Title	白色雑音の和の周期確率過程への収束について
Sub Title	On convergence of sum of white noises to periodic stochastic process
Author	加藤, 寛之(Kato, Hiroyuki)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2005
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.98, No.1 (2005. 4) ,p.55- 73
JaLC DOI	10.14991/001.20050401-0055
Abstract	本稿は, 景気循環を説明する有力な見方である, ランダムな外生的ショックの累積が循環を生む, という主張を数学的に証明するものである。白色雑音の線形和から成る確率過程が, 和の総数を増やしていった極限において, 周期確率過程に確率収束することが示される。また, 概収束のための条件も述べる。 This study mathematically demonstrates the argument that the accumulation of random exogenous shocks produces circulation, a powerful perspective for explaining the business cycle. Specifically, it is shown that stochastic processes comprising a linear sum of white noise converge in probability to periodic stochastic processes, with the total of their sum to be increasing to infinity. In addition, I describe conditions for almost sure convergences.
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20050401-0055

白色雑音の和の周期確率過程への収束について

On Convergence of Sum of White Noises to Periodic Stochastic Process

加藤 寛之(Hiroyuki Kato)

本稿は，景気循環を説明する有力な見方である，ランダムな外生的ショックの累積が循環を生む，という主張を数学的に証明するものである。白色雑音の線形和から成る確率過程が，和の総数を増やしていった極限において，周期確率過程に確率収束することが示される。また，概収束のための条件も述べる。

Abstract

This study mathematically demonstrates the argument that the accumulation of random exogenous shocks produces circulation, a powerful perspective for explaining the business cycle. Specifically, it is shown that stochastic processes comprising a linear sum of white noise converge in probability to periodic stochastic processes, with the total of their sum to be increasing to infinity. In addition, I describe conditions for almost sure convergences.

「三田学会雑誌」98 巻 1 号（2005 年 4 月）

白色雑音の和の周期確率過程への収束について

加　藤　寛　之

（初稿受付 2004 年 8 月 31 日，
査読を経て掲載決定 2005 年 2 月 2 日）

要　　旨

本稿は，景気循環を説明する有力な見方である，ランダムな外生的ショックの累積が循環を生む，という主張を数学的に証明するものである。白色雑音の線形和から成る確率過程が，和の総数を増やしていった極限において，周期確率過程に確率収束することが示される。また，概収束のための条件も述べる。

キーワード

白色雑音，弱定常確率過程，スペクトル，景気循環

1．序

決定論的モデルとしての一部門最適成長モデルでは，最適経路は単調に定常状態に収束する（Cass (1966), Koopmans (1965), Dechert and Nishimura (1983) 等)。また，Frisch (1933) は連立微分方程式からなるマクロ動学モデルにおいて，いくつかの試算によって解が 0 に減衰することから，循環の説明のためには定期的な外生的ショックによって振幅を復活させる必要があると主張した。軌道の波形そのものは微分方程式によって決まるが，その振幅については外部からの衝撃による説明を要したのである。また，足立 (1984) の中でも安定的な均衡をもつ動学モデルが提示され，それだけでは持続的循環の説明ができず，外部衝撃の必要性が主張されている。景気循環の理論において，外生的ショックが定期的にモデルに衝撃を与える，という考え方は有力な説明の一つである。また，Yule (1927) は，ある定差方程式に外生的なランダム項を加え，ランダム項の累積から生じる時系列から周期性を観察しようとした。リアル・ビジネス・サイクル理論と呼ばれる一連の研究（Long and Plosser (1983), Kydland and Prescott (1982)）も，外生的ショックの累積が周期性を生み出すメカニズムを利用したものといえるが，これらはみなシミュレーションによる結果を示したにとどまり，数学的定理を求めたものではない。

本稿の目的は，外生的ショックの累積が循環を生む，という主張を数学的に証明することである。

外生的ショックの累積が循環を生み得るか，について数学的な回答を示しているのは Slutzky（1937）である。本論文では，別のアプローチによる証明を行う。ここでは白色雑音という，平均 0，分散は一定，無相関な確率過程を考える。これらの線形結合をとると，共分散関数が時間差のみに依存する弱定常確率過程が作られる。この共分散関数のスペクトル測度を求め，それが周期関数のスペクトル測度に弱収束することを示す。それによって白色雑音の，ある線形和で作られる弱定常確率過程は和の総数を増やしていった極限においては周期確率過程に確率収束することが示される。さらに本稿では，概収束する十分条件も提示する。

Slutzky の論文については，新開（1967），Sargent（1987）等で取り上げられ解説がなされているが，それらでは数学的に何が示されているかははっきりしない。Sargent（1987）もまた本稿と同様，スペクトルを利用するアプローチを採用しているが，そこでの線形結合のとり方そのままでは周期確率過程への収束は示すことができない。弱定常確率過程の研究は，特に河田（1985）に詳しい。そこでは共分散関数が周期関数であることと弱定常確率過程が殆ど至る所周期関数であることが同値であることが示されている。その他では時系列解析に関連して，Granger and Newbold（1986），Hamilton（1994）などがある。

本稿の構成は以下の通りである。2 節で白色雑音の線形和による弱定常確率過程を定義する。3 節でその共分散関数のスペクトル測度の密度関数を求め，スペクトル測度が周期関数のスペクトル測度に弱収束することを示し，それにより弱定常確率過程が周期確率過程に確率収束することを示す。さらに概収束する十分条件も述べる。4 節で Slutzky と Sargent の結果との比較を行う。5 節では数学上の補足をする。

2. 弱定常確率過程

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする。$\varepsilon : \mathbb{Z} \times \Omega \to \mathbb{R}$ を以下の条件を満たす確率過程であるとする。$\varepsilon(t, \omega) = \varepsilon_t(\omega)$ と書くことにする。$\varepsilon_t \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で，かつ，

$$E[\varepsilon_t] = 0, \qquad E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2, \qquad E[\varepsilon_t \varepsilon_s] = 0 \quad t \neq s$$

とする。これを白色雑音（white noise）という。但し，$\mathcal{L}^2$ は 2 乗可積分な実数値関数の空間つまり，$\int_\Omega |x|^2 dP < \infty$ を満たす実数値関数 x の空間であり，$E[x] = \int_\Omega x dP$ である。演算子 L^n を，

$$L^n \varepsilon_t = \varepsilon_{t-n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

と定義し，これを時間の遅れの演算子（lag operator）という。ここで以下のような確率過程を考え

る。$L^1 = L$ とする。

$$y_t^n(\omega) = (1-L)^{\alpha n}(1+L)^n \varepsilon_t(\omega), \qquad \alpha \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}.$$

$(1-L)^{\alpha n}(1+L)^n$ を $b_0 + b_1 L + b_2 L^2 + b_3 L^3 \cdots + b_{(1+\alpha)n} L^{(1+\alpha)n}$ と書くことにすると，

$$y_t^n(\omega) = b_0 \varepsilon_t(\omega) + b_1 \varepsilon_{t-1}(\omega) + b_2 \varepsilon_{t-2}(\omega) \cdots + b_{(1+\alpha)n} \varepsilon_{t-(1+\alpha)n}(\omega)$$

と書ける。$E[(y_t^n)^2] = (b_0^2 + b_1^2 + \cdots b_{(1+\alpha)n}^2)\sigma^2$ となり，ω, t には依存しない。

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{E[(y_t^n)^2]}}$$

とおく。ここで，

$$Y_t^n(\omega) = A_n (1-L)^{\alpha n}(1+L)^n \varepsilon_t(\omega)$$

と定義する。勿論，$Y_t \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ であり，共分散は

$$E[Y_t^n Y_s^n] = A_n^2 \left(\sum_{j=0}^{(1+\alpha)n-u} b_j b_{j+u}\right)\sigma^2, \quad u = t-s \geq 0$$

であり，時間差のみに依存する。共分散関数が時間差のみに依存する $\mathcal{L}^2$ 確率過程のことを一般に弱定常確率過程という（定義は河田（1985）等)。$\{Y_t^n\}$ は弱定常確率過程である。この共分散関数を $\rho_n(u)$ と書くことにする。当然，$\rho_n(u) = \rho_n(-u)$ であり，$u > (1+\alpha)n$ に対しては $\rho_n(u) = 0$ であることに注意。

3. 主結果

まず，この節の主結果である定理 1 の内容について先に述べる。$\{Y_t^n\}$ を前節で構成した弱定常確率過程とする。

定理 1. 各 n, ω で，t についての周期関数となる確率過程 $X_t^n(\omega)$ で，

$$\|Y_t^n(\omega) - X_t^n(\omega)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

がすべての $t \in \mathbb{Z}$ で成立するものが存在する。

今，毎 $t(\in \mathbb{Z})$ 期に ε_t の外生的ショックが起こっている，と考える。Y_t^n は，t から $t-(1+\alpha)n$ までに起こった外生的ショックの累積である（前節の定義より）。定理 1 は，ショックの累積数を表す n を増やしていった時，その極限において，Y_t^n は周期確率過程に確率収束することを述べたもので，「ショックの累積が周期性を生む」事態を表している。

以下，定理 1 の証明のために，いくつかの補題を用意する。ρ_n を前節で定義した $\{Y_t^n\}$ の共分散関数とする。スペクトル測度を以下のように定義する。

定義.

$$\rho_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\theta}\mu_n(d\theta) \quad t \in \mathbb{Z}$$

となる $[-\pi, \pi]$ 上のラドン測度[1] μ_n を，ρ_n のスペクトル測度という[2]。

補題 1.

$$p_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{u=0,\pm1,\pm2,\cdots\pm(1+\alpha)n} \rho_n(u)e^{-iu\theta}$$

は，$\{Y_t^n\}$ の共分散関数 ρ_n のスペクトル確率密度関数である。

（証明） $p_n(\theta)d\theta$ が共分散関数 $\rho_n(t)$ のスペクトル確率測度になっていることを示せばよい。つまり，$p_n(\theta) \geq 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} p_n(\theta)d\theta = 1$ かつ，

$$\rho_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\theta}p_n(\theta)d\theta, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

と表現できることを示せばよい。

$$\begin{aligned}
\text{(1) の右辺} &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\theta}(\frac{1}{2\pi} \sum_{u=0,\pm1,\pm2,\cdots\pm(1+\alpha)n} \rho_n(u)e^{-iu\theta})d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\theta}[\frac{1}{2\pi}(\rho_n(0) + \sum_{u=1}^{(1+\alpha)n} \rho_n(u)[e^{-iu\theta} + e^{iu\theta}])]d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\theta}[\frac{1}{2\pi}(\rho_n(0) + \sum_{u=1}^{(1+\alpha)n} 2\rho_n(u)\cos u\theta)]d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\rho_n(0)\int_{-\pi}^{\pi} e^{it\theta}d\theta + \frac{1}{\pi}\sum_{u=1}^{(1+\alpha)n} \rho_n(u)\int_{-\pi}^{\pi} e^{it\theta}\cos u\theta d\theta
\end{aligned}$$

---

(1)　X を位相空間，$\mathcal{B}(X)$ をボレル–σ–集合体とする。μ をその上の有限測度とする。その時，μ がラドン測度とは，任意の $A \in \mathcal{B}(X)$，$\varepsilon > 0$ に対し，$\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ となるコンパクト集合 $K \subset A$ が存在することをいう。

(2)　スペクトル測度の存在については，付録参照。

$$= \frac{1}{2\pi}\rho_n(0)(\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\theta d\theta + i\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\theta d\theta)$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{u=1}^{(1+\alpha)n}\rho_n(u)(\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\theta\cos u\theta d\theta + i\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\theta\cos u\theta d\theta)$$

ここで，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\theta d\theta = \begin{cases} 2\pi & t = 0 \\ 0 & t \neq 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\theta\cos u\theta d\theta = \begin{cases} \pi & u = t \\ 0 & u \neq t, \end{cases}$$

また，すべての $t, u \in \mathbb{Z}$ で，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\theta d\theta = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\theta\cos u\theta d\theta = 0,$$

が成立する。従って，

$$\text{（1）の右辺} = \begin{cases} \rho_n(t) & t = 0, \pm1, \pm2, \cdots \pm (1+\alpha)n \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となることが分かり (1) がいえた。また，

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_n(\theta)d\theta = \rho_n(0) = E[(Y_t^n)^2] = \frac{(b_0^2 + b_1^2 + \cdots b_{(1+\alpha)n}^2)\sigma^2}{(b_0^2 + b_1^2 + \cdots b_{(1+\alpha)n}^2)\sigma^2} = 1$$

がすべての $n \in \mathbb{N}$ で成立している。ここで具体的に $p_n(\theta)$ を計算する。

$$p_n(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{u=0,\pm1,\pm2,\cdots\pm(1+\alpha)n}\rho_n(u)e^{-iu\theta}$$

$$= \frac{1}{\pi}[\rho_n(0) + \rho_n(1)[e^{-i\theta} + e^{i\theta}] + \rho_n(2)[e^{-2i\theta} + e^{2i\theta}]$$

$$+ \cdots + \rho_n((1+\alpha)n)[e^{-(1+\alpha)ni\theta} + e^{(1+\alpha)ni\theta}]]$$

$$= \frac{1}{2\pi}A_n^2\sigma^2[\sum_{j=0}^{(1+\alpha)n}b_j^2 + \sum_{j=1}^{(1+\alpha)n}b_jb_{j-1}[e^{-i\theta} + e^{i\theta}] + \sum_{j=2}^{(1+\alpha)n}b_jb_{j-2}[e^{-2i\theta} + e^{2i\theta}]$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad + \cdots + \sum_{j=(1+\alpha)n}^{(1+\alpha)n} b_j b_{j-(1+\alpha)n}[e^{-(1+\alpha)ni\theta} + e^{(1+\alpha)ni\theta}]] \\
&= \frac{1}{2\pi} A_n^2 \sigma^2 (b_0 + b_1 e^{-i\theta} + b_2 e^{-2i\theta} + \cdots b_{(1+\alpha)n} e^{-(1+\alpha)ni\theta}) \\
&\qquad \times (b_0 + b_1 e^{i\theta} + b_2 e^{2i\theta} + \cdots b_{(1+\alpha)n} e^{(1+\alpha)ni\theta}) \\
&= \frac{1}{2\pi} A_n^2 \sigma^2 (1 - e^{-i\theta})^{\alpha n} (1 + e^{-i\theta})^n (1 - e^{i\theta})^{\alpha n} (1 + e^{i\theta})^n \\
&= \frac{1}{2\pi} A_n^2 \sigma^2 [(1 - e^{-i\theta})(1 - e^{i\theta})]^{\alpha n} [(1 + e^{-i\theta})(1 + e^{i\theta})]^n \\
&= \frac{1}{2\pi} A_n^2 \sigma^2 [2(1 - \cos\theta)]^{\alpha n} [2(1 + \cos\theta)]^n \\
&= \frac{1}{2\pi} A_n^2 \sigma^2 2^{(1+\alpha)n} (1 - \cos\theta)^{\alpha n} (1 + \cos\theta)^n \qquad (*)
\end{aligned}
$$

従って $p_n(\theta) \geq 0$ もいえる。□

次に A_n^2 について計算する。$\int_{-\pi}^{\pi} p_n(\theta) d\theta = 1$ であることに注意すると，（$*$）から，

$$
\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos\theta)^{\alpha n} (1 + \cos\theta)^n d\theta = 2\pi \frac{1}{A_n^2 \sigma^2 2^{(1+\alpha)n}} \qquad (**)
$$

が成立する。ここで，$\theta = 2\phi$ とする。

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos\theta)^{\alpha n} (1 + \cos\theta)^n d\theta \\
&= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\phi)^{\alpha n} (1 + \cos 2\phi)^n d\phi \\
&= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin^2\phi)^{\alpha n} (2\cos^2\phi)^n d\phi \\
&= 4 \cdot 2^{(1+\alpha)n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha n}\phi \cos^{2n}\phi d\phi.
\end{aligned}
$$

ここで，ベータ関数

$$
B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1} (1 - u)^{y-1} du, \quad x > 0,\, y > 0
$$

に対し，$u = \sin^2\phi$ と置くと，

$$
B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\phi)^{2x-1} (\cos\phi)^{2y-1} d\phi, \quad x > 0,\, y > 0
$$

がいえる。また，ベータ関数は，ガンマ関数

$$
\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-s} s^{x-1} ds, \quad x > 0
$$

を使って，

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\quad x>0,y>0$$

と書けることが知られている（Abramowitz and Stegun（1970），p.258, 6.2.1）。従って，（$**$）式の左辺は，

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos\theta)^{\alpha n}(1+\cos\theta)^{n}d\theta &= 2\cdot 2^{(1+\alpha)n}\cdot\underbrace{2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\alpha n}\phi\cos^{2n}\phi d\phi}_{B(\alpha n+1/2,n+1/2)}\\ &= 2\cdot 2^{(1+\alpha)n}\frac{\Gamma(\alpha n+1/2)\Gamma(n+1/2)}{\Gamma((1+\alpha)n+1)}\end{aligned}$$

となる。これが（$**$）の右辺と等しいから，

$$\frac{1}{A_n^2}=\frac{2^{2(1+\alpha)n}}{\pi}\frac{\Gamma(\alpha n+1/2)\Gamma(n+1/2)}{\Gamma((1+\alpha)n+1)}\sigma^2,$$

がいえる。よって（$*$）より，

$$p_n(\theta)=\frac{1}{2\cdot 2^{(1+\alpha)n}}\frac{\Gamma((1+\alpha)n+1)}{\Gamma(\alpha n+1/2)\Gamma(n+1/2)}(1-\cos\theta)^{\alpha n}(1+\cos\theta)^{n}\tag{2}$$

これを θ について微分すると，

$$\begin{aligned}p_n'(\theta)=&\frac{1}{2\cdot 2^{(1+\alpha)n}}\frac{\Gamma((1+\alpha)n+1)}{\Gamma(\alpha n+1/2)\Gamma(n+1/2)}\\ &\times[n(1-\cos\theta)^{\alpha n-1}(1+\cos\theta)^{n-1}\sin\theta(\alpha(1+\cos\theta)-(1-\cos\theta))]\end{aligned}$$

であることより，θ^* を $\cos\theta^*=(1-\alpha)/(1+\alpha)$ を満たすものとすると，p_n は $\theta=-\pi,\pi,0$ にて最小値 0，$\theta=-\theta^*,\theta^*$ にて最大値

$$\frac{1}{2\cdot 2^{(1+\alpha)n}}\frac{\Gamma((1+\alpha)n+1)}{\Gamma(\alpha n+1/2)\Gamma(n+1/2)}\left[\frac{2\cdot(2\alpha)^{\alpha}}{(1+\alpha)^{(1+\alpha)}}\right]^{n}$$

をとる。p_n は偶関数であることに注意。

補題 2. $n\to\infty$ とした時，$p_n(\theta^*)=p_n(-\theta^*)\longrightarrow\infty$ かつ，$p_n(\theta)\longrightarrow 0\ (\theta\neq\theta^*,-\theta^*)$ が成立する。

（証明） ガンマ関数の性質，

$$\Gamma(n+1)=n!$$

（Abramowitz and Stegun（1970）, p.255, 6.1.6）

$$\Gamma(n+1/2)=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi}$$

（Abramowitz and Stegun（1970）, p.255, 6.1.12）

を使うと，

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma((1+\alpha)n+1)}{\Gamma(\alpha n+1/2)\Gamma(n+1/2)}&=\frac{(1+\alpha)n!}{\frac{(2\alpha n-1)(2\alpha n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{2^{\alpha n}}\sqrt{\pi}\cdot\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi}}\\&=\frac{(1+\alpha)n!}{\frac{(2\alpha n)!}{2^{2\alpha n}(\alpha n)!}\sqrt{\pi}\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}}\\&=\frac{2^{2(1+\alpha)n}}{\pi}\frac{((1+\alpha)n)!(\alpha n)!n!}{(2\alpha n)!(2n)!}\end{aligned}$$

と展開できる。右辺の階乗に Stirling の公式（Abramowitz and Stegun（1970）, p.257, 6.1.38）

$$x!=\sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}\exp(-x+\frac{\varepsilon}{12x}),\quad x>0,\quad 0<\varepsilon<1,$$

を使うと，

$$\begin{aligned}\frac{((1+\alpha)n)!(\alpha n)!n!}{(2\alpha n)!(2n)!}&=\sqrt{2\pi}\{(1+\alpha)n\}^{(1+\alpha)n+\frac{1}{2}}\exp(-(1+\alpha)n+\mathcal{O}(n^{-1}))\\&\quad\times\sqrt{2\pi}(\alpha n)^{\alpha n+\frac{1}{2}}\exp(-\alpha n+\mathcal{O}(n^{-1}))\\&\quad\times\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}\exp(-n+\mathcal{O}(n^{-1}))\\&\quad\div\sqrt{2\pi}(2\alpha n)^{2\alpha n+\frac{1}{2}}\exp(-2\alpha n+\mathcal{O}(n^{-1}))\\&\quad\div\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}\exp(-2n+\mathcal{O}(n^{-1}))\\&=\frac{1}{2^{2(1+\alpha)n}}\sqrt{\frac{\pi(1+\alpha)n}{2}}\left\{\frac{(1+\alpha)^{(1+\alpha)}}{\alpha^\alpha}\right\}^n\exp(\mathcal{O}(n^{-1})),\end{aligned}$$

が得られる。但し，$\mathcal{O}(n^{-1})$ は，$n\to\infty$ の時，$\mathcal{O}(n^{-1})\to 0$，かつ $\mathcal{O}(n^{-1})\times n$ が有界となるものである。　従って，

$$\frac{\Gamma((1+\alpha)n+1)}{\Gamma(\alpha n+1/2)\Gamma(n+1/2)}=\sqrt{\frac{(1+\alpha)n}{2\pi}}\left\{\frac{(1+\alpha)^{(1+\alpha)}}{\alpha^\alpha}\right\}^n\exp(\mathcal{O}(n^{-1})),$$

が得られた。よってスペクトル確率密度関数は，(2) より，

$$p_n(\theta)=\sqrt{\frac{(1+\alpha)n}{2^3\pi}}\left\{\frac{(1+\alpha)^{(1+\alpha)}}{2(2\alpha)^\alpha}(1-\cos\theta)^\alpha(1+\cos\theta)\right\}^n\exp(\mathcal{O}(n^{-1})),\qquad(3)$$

として与えられる。$(1-\cos\theta)^\alpha(1+\cos\theta)$ は，$\theta=\theta^*,-\theta^*$ で最大値

$$\frac{2\cdot(2\alpha)^\alpha}{(1+\alpha)^{(1+\alpha)}}$$

をとることから，

$$\frac{(1+\alpha)^{(1+\alpha)}}{2(2\alpha)^\alpha}(1-\cos\theta)^\alpha(1+\cos\theta)\begin{cases}=1 & \theta=\theta^*,-\theta^* \\ <1 & \theta\neq\theta^*,-\theta^*\end{cases} \tag{4}$$

である。ここで，一般に a,k を，$0<a<1$, $k>0$ なる実数とした時,

$$\lim_{x\to\infty} x^k\cdot a^x=0$$

であることから（例えば小平（1990），p92），$\exp(\mathcal{O}(n^{-1}))\to 1$ と，(3)，(4) を合わせて考えれば,

$$\lim_{n\to\infty} p_n(\theta)=\begin{cases}\infty & \theta=\theta^*,-\theta^* \\ 0 & \theta\neq\theta^*,-\theta^*\end{cases}$$

となる。よって補題の主張がいえた。□

補題 3. δ_{θ^*}，$\delta_{-\theta^*}$ をそれぞれ θ^*，$-\theta^*$ に質量 1 をおくディラック測度とする。その時，スペクトル確率測度 $p_n(\theta)d\theta$ は，$n\to\infty$ とする時,

$$\frac{1}{2}\delta_{-\theta^*}+\frac{1}{2}\delta_{\theta^*}$$

に弱収束する(3)。

（証明） 任意の閉集合 $F\subset[-\pi,\pi]$ に対し,

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\int_F p_n(\theta)d\theta\leq\begin{cases}\frac{1}{2} & \theta^*\in F \text{ か，} -\theta^*\in F \quad \text{いずれか一方のみ} \\ 0 & \theta^*\notin F \text{ かつ，} -\theta^*\notin F \\ 1 & \theta^*,-\theta^*\in F\end{cases} \tag{5}$$

(3)　X を位相空間，$\mathcal{B}(X)$ をボレル-σ-集合体とする。$\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, μ を，その上の測度とする。その時，μ_n が μ に弱収束するとは，任意の有界な実数値連続関数 $f:X\to\mathbb{R}$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty}\int_X fd\mu_n=\int_X fd\mu$$

となることをいう。

が成立することを示せばよい[4]。

1）$\theta^* \notin F$，　$-\theta^* \in F$ の時。

$F \cap [0,\pi]$ はコンパクトで，p_n は連続なので，$F \cap [0,\pi]$ のなかで p_n が最大となる $\hat{\theta}$ が存在する。p_n の形状よりこれは n には依存しない（θ^* と最短距離のものをとればよい）。しかも $\hat{\theta} \neq \theta^*, -\theta^*$ より，補題 2 から，

$$p_n(\hat{\theta}) \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

従って，有界収束定理により，

$$\int_{F\cap[0,\pi]} p_n(\theta)d\theta \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

ここで，

$$\int_{F\cap[-\pi,0]} p_n(\theta)d\theta \le \int_{-\pi}^{0} p_n(\theta)d\theta = \frac{1}{2}$$

であることから，

$$\begin{aligned}\int_F p_n(\theta)d\theta &= \int_{F\cap[-\pi,0]} p_n(\theta)d\theta + \int_{F\cap[0,\pi]} p_n(\theta)d\theta \\ &\le \frac{1}{2} + \int_{F\cap[0,\pi]} p_n(\theta)d\theta.\end{aligned}$$

よって，

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \int_F p_n(\theta)d\theta \le \frac{1}{2}.$$

$\theta^* \in F$，　$-\theta^* \notin F$ の時も同様。

2）$\theta^* \notin F$ かつ $-\theta^* \notin F$ の時。1）の証明と同様。

3）$\theta^*, -\theta^* \in F$ の時。

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \int_F p_n(\theta)d\theta \le 1$$

は自明。よって（5）がいえた。□

（4）　付録–命題 1 参照。

補題 4.　すべての $t \in \mathbb{Z}$ について,

$$\rho_n(t) \longrightarrow \cos\theta^* t \qquad (n \to \infty).$$

（証明） p_n は偶関数，$\sin$ は奇関数より，

$$\rho_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta t} p_n(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta t p_n(\theta) d\theta$$

となる。これは補題 3 より，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta t d(\frac{1}{2}\delta_{-\theta^*} + \frac{1}{2}\delta_{\theta^*}) = \cos\theta^* t$$

に収束することが分かる。□

ここで，定理 1 の証明を行う。

（定理 1 の証明）

$$X_t^n(\omega) = Y_0^n(\omega)\cos\theta^* t + \frac{1}{\sin\theta^*}[Y_1^n(\omega) - \cos\theta^* Y_0^n(\omega)]\sin\theta^* t$$

とする。これは，n，ω を与えると，t について周期 $2\pi/\theta^*$ の確率過程である。

$$\begin{aligned}
&\|Y_t^n(\omega) - X_t^n(\omega)\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\
&= \|Y_t^n(\omega) - (Y_0^n(\omega)\cos\theta^* t + \frac{1}{\sin\theta^*}[Y_1^n(\omega) - \cos\theta^* Y_0^n(\omega)]\sin\theta^* t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\
&= E[|Y_t^n(\omega) - (Y_0^n(\omega)\cos\theta^* t + \frac{1}{\sin\theta^*}[Y_1^n(\omega) - \cos\theta^* Y_0^n(\omega)]\sin\theta^* t)|^2] \\
&= \int_\Omega |Y_t^n(\omega)|^2 dP - 2\cos\theta^* t \int_\Omega Y_t^n(\omega) Y_0^n(\omega) dP - 2\frac{1}{\sin\theta^*}\sin\theta^* t \int_\Omega Y_t^n(\omega) Y_1^n(\omega) dP \\
&\qquad + 2\frac{\cos\theta^*}{\sin\theta^*}\sin\theta^* t \int_\Omega Y_t^n(\omega) Y_0^n(\omega) dP + \cos^2\theta^* t \int_\Omega |Y_0^n(\omega)|^2 dP \\
&\qquad\quad + \frac{1}{\sin^2\theta^*}\sin^2\theta^* t \int_\Omega |Y_1^n(\omega) - \cos\theta^* Y_0^n(\omega)|^2 dP \\
&\qquad\qquad + 2\cos\theta^* t \sin\theta^* t \frac{1}{\sin\theta^*} \int_\Omega Y_0^n(\omega)(Y_1^n(\omega) - \cos\theta^* Y_0^n(\omega)) dP \\
&= \rho_n(0) - 2\cos\theta^* t \rho_n(t) - 2\frac{1}{\sin\theta^*}\sin\theta^* t \rho_n(t-1) \\
&\qquad + 2\frac{\cos\theta^*}{\sin\theta^*}\sin\theta^* t \rho_n(t) + \cos^2\theta^* t \rho_n(0)
\end{aligned}$$

$$
+\frac{1}{\sin^2\theta^*}\sin^2\theta^* t(\rho_n(0)-2\cos\theta^*\rho_n(1)+\cos^2\theta^*\rho_n(0))
$$
$$
+2\cos\theta^* t\sin\theta^* t\frac{1}{\sin\theta^*}(\rho_n(1)-\cos\theta^*\rho_n(0)) \tag{†}
$$

これは $n \to \infty$ とすると，補題 4 から，

$$
\begin{aligned}
&1-2\cos^2\theta^* t-2\frac{1}{\sin\theta^*}\sin\theta^* t\cos\theta^*(t-1)+2\frac{\cos\theta^*}{\sin\theta^*}\sin\theta^* t\cos\theta^* t+\cos^2\theta^* t\\
&\qquad+\frac{1}{\sin^2\theta^*}\sin^2\theta^* t(1-2\cos^2\theta^*+\cos^2\theta^*)+2\cos\theta^* t\sin\theta^* t\frac{1}{\sin\theta^*}(\cos\theta^*-\cos\theta^*)\\
&=1-\cos^2\theta^* t-\sin^2\theta^* t=0
\end{aligned}
$$

に収束する。□

チェビシェフの不等式[(5)]より次の系がただちに導かれる。

系 1. 各 n, ω で周期 $2\pi/\theta^* \in \mathbb{N}$ である確率過程 $X_t^n(\omega)$ で，

$$
|Y_t^n(\omega)-X_t^n(\omega)| \longrightarrow 0 \qquad \text{確率収束} \qquad (n\to\infty)
$$

がすべての $t \in \mathbb{Z}$ で成立するものが存在する。

$\alpha \in \mathbb{Q}$ の時[(6)]：本稿では $\alpha \in \mathbb{N}$ としているが，$\alpha \in \mathbb{Q}$ でも $\alpha n \in \mathbb{N}$ であれば，同様の議論ができる。$\alpha = q/p, \quad p, q \in \mathbb{N}$ とすると，n の部分列として，$p, 2p, 3p, \cdots, kp, \cdots$，$k \in \mathbb{N}$ を取ればよい。

ここまでは，Slutzky（1937）で行われた白色雑音の和のとり方に基づいている。和のとり方を適当に変えることで，概収束もいえる。それが次の定理である。

定理 2. 以下のような確率過程を考える。

$$
Y_t^n(\omega) = A_n(1-L^2)^{n^2}\varepsilon_t(\omega).
$$

但し，A_n は，$y_t^n(\omega) = (1-L^2)^{n^2}\varepsilon_t(\omega)$ とした時の，

$$
A_n = \frac{1}{\sqrt{E[(y_t^n)^2]}}
$$

である。L は時間の遅れの演算子（lag operator）である（定義は 2 節）。

(5) 例えば Loéve（1977, p.11）。
(6) この点は細矢祐誉氏（慶應義塾大学経済学研究科博士課程）の注意による。

その時，各 n, ω で周期 4 の確率過程 $X_t^n(\omega)$ で，

$$|Y_t^n(\omega) - X_t^n(\omega)| \longrightarrow 0 \qquad \text{概収束} \qquad (n \to \infty)$$

がすべての $t \in \mathbb{Z}$ で成立するものが存在する。

(証明) まず，今までの議論を $\alpha = 1$ とし，n を n^2 に置き換えれば，同様に Y_t^n のスペクトル密度関数，共分散関数を計算でき，それぞれ，

$$p_n(\theta) = \frac{1}{2 \cdot 2^{2n^2}} \frac{\Gamma(2n^2+1)}{\Gamma(n^2+1/2)\Gamma(n^2+1/2)} \sin^{2n^2}\theta, \tag{6}$$

$$\rho_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta t p_n(\theta) d\theta \tag{7}$$

となる。次に，

$$X_t^n(\omega) = Y_0^n(\omega)\cos\frac{\pi}{2}t + Y_1^n(\omega)\sin\frac{\pi}{2}t$$

とする。これは，n，ω を与えると，t について周期 4 の確率過程である。

$$\begin{aligned}
&E[|Y_t^n(\omega) - (Y_0^n(\omega)\cos\frac{\pi}{2}t + Y_1^n(\omega)\sin\frac{\pi}{2}t)|^2] \\
&= \rho_n(0) - 2\cos\frac{\pi}{2}t\rho_n(t) - 2\sin\frac{\pi}{2}t\rho_n(t-1) \\
&\qquad + (\cos^2\frac{\pi}{2}t + \sin^2\frac{\pi}{2}t)\rho_n(0) + 2\cos\frac{\pi}{2}t\sin\frac{\pi}{2}t\rho_n(1)
\end{aligned}$$

(7) より，

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [2 - 2(\cos\frac{\pi}{2}t\cos\theta t + \sin\frac{\pi}{2}t\cos\theta(t-1)) + 2\cos\frac{\pi}{2}t\sin\frac{\pi}{2}t\cos\theta] p_n(\theta) d\theta$$

すべての $t \in \mathbb{Z}$ について，$\cos\frac{\pi}{2}t$ か，$\sin\frac{\pi}{2}t$ のどちらかは必ず 0 になるので，$2\cos\frac{\pi}{2}t\sin\frac{\pi}{2}t\cos\theta = 0$。よって，

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [2 - 2(\cos\frac{\pi}{2}t\cos\theta t + \sin\frac{\pi}{2}t\cos\theta(t-1))] p_n(\theta) d\theta$$

ここで，

$$F_t(\theta) = 2 - 2(\cos\frac{\pi}{2}t\cos\theta t + \sin\frac{\pi}{2}t\cos\theta(t-1))$$

と置くと，$t=2k, 2k+1,\ k\in\mathbb{Z}$ に対し，

$$F_t(\theta) = 2 + (-1)^{k+1} 2\cos 2k\theta \tag{8}$$

である。

i)　$t=0,1$ の時（$k=0$ の時）は，$F_t(\theta)=0$ である。

ii)　$t\neq 0,1$ の時（$k\neq 0$ の時）を考える。ここで，

$$e^{i(2k)\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{2k}$$

であり，両辺の実部と虚部が等しいことを使うと，以下が導ける。

$$\begin{aligned}\cos 2k\theta = \cos^{2k}\theta - \binom{2k}{2}\cos^{2k-2}\theta(1-\cos^2\theta) + \binom{2k}{4}\cos^{2k-4}\theta(1-\cos^2\theta)^2 \\ - \binom{2k}{6}\cos^{2k-6}\theta(1-\cos^2\theta)^3\cdots(-1)^k(1-\cos^2\theta)^k\end{aligned}$$

係数 $a_1^k, a_2^k, \cdots a_k^k \in \mathbb{R}$ を適当に選べば，

$$= a_1^k\cos^{2k}\theta + a_2^k\cos^{2k-2}\theta + a_3^k\cos^{2k-4}\theta + \cdots + a_k^k\cos^2\theta + (-1)^k \tag{9}$$

と書くことができる。(8), (9) より，

$$F_t(\theta) = 2[1 + (-1)^{k+1}(a_1^k\cos^{2k}\theta + a_2^k\cos^{2k-2}\theta + a_3^k\cos^{2k-4}\theta + \cdots + a_k^k\cos^2\theta) + (-1)^{2k+1}]$$

$(-1)^{2k+1} = -1$ であることから，係数 $c_1^k, c_2^k, \cdots c_k^k \in \mathbb{R}$ を適当に選び直して，

$$= 2(c_1^k\cos^{2k}\theta + c_2^k\cos^{2k-2}\theta + c_3^k\cos^{2k-4}\theta + \cdots + c_k^k\cos^2\theta) \tag{10}$$

と書ける。

$$\begin{aligned}&E[|Y_t^n(\omega) - X_t^n(\omega)|^2] \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} F_t(\theta)p_n(\theta)d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi} F_t(\theta)p_n(\theta)d\theta\end{aligned}$$

$$= 4\int_0^{\pi} (c_1^k \cos^{2k}\theta + c_2^k \cos^{2k-2}\theta + c_3^k \cos^{2k-4}\theta + \cdots + c_k^k \cos^2\theta) p_n(\theta) d\theta \tag{11}$$

（11）の各項を計算する。補題 1 と 2 の間の議論と同様に，

$$\int_0^{\pi} \cos^{2m}\theta \sin^{2n^2}\theta d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m}\theta \sin^{2n^2}\theta d\theta = \frac{\Gamma(n^2+1/2)\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(n^2+m+1)} \tag{12}$$

が成立することに注意すると，（6）より，

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} \cos^{2m}\theta p_n(\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2\cdot 2^{2n^2}} \frac{\Gamma(2n^2+1)}{\Gamma(n^2+1/2)\Gamma(n^2+1/2)} \int_0^{\pi} \cos^{2m}\theta \sin^{2n^2}\theta d\theta
\end{aligned}$$

（12）と補題 2 の議論と同様にして，

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \frac{(2n^2)!}{(2n^2-1)(2n^2-3)\cdots 3\cdot 1\cdot (2n^2-1)(2n^2-3)\cdots 3\cdot 1} \\
&\qquad \times \frac{\pi}{2^{m+n^2}} \frac{(2n^2-1)(2n^2-3)\cdots 3\cdot 1\cdot (2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1}{(m+n^2)!} \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{2^{n^2}(n^2)!}{(2n^2-1)(2n^2-3)\cdots 3\cdot 1} \frac{\pi}{2^{m+n^2}} \frac{(2n^2-1)(2n^2-3)\cdots 3\cdot 1(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1}{(m+n^2)!} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{2^m (n^2+1)(n^2+2)\cdots(n^2+m)} (2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1
\end{aligned}$$

がいえる。従って，各 $m \in \mathbb{N}$ で，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \cos^{2m}\theta p_n(\theta) d\theta < \infty \tag{13}$$

が成立する。（11）から，

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[|Y_t^n(\omega) - X_t^n(\omega)|^2] < \infty \tag{14}$$

よって，

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} E[|Y_t^n(\omega) - X_t^n(\omega)|^2] = 0 \tag{15}$$

チェビシェフの不等式より，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，

$$P\{\omega \in \Omega \mid \sup_{n\geq k} |Y_t^n(\omega) - X_t^n(\omega)| \geq \varepsilon\} \leq \sum_{n=k}^{\infty} P\{\omega \in \Omega \mid |Y_t^n(\omega) - X_t^n(\omega)| \geq \varepsilon\}$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=k}^{\infty} E[|Y_t^n(\omega) - X_t^n(\omega)|^2] \tag{16}$$

が成立する。概収束することと，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，

$$\lim_{k\to\infty} P\{\omega \in \Omega \mid \sup_{n\geq k}|Y_t^n(\omega) - X_t^n(\omega)| \geq \varepsilon\} = 0$$

が成立することが同値である（例えば，伊藤（2002，p.52））ことから，（15），（16）より，概収束がいえた。□

4. 結語

最後に，この論文の結果と Slutzky（1937）, Sargent（1987）の結果との比較をしたい。Slutzky（1937）で行われた証明では，本稿で行ったようなスペクトル表現はなされていない。その結果として，本稿の補題 5 に対応するものを $\rho_n(1)$，$\rho_n(2)$ のみを計算し求めているが，すべての $t \in \mathbb{Z}$ についての収束については示すことができなかった。そのことから，Slutzky (1937) では n を止めて，t を無限にもっていくと，誤差は増えていき，$\|Y_t^n(\omega) - X_t^n(\omega)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \longrightarrow \infty\ (t \to \infty)$ となる場合が排除できていない。しかし，n を止めた時，$\rho_n(t)$ は $t = 0, \pm1, \pm2, \cdots, (1+\alpha)n$ 以外では 0 になることから，p.66 の（†）より，本稿では各 n で，適当な $M > 0$ が存在して，$\sup_{t\in\mathbb{Z}} \|Y_t^n(\omega) - X_t^n(\omega)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq M$ とできることが分かる。

また，Slutzky（1937）では確率収束のみを示しているが，本稿では概収束するような条件を提示した。

一般に確率過程が殆ど至る所で周期 T の周期関数であることと，その共分散関数のスペクトル測度（ここで ν とする）が，$2\pi k/T$, $k \in \mathbb{Z}$ の点以外では重みを持たないことが同値である。[(7)] ここで，スペクトル分布関数を

$$F(x) = \nu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}$$

とすると，これは，$2\pi k/T$, $k \in \mathbb{Z}$ のみで不連続にジャンプし，それ以外では定値となりながら単調に増加していく階段関数である。仮に密度関数 $p : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ が存在するなら，

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} p(t)dt$$

（7） 付録–命題 2 参照。

と書け，仮に F が微分可能ならば $F' = p$ という関係が成立する。従って，直観的にいえば，密度 p は $2\pi k/T$, $k \in \mathbb{Z}$ の点で "無限大に跳ね上がる"。Sargent（1987, p.273–275）では，本稿の記号でいうところの $y_t^n(\omega)$ の共分散関数のスペクトル表現をし，その密度関数（確率にはなっていない）が，$\theta^*, -\theta^*$ で発散することを示しているが，ここでは θ^* の近傍でも発散しているため，θ^*, $-\theta^*$ 以外でスペクトル測度は重みを持ち続けることになる。従って，周期的確率過程の存在証明としては成功していないのである。

（経済学研究科博士課程）

付　　録

スペクトル測度が存在することの同値条件として以下のことが知られている。

Bochner の定理(8)**.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が連続な正の半定符号(9)であることと，

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\theta} \mu(d\theta) \quad t \in \mathbb{R}$$

となる $\mathbb{R}$ 上のラドン測度 μ が存在することは同値である。また，上記の測度は存在するとすれば一意である。

Herglotz の定理(10)**.** $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ が正の半定符号(11)であることと，

$$f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\theta} \mu(d\theta) \quad t \in \mathbb{Z}$$

となる $[-\pi, \pi]$ 上のラドン測度 μ が存在することは同値である。また上記の測度は存在するとすれば一意である。

注意: 本文中の共分散関数 ρ_n は正の半定符号であることが確認できる。

命題(12) **1.** X を位相空間，$\mathcal{B}(X)$ はボレル-σ-集合体とする。$\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, μ を，その上の測度とする。その時，以下は同値である。

（1）μ_n が μ に弱収束する。

（2）任意の有界な実数値一様連続関数 $g: X \to \mathbb{R}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g d\mu_n = \int_X g d\mu.$$

（8）　Loéve（1977, p.220）。

（9）　$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が正の半定符号とは, 任意に $n \in \mathbb{N}$ と, $t_1, t_2, \cdots, t_n \in \mathbb{R}$ を選んだ時, $f(t_i - t_j)$ で作った $n \times n$ 行列が正の半定符号である, つまり, 任意の $z_1, z_2, \cdots z_n \in \mathbb{C}$ に対し, $\sum_{i,j=1}^n f(t_i - t_j) z_i \bar{z_j} \geq 0$ となることをいう。

（10）Loéve（1977, p.220）。

（11）定義は定義域が $\mathbb{R}$ の時の定義を $\mathbb{Z}$ に置き換えればよい。

（12）Billingsley（1968, p.11）

（3）X の任意の閉集合 F に対し，

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\mu_n(F) \le \mu(F).$$

（4）X の任意の開集合 G に対し，

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\mu_n(G) \ge \mu(G).$$

（5）∂A（$=A$ の境界）が $\mu(\partial A)=0$ となる X の任意のボレル集合 A に対し，

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(A) = \mu(A).$$

命題 2.[13] $X:\mathbb{Z}\times\Omega\to\mathbb{R}$ を弱定常確率過程であるとする。その時，以下は同値である。
（1）$X(t,\omega)$ の共分散関数 ρ が周期 $T\in\mathbb{N}$ の関数である，つまり，すべての $u\in\mathbb{Z}$ について，

$$\rho(u+T)=\rho(u)$$

が成立する。
（2）$X(t,\omega)$ が殆ど至る所周期 $T\in\mathbb{N}$ の関数である，つまり，すべての $t\in\mathbb{Z}$ について，

$$X(t+T,\omega)=X(t,\omega) \qquad \text{a.e.} \quad \omega$$

が成立する。
（3）$X(t,\omega)$ の共分散関数 ρ のスペクトル測度を ν とすると，

$$E\cap\{2k\pi/T|k\in\mathbb{Z}\}=\emptyset$$

なる $E\in\mathcal{B}([-\pi,\pi])$ に対して，$\nu(E)=0$。但し，$\mathcal{B}([-\pi,\pi])$ は $[-\pi,\pi]$ におけるボレル-σ-集合体。

参 考 文 献

Abramowitz, M. and I. A. Stegun（1970）*Handbook of Mathematical Functions*, New York: Dover Publications.

Billingsley, P.（1968）*Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York.

Cass, D.（1966）“Optimal growth in an aggregate model of capital accumulation”, *Econometrica*, 32, 833–850.

Dechert, R. and K. Nishimura（1983）“A complete characterization of optimal growth paths in an aggregate model with a nonconcave production function”, *Journal of Economic Theory*, 31, 332–354.

Frisch, R.（1933）“Propagation problems and impulse problems in dynamic economics” in *Essays in Honour of Gustav Cassel*, Allen and Unwin, London.

Granger, C. W. J. and P. Newbold（1986）*Forecasting Economic Time Series*, Academic Press, Orlands.

Hamilton, J. D.（1994）*Time Series Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton.

Koopmans T. C.（1965）“On the concept of optimal economic growth”, *The Econometric Approach to Development Planning*, Rand MacNally, Chicago.

（13） 河田（1985, p.75）。

Kydland, F. and E. C. Prescott (1982) "Time to Build and Aggregate Fluctuations", *Econometrica*, 50, 1345–1370.

Long, J. B. and C. I. Plosser (1983) "Real Business Cycles", *Journal of Political Economy*, 91, 39–69.

Loéve, M. (1977) *Probability Theory I 4th edition*, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin.

Sargent, T. J. (1987) *Macroeconomic Theory*, Academic Press, New York.

Slutzky, E. (1937) "Summation of random causes as the source of cyclic processes", *Econometrica*, 5, 105–146.

Yule, G. (1927) "On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 226, 267–298.

足立英之（1984）経済変動の理論，日本経済新聞社。

伊藤雄二（2002）確率論, 朝倉書店。

河田龍夫（1985）定常確率過程, 共立出版。

小平邦彦（1990）解析入門，岩波書店。

新開陽一（1967）経済変動の理論, 岩波書店。