm{I}}$，$L^{\mathrm{II}}$，そして L^{III} が存在しうる。そして，$L^{\emptyset}$ を除いたネットワーク価値関数は，k を考慮しないならば 3 つのパラメータ v^{I}，v^{II}，そして v^{III} によって特徴付けられる。ここで，それぞれの s について，v^s はネットワーク L^s の総便益を示している。よって，ネットワークの純便益は次のように記述できる。

$$V(L^{\emptyset}) = 0, \quad V(L^{\mathrm{I}}) = v^{\mathrm{I}} - k, \quad V(L^{\mathrm{II}}) = v^{\mathrm{II}} - 2k, \quad V(L^{\mathrm{III}}) = v^{\mathrm{III}} - 3k. \tag{1}$$

（1）　不等号が厳密に成立するかどうかについてはそれほど注意を払わない。実際，それは結論について重要な影響を与えることはない。

ネットワーク	タイプ $\emptyset$	$u_A(L^s)$(タイプ A)	$u_B(L^s)$(タイプ B)
$L^{\emptyset}$	0		
L^{I}	0	$\frac{v^{\mathrm{I}}}{2}-\frac{k}{2}$	
L^{II}	0	$\frac{2v^{\mathrm{II}}-v^{\mathrm{I}}}{6}-\frac{k}{2}$	$\frac{v^{\mathrm{II}}+v^{\mathrm{I}}}{3}-k$
L^{III}			$\frac{v^{\mathrm{III}}}{3}-k$

表 1　シャプレー値

ここで，次の不等式が常に成立すると仮定する。

仮定 1

$$v^{\mathrm{III}} \geq v^{\mathrm{II}} \geq v^{\mathrm{I}}.$$

次に，$u_i(L^s)$ をネットワーク L^s におけるタイプ i プレーヤーのシャプレー値だとしよう。そして，それはプレーヤーの利得である。各ネットワークのシャプレー値は表 1 にまとめられている。

ネットワークの純価値 $V(L^s)$ を最大化するような最適ネットワークは k と v^s の水準に依存する。基本的に，リンクを結ぶ費用 k が増加するにつれて，最適なリンクの数は減少していくことは直観的に明らかだろう。より正確には，次の結論を得ることができる。

命題 1（最適なリンクの数）

仮定 1 が満たされるとする。このとき，次の関係が成立する。

[a]　もし $\max\{v^{\mathrm{I}}, v^{\mathrm{II}}/2, v^{\mathrm{III}}/3\} \geq k$ ならば，

i　L^{I} は，条件

$$k \geq v^{\mathrm{II}} - v^{\mathrm{I}}, \quad \text{and} \quad k \geq \frac{v^{\mathrm{III}} - v^{\mathrm{I}}}{2}$$

が成立するとき最適である。

ii　L^{II} は，条件

$$v^{\mathrm{II}} - v^{\mathrm{I}} \geq k \geq v^{\mathrm{III}} - v^{\mathrm{II}}$$

が成立するとき最適である。

iii　L^{III} は，条件

$$v^{\mathrm{III}} - v^{\mathrm{II}} \geq k, \quad \text{and} \quad \frac{v^{\mathrm{III}} - v^{\mathrm{I}}}{2} \geq k,$$

が成立するとき最適である。

[b]　もし $k \geq \max\{v^{\mathrm{I}}, v^{\mathrm{II}}/2, v^{\mathrm{III}}/3\}$ ならば，$L^{\emptyset}$ が最適である。

証明

(1)より簡単な計算によって確かめられる。

ここで，ケース（ii）が成立するためには，$2v^{\mathrm{II}} \geq v^{\mathrm{I}} + v^{\mathrm{III}}$ という条件が成立する必要があることに注意して欲しい。これは，以下で説明する凹性条件である。

次に，ネットワークが動学的な調整過程にしたがってどのように変化するかを確認しよう。動学的なプロセスは，最適性ではなく対のインセンティブに依存することを思い出して欲しい。よって，最適性と対安定性とのあいだには齟齬が発生し得る。以下では，対安定ネットワークを決定する要因は，結ばれるリンクの数が増加するとネットワークの価値がどのように変化するか（つまり，ゲームの凹性もしくは凸性）についての条件であることを証明する。

動学的な調整過程がどのネットワークに収束するかということが基本的な問題である。リンクの形成，切断の動学的なプロセスは次の補助定理で特徴付けられる。

補助定理 1

i　$L^{\emptyset} \to L^{\mathrm{I}}$ のための必要十分条件は $v^{\mathrm{I}} > k$ である（条件（i））。

ii　$L^{\mathrm{I}} \to L^{\mathrm{II}}$ のための必要十分条件は $2v^{\mathrm{II}} - v^{\mathrm{I}} > 3k$ である（条件（ii））。

iii　$L^{\mathrm{II}} \to L^{\mathrm{III}}$ のための必要十分条件は $2v^{\mathrm{III}} - 2v^{\mathrm{II}} + v^{\mathrm{I}} > 3k$ である（条件（iii））。

証明

対安定性は（i）$L^{\emptyset} \to L^{\mathrm{I}}$ の必要十分条件が $u_A(L^{\mathrm{I}}) > u_{\emptyset}(L^{\emptyset})$ であること，（ii）$L^{\mathrm{I}} \to L^{\mathrm{II}}$ の必要十分条件が，$u_B(L^{\mathrm{II}}) > u_A(L^{\mathrm{I}})$ と $u_A(L^{\mathrm{II}}) > u_{\emptyset}(L^{\mathrm{I}})$ の 2 つが満たされること，そして，（iii）$L^{\mathrm{II}} \to L^{\mathrm{III}}$ の必要十分条件は $u_B(L^{\mathrm{III}}) > u_A(L^{\mathrm{II}})$ が満たされることであることが分かる。よって，表 1 より結論を得る。

対安定ネットワークの性質をさらに分析するために，ゲームの構造をさらに特定化してみよう。いま，条件（C1)（もしくは条件（C2））を，リンクを結ぶ費用を考慮しない価値関数（つまり，リンクを結ぶことの便益）においてみたい。

（C1）リンクの便益の凸性

$$(\alpha)\ v^{\mathrm{II}} \geq 2v^{\mathrm{I}},$$
$$(\beta)\ v^{\mathrm{I}} + v^{\mathrm{III}} \geq 2v^{\mathrm{II}}.$$

注意 1

[a] (α) と (β) は便益の優加法性（supper-additivity）を意味する。つまり，以下の関係が成立する。

$$(\gamma) \quad v^{\mathrm{III}} \geq v^{\mathrm{I}} + v^{\mathrm{II}}.$$

[b] $v^{\mathrm{I}} + v^{\mathrm{III}} \geq 2v^{\mathrm{II}}$ が成立すれば，条件（iii）は条件（ii）の十分条件であり，$v^{\mathrm{II}} \geq 2v^{\mathrm{I}}$ が成立すれば条件（ii）は条件（i）の十分条件である。

条件（C1）は戦略型ゲームについて定義されるゲームの凸性というよく知られた概念に相当する（例えば，Shapley（1971）and Ichiishi（1983）を参照せよ）。つまり，ネットワークが $L^{\emptyset}$ から L^{III} へと移行するにつれて，新しいリンクの追加的な便益が増加することを意味している。よって，凸性条件（C1）が成立すれば，補助定理 1 の条件（iii）は，比較的大きな k についても成立するもっとも弱い条件であり，条件（i）は十分に小さな k のもとでしか成立しないもっとも強い条件となる。

次の命題は条件（C1）のもとで，k の水準に応じた対安定ネットワークを記述している。

命題 2（凸性のもとでのネットワークの安定性）

仮定 1 と凸性条件（C1）が成立するとしよう。すると，k が大きくなるにつれて，対安定ネットワークの集合は次のように変化する

$$\{L^{\mathrm{III}}\} \Rightarrow \{L^{\emptyset}, L^{\mathrm{III}}\} \Rightarrow \{L^{\emptyset}\}.$$

より正確には, ネットワーク形成の動学的プロセスと対安定ネットワークは次のように変化する。

1. もし $v^{\mathrm{I}} > k$ ならば（つまり，もし V^{I} が正であるように k が十分に小さいならば),

$$L^{\emptyset} \rightarrow L^{\mathrm{I}} \rightarrow L^{\mathrm{II}} \rightarrow L^{\mathrm{III}}$$

   が成立し， L^{III} が唯一の対安定ネットワークである。

2. もし $2v^{\mathrm{II}} - v^{\mathrm{I}} \geq 3k > 3v^{\mathrm{I}}$ ならば,

$$L^{\emptyset} \leftarrow L^{\mathrm{I}} \rightarrow L^{\mathrm{II}} \rightarrow L^{\mathrm{III}}$$

   が成立する。そして，$L^{\emptyset}$ と L^{III} の 2 つが対安定ネットワークである。

3. もし $2v^{\mathrm{III}} - 2v^{\mathrm{II}} + v^{\mathrm{I}} \geq 3k > 2v^{\mathrm{II}} - v^{\mathrm{I}}$ ならば,

$$L^{\emptyset} \leftarrow L^{\mathrm{I}} \leftarrow L^{\mathrm{II}} \rightarrow L^{\mathrm{III}}$$

が成立する。そして，$L^{\emptyset}$ と L^{III} の 2 つが対安定ネットワークである。

4. もし $3k \geq 2v^{\mathrm{III}} - 2v^{\mathrm{II}} + v^{\mathrm{I}}$ ならば（十分に大きい k），

$$L^{\emptyset} \leftarrow L^{\mathrm{I}} \leftarrow L^{\mathrm{II}} \leftarrow L^{\mathrm{III}}$$

が成立し，$L^{\emptyset}$ が唯一の対安定ネットワークである。

証明

ケース 1 では，補助定理 1 の条件（i）−（iii）のすべてが満たされる。ケース 2 では，条件（ii）と条件（iii）のみが満たされる。ケース 3 では条件（iii）のみが満たされる。そして，ケース 4 ではどの条件も満たされない。

次に，凹性の条件が成立する場合を分析する。凹性条件は次のように特徴付けられる。

（C2）リンクの便益の凹性

$$(\alpha')\ v^{\mathrm{II}} \leq 2v^{\mathrm{I}},$$
$$(\beta')\ v^{\mathrm{I}} + v^{\mathrm{III}} \leq 2v^{\mathrm{II}}.$$

注意 2

[a] (α') と (β') は便益の劣加法性（sub-additivity）を意味する。 つまり，以下の関係が成立する。

$$(\gamma') \quad v^{\mathrm{III}} \leq v^{\mathrm{I}} + v^{\mathrm{II}}.$$

[b] 条件（C2）が成立すれば，新しい便益の追加的な便益は減少する。

条件（C2）のもとでは，補助定理 1 の 3 つの条件のうち，条件（i）が比較的大きな k でも成立するもっとも弱い条件であり，条件（iii）は十分に小さな k を要求するもっとも強い条件である。

命題 3**（凹性のもとでのネットワークの安定性）**

仮定 1 と凹性条件（C2）が成立するとしよう。すると，k が大きくなるにつれて，ネットワーク形成の動学的プロセスと対安定ネットワークは次のように変化する。対安定ネットワークの集合は次のように変化する。

1. もし $2v^{\mathrm{III}} - 2v^{\mathrm{II}} + v^{\mathrm{I}} > 3k$ ならば（十分に小さい k），

$$L^{\emptyset} \rightarrow L^{\mathrm{I}} \rightarrow L^{\mathrm{II}} \rightarrow L^{\mathrm{III}}$$

が成立し，L^{III} が唯一の対安定ネットワークである。

2. もし $2v^{\mathrm{II}} - v^{\mathrm{I}} > 3k \geq 2v^{\mathrm{III}} - 2v^{\mathrm{II}} + v^{\mathrm{I}}$ ならば，

$$L^{\emptyset} \to L^{\mathrm{I}} \to L^{\mathrm{II}} \leftarrow L^{\mathrm{III}}$$

が成立し，L^{II} が唯一の対安定ネットワークである。

3. もし $3v^{\mathrm{I}} > 3k \geq 2v^{\mathrm{II}} - v^{\mathrm{I}}$ ならば，

$$L^{\emptyset} \to L^{\mathrm{I}} \leftarrow L^{\mathrm{II}} \leftarrow L^{\mathrm{III}}$$

が成立し，L^{I} が唯一の対安定ネットワークである。

4. もし $k \geq v^{\mathrm{I}}$ ならば（十分に大きい k），

$$L^{\emptyset} \leftarrow L^{\mathrm{I}} \leftarrow L^{\mathrm{II}} \leftarrow L^{\mathrm{III}}$$

が成立し，$L^{\emptyset}$ が唯一の対安定ネットワークである。

証明

ケース 1 では，補助定理 1 の条件（i）－（iii）のすべてが満たされる。ケース 2 では，条件（i）と条件（ii）のみが満たされる。ケース 3 では条件（i）のみが満たされる。そして，ケース 4 ではどの条件も満たされない。

これまでの議論をまとめることにより，最適ネットワークと対安定ネットワークとのあいだの関係について次の結論を得る。

命題 4

1. ネットワーク L^{I} は，

$$v^{\mathrm{I}} > k \geq \max\left\{v^{\mathrm{II}} - v^{\mathrm{I}}, \frac{v^{\mathrm{III}} - v^{\mathrm{I}}}{2}, \frac{v^{\mathrm{II}} - v^{\mathrm{I}}}{3}\right\}$$

が満たされるとき，最適ネットワークかつ対安定ネットワークである。

2. ネットワーク L^{II} は，$v^{\mathrm{II}} - v^{\mathrm{I}} \geq k \geq v^{\mathrm{III}} - v^{\mathrm{II}}$ が満たされるとき最適ネットワークであり，$2v^{\mathrm{II}} - v^{\mathrm{I}} > 3k \geq 2v^{\mathrm{III}} - 2v^{\mathrm{II}} + v^{\mathrm{I}}$ が満たされるとき対安定ネットワークである。

3. ネットワーク L^{III} は is both optimal and pairwise stable if

$$2v^{\mathrm{III}} \geq \max\{2v^{\mathrm{I}}+4k, 2v^{\mathrm{II}}-v^{\mathrm{I}}+3k\}$$

が満たされるとき，最適ネットワークかつ対安定ネットワークである。

さらに，もし L^{III} が対安定ネットワークで，$v^{\mathrm{I}} \geq k$ が満たされるならば（つまり，少なくとも 1 つのリンクを結ぶインセンティブが存在する），それは最適ネットワークでもある。

証明

ケース 1 は，もし $v^{\mathrm{I}} \geq v^{\mathrm{II}}-k$ と $v^{\mathrm{I}} \geq v^{\mathrm{III}}-2k$ が満たされるならば，L^{I} が最適であること，そして，もし $v^{\mathrm{I}} > k$ と $3k \geq 2v^{\mathrm{II}}-v^{\mathrm{I}}$ が満たされるならば L^{I} が対安定であることから分かる。ケース 2 は明らかである。ケース 3 は，$v^{\mathrm{III}} \geq \max\{v^{\mathrm{I}}+2k, v^{\mathrm{II}}+k\}$ が満たされればネットワーク L^{III} が最適であり，もし $2v^{\mathrm{III}}-2v^{\mathrm{II}}+v^{\mathrm{I}} \geq 3k$ が満たされるならば L^{III} が対安定であるという事実から確認できる。

したがって，もし $v^{\mathrm{I}} > k$ が満たされ，v^{I} が十分に v^{II} と v^{III} に近ければ，ネットワーク L^{I} は最適かつ対安定ネットワークである。また，L^{I} は，凹性条件 (α')，つまり $2v^{\mathrm{I}} \geq v^{\mathrm{II}}$ が満たされるとき，最適かつ対安定ネットワークであることも分かる。ネットワーク L^{II} は，凹性条件 (β')，つまり $2v^{\mathrm{II}} \geq v^{\mathrm{I}}+v^{\mathrm{III}}$ が満たされるときのみ最適ネットワークである。そして，この不等号が厳密であるとき，L^{II} 最適ネットワークであるような k の存在が保証される。ネットワーク L^{II} はこの凹性条件が成立するときのみ最適かつ対安定ネットワークであることが分かる。実際，もし v^{II} が v^{I} よりも v^{III} に近く，そして $v^{\mathrm{II}}-v^{\mathrm{I}} > 3k/2$ が満たされるとき，ネットワーク L^{II} は最適かつ対安定ネットワークである。最後に，v^{III} 大きく，そして k が v^{I} や v^{III} と比較して小さいとき，ネットワーク L^{III} は最適かつ対安定ネットワークである。

本稿の分析は凸性条件 (C1 α, β)，もしくは凹性条件 (C2, α', β') が満たされる場合に限られている。しかし，例えば，(C1 β) のみが満たされる場合の分析も可能である。Slikker and Nouweland（2001, chapter 8）は $V^{\mathrm{I}}=0$ であるような特殊ケースについて，このような分析を行っている。

4. 結語

本稿の分析手法には主に 2 つの貢献がある。まず，ネットワークの価値を定義し，プレーヤーの利得をシャプレー値によって与えたことである。シャプレー値はネットワークへのプレーヤーの貢献を定義する上で特別な仮定を必要とせず，もっとも適した方法であるといえる。そして，ネットワーク形成の動学過程を対のインセンティブで描写した。これは近視眼的で局所的な過程のみを捉

えており，よって大きな変化を描写するものではないが，すでに確認したように多くの結論を得ることができる。そして，本稿では最適ネットワークと対安定ネットワークを特徴付ける上で，ネットワーク形成ゲームの凸性と凹性とが大きな役割を果たすことを明らかにした。

より，分析を進めるためにはプレーヤーの数が 4 人以上である場合を扱う必要がある。それについては，Kawamata and Tamada（2005）を参照して欲しい。

（名誉教授）
（経済学部助教授）

参　考　文　献

Bolton, P. and M. Dewatripont (1994), "The Firm as a Communication Network", *Quarterly Journal of Economics*, 109, 809–839.

Dutta, B. and S. Mutuswami (1997), "Stable Networks", *Journal of Economic Theory*, 76, 322–344.

Hurwicz, L. (1960), "Optimality and Information Efficiency in Resource Allocation Processes", in K.J. Arrow, S. Karlin, and P. Suppes (eds.) *Mathematical Methods in Social Sciences*, 27–46. Stanford University Press.

Ichiishi, T. (1983), '*Game Theory for Economic Analysis*', Academic Press.

Jackson, M. and A. Watts (2002), "Evolution of Social and Economic Networks", *Journal of Economic Theory*, 106, pp. 265–295.

Jackson, M. and A. Wolinsky (1996), "A Strategic Model of Social and Economic Networks", *Journal of Economic Theory*, 71, 44–74.

Kawamata, K. and Y. Tamada (2005), "Direct and Indirect Connection, the Shapley Value, and Network Formation", *Advances in Mathematical Economics*, 8, 315–348.

Kim, C. and H. Shin (2002), "Endogenous Formation of Coalitions with Composite Goods", *International Journal of Industrial Organization*, 20, 1491–1511.

Myerson, R. (1977), "Graphs and Cooperation in Games", *Mathematical Operations Research*, 2, 225–229.

Radner, R. (1993). "The Organization of Decentralized Information Processing," *Econometrica*, 61, 1109–46.

Shapley, L. S. (1953), "A Value for n-Person Games", in H. W. Kuhn and A. W. Tucker (eds.), *Contributions to the Theory of Games*, vol. III, 307–317. Princeton University Press.

Shapley, L. S. (1971), "Cores of Convex Games," *International Journal of Game Theory*, 1, 11–26.

Slikker, M., and A. van den Nouweland (2001), '*Social and Economic Networks in Cooperative Game Theory*', Kluwer.

Van Zandt, T. (1998), "The scheduling and organization of periodic associative computation: Efficient networks," *Review of Economic Design*, 3 (2), 93–127.