

Title	コミュニケーション系と事前 $\alpha$ コア
Sub Title	Communication system and ex ante $\alpha$ -core
Author	平瀬, 和基(Hirase, Kazuki) 内海, 幸久(Utsumi, Yukihiisa)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2005
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.98, No.1 (2005. 4) ,p.43- 53
JaLC DOI	10.14991/001.20050401-0043
Abstract	<p>本稿では, 非対称情報を伴う戦略形ゲームから構成される事前<math>\alpha</math>コアの存在と情報交換の関係について明らかにする。プレイヤーの情報を定めるコミュニケーション系を与えることで, 情報交換に起因する煩雑さを回避した点が本稿の特徴である。主要な帰結は, 全員提携時の情報が一番細かいならば, 事前<math>\alpha</math>コアが存在するということである。</p> <p>This study clarifies the relationship between the presence of an ex ante <math>\alpha</math>-core, comprising a strategy-type game with asymmetric information and information exchange.</p> <p>A distinguishing characteristic of this study is that by providing a communication system that defines the player information, it avoids complexity due to information exchange.</p> <p>The major consequence is that an ex ante <math>\alpha</math>-core exists if information at the time of cooperation among all members is at its most detailed state.</p>
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	<a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20050401-0043">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20050401-0043</a>

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

コミュニケーション系と事前  $\alpha$  コア

Communication System and Ex Ante  $\alpha$ -core

平瀬 和基(Kazuki Hirase)

内海 幸久(Yukihisa Utsumi)

本稿では、非対称情報を伴う戦略形ゲームから構成される事前  $\alpha$  コアの存在と情報交換の関係について明らかにする。プレイヤーの情報を定めるコミュニケーション系を与えることで、情報交換に起因する煩雑さを回避した点が本稿の特徴である。主要な帰結は、全員提携時の情報が一番細かいならば、事前  $\alpha$  コアが存在するということである。

Abstract

This study clarifies the relationship between the presence of an ex ante  $\alpha$ -core, comprising a strategy-type game with asymmetric information and information exchange. A distinguishing characteristic of this study is that by providing a communication system that defines the player information, it avoids complexity due to information exchange. The major consequence is that an ex ante  $\alpha$ -core exists if information at the time of cooperation among all members is at its most detailed state.

## コミュニケーション系と事前 $\alpha$ コア\*

平瀬 和基<sup>†</sup>  
内海 幸久<sup>‡</sup>

(初稿受付 2004 年 12 月 8 日,  
査読を経て掲載決定 2005 年 4 月 4 日)

### 要 旨

本稿では、非対称情報を伴う戦略形ゲームから構成される事前  $\alpha$  コアの存在と情報交換の関係について明らかにする。プレイヤーの情報を定めるコミュニケーション系を与えることで、情報交換に起因する煩雑さを回避した点が本稿の特徴である。主要な帰結は、全員提携時の情報が一番細かいならば、事前  $\alpha$  コアが存在するという点である。

### キーワード

事前  $\alpha$  コア, コミュニケーション系

### 1. 序

非対称情報を持つ戦略形ゲームは、産業組織論、環境経済学、貿易理論など、さまざまな分野に適用されている。これらの研究の多くでは、経済主体同士がコミュニケーションや協調をしない非協力ゲームの枠組みが使われている。しかしながら、環境に関する国際会議や外交交渉などのように、非対称情報を持つ経済主体同士がコミュニケーションや協調をしながら利害を調整するという状況も多々存在すると考えられよう。本稿では、非対称情報を持つプレイヤーがコミュニケーションや協調をすることができる状況について、戦略形ゲームを使って分析したい。

この分野の研究の端緒となったのは、Wilson (1978) によるものであると考えられる。Wilson (1978) は、同じグループにいるメンバーが自由に情報交換をできるケースと、グループ内のメンバーは情報交換をせずに共有している情報のみを利用する、という 2 つのケースを考察した。前者はグループにいるメンバーの情報が詳しくなるという意味で細かい情報と呼ばれ、後者はグループ内

---

\* 本稿の作成にあたり、匿名のレフェリーよりいくつかの有益なコメントを頂いたことに感謝いたします。

<sup>†</sup> E-mail address: hirase@gs.econ.keio.ac.jp

<sup>‡</sup> E-mail address: utsumi@valdes.titech.ac.jp

のメンバーが共通の情報だけしか利用できないという意味で粗い情報と呼ばれている。Hirase and Utsumi (2004a) は、この2つの情報交換を使ったコアにおける利得について分析をした。

Volij (2000) は両者の中間にあたる情報交換について考察をしている。グループ内のプレイヤーは選好に関する情報のみを交換しあうという概念である。Yannelis (1991) も細かい情報、粗い情報とは別の、私的情報と呼ばれる情報を提案している。プレイヤーがグループを形成して協力的な行動をとる際にもプレイヤーの情報はグループ内の他のメンバーの影響を受けないという概念である。

ここまで挙げてきた文献ではグループ内での情報交換の方法が提案されているのに対し、Maus (2003) はグループ内でのプレイヤーの情報そのものを記述するコミュニケーション系を考えた。コミュニケーション系は、プレイヤーの情報をそのプレイヤーがどのグループに属しているかに依存して規定するものである。これを使うことで細かい情報、粗い情報、私的情報などを表現することができる。情報交換をより一般的に扱うことができるのである。Maus (2003) は、コミュニケーション系を使って純粋交換経済における事前コアの存在条件を示している。

本稿は、このコミュニケーション系を使って、戦略形ゲームにおける事前  $\alpha$  コアとプレイヤーの情報との関係について明らかにすることを目的とする。主要な結論は、事前  $\alpha$  コアの存在条件を提示することである。これは Yannelis (1991) と Maus (2003) による結果の一般化であると言える。また  $\alpha$  コアの存在を示した Scarf (1971) に非対称情報の存在を加味した結果とも考えられる。

以下の節は次のように構成されている。第2節では戦略形ゲームから生成される NTU ゲームと事前  $\alpha$  コアを定義する。第3節では事前  $\alpha$  コアの存在についての十分条件を示す。第4節では2つの例を扱い、第5節で帰結と課題について論じる。

## 2. モデル

この節ではコミュニケーション系をもつ戦略形ゲームをめぐる基本的な定義を紹介する。プレイヤーの集合を  $N = \{1, \dots, n\}$  とする。  $N$  によって、すべての  $N$  の非空な部分集合をあらわし、その元を提携と呼ぶ。

**定義 1.** 「コミュニケーション系を持つ戦略形ゲーム」とは、  $(\Omega, \{X_i, u_i\}_{i \in N}, \{\mathcal{P}_i^S\}_{\substack{i \in S \\ S \in N}})$  という組で記述され、それぞれ、

- (1)  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_l\}$  を有限の状態集合、
- (2)  $X_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$  をプレイヤー  $i$  の行動集合、
- (3)  $u_i : \prod_{i \in N} (X_i^{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$  をプレイヤー  $i$  の利得関数、
- (4)  $\{\mathcal{P}_i^S\}_{\substack{i \in S \\ S \in N}}$  をコミュニケーション系とし、すべての  $S \in N$  と  $i \in S$  について  $\mathcal{P}_i^S$  は  $\Omega$  の分割をあらわす。

この定義において、 $X_i^\Omega$  は、 $\Omega$  から  $X_i$  への関数の集合を意味する。 $X_i^\Omega$  は、プレーヤー  $i$  のとり得るすべての戦略集合を表現している。便宜上、 $\Sigma_i$  と表記し、これをプレーヤー  $i$  の普遍戦略集合と呼ぶことにする。 $\mathcal{P}_i^S$  は、提携  $S$  が形成されたときのプレーヤー  $i$  の情報をあらわしている。

定義 1 の (3) の利得関数を用いると、事前の期待効用関数や事前の Choquet 期待効用関数を特殊ケースとして記述できる。つまり、各プレーヤーが期待効用型の行動をとらない場合でも本稿の分析を適用することができる。<sup>(1)</sup> 実際、Von Neumann-Morgenstern 型の効用関数を  $u'_i$ 、確率測度や確率容量 (probability capacity) を  $\mu_i$  と表記すると、

$$Eu'_i(\sigma_1, \dots, \sigma_n) := \sum_{\omega \in \Omega} \mu_i(\{\omega\}) u'_i(\sigma_1(\omega), \dots, \sigma_n(\omega))$$

と定義できる。ここで、 $\sigma_i$  は、 $X_i^\Omega$  の元である。

定義 2. 「 $\mathcal{P}_i^S$  におけるプレーヤー  $i$  の戦略集合」を

$$\Sigma_i^S := \{\sigma_i^S \in \Sigma_i \mid \sigma_i^S \text{ は } \mathcal{P}_i^S \text{ 可測}\}$$

と定義する。

提携  $S$  が形成されると、 $S$  のメンバーであるプレーヤー  $i$  は、情報  $\mathcal{P}_i^S$  を得る。この戦略集合は、仮にプレーヤー  $i$  が情報  $\mathcal{P}_i^S$  において状態  $\omega$  と  $\omega'$  とが区別できないのであるならば、プレーヤー  $i$  は、 $\omega$  と  $\omega'$  という状態において異なる戦略をとることができないということをあらわしている。

ここで、記号の単純化のため、 $\Sigma^S = \prod_{i \in S} \Sigma_i^S$  によって、提携  $S$  が形成されたときの結合戦略の集合を表記する。その代表的な要素を  $\sigma^S$  とする。

任意の  $R \subset N$  について、 $P(R)$  を  $R$  のすべての分割の集合とする。 $P(N)$  の要素を提携構造と呼ぶ。

定義 3. すべての  $S \in \mathcal{N}$  について、「事前  $\alpha$  特性対応」を、

$$V(S) := \bigcup_{\sigma^S \in \Sigma^S} \bigcap_{P \in P(N \setminus S)} \bigcap_{\substack{(\sigma^T)_{T \in P} \\ \in (\Sigma^T)_{T \in P}}} \left\{ (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^N \mid \forall i \in S, u_i \leq u_i(\sigma^S, (\sigma^T)_{T \in P}) \right\}$$

と定義する。

Aumann and Peleg (1960) によって導入された  $\alpha$  的な状況というのは、相手のことがよくわからないため、最低限度得られるであろう補償水準を確保するという行動をとる状況である。 $S$  のメ

---

(1) 本稿の主張は、意思決定理論で近年研究が進んでいるショックイ期待効用を利用することができる。

ンバーは、 $N \setminus S$  のプレーヤー達がどのようなグループに分かれて行動を起こすのかについても正確にはわからないと考えられる。情報が導入されていない戦略形ゲームでは、提携の戦略集合が直積で与えられる。このため、提携  $S$  のとりうる戦略は、 $N \setminus S$  の提携内部がどのようなグループ構造になっているか否かに依存しない。しかしながら、情報が導入されると、 $N \setminus S$  の提携内部の構造に応じてとり得る戦略が異なってくる。このように、 $N \setminus S$  の提携構造の如何によって戦略が異なるという部分が、情報を導入することによって起こる問題の1つである。本稿では、 $\alpha$  的な精神をそのまま踏襲して、 $V(S)$  によって、提携  $S$  のメンバーが相手の行動や提携構造によらず最低限得られる利得を記述する。

**定義 4.** 事前  $\alpha$  特性対応  $V$  について、

$$V(N) \setminus \bigcup_{S \in \mathcal{N}} \text{int}V(S)$$

によって定義される利得の集合を「事前  $\alpha$  コア」と呼び、 $C(V)$  と表記する。

### 3. 事前 $\alpha$ コアの存在

この節では、事前  $\alpha$  コアとコミュニケーション系との関係を紹介する。 $\mathcal{P}_i^{\{i\}}$  をプレーヤー  $i$  の初期情報、 $\mathcal{P}_i^S$  を提携  $S$  が形成されたときのメンバー  $i$  が利用する情報と解釈すれば、コミュニケーション系を利用して、多様な情報交換を記述することが可能になる。実際、Wilson (1978) や Yannelis (1991), Forges and Minelli (2001) らが提案してきた、粗い情報交換、私的情報、完全情報交換という概念を表現することができる。定義の紹介のために、記号法を1つ導入する。 $\Omega$  の分割  $\mathcal{P}$  に対して、 $\mathcal{P}(\omega)$  によって、 $\omega$  を含む分割  $\mathcal{P}$  の要素をあらわすこととする。

**定義 5.**

- (1) コミュニケーション系が「粗い情報交換」であるとは、任意の  $S \in \mathcal{N}$  と  $i \in S$  について  $\mathcal{P}_i^S$  が、各  $\mathcal{P}_i^{\{i\}}$  に共通に含まれる情報の中でもっとも細かい情報をあらわすことである。
- (2) コミュニケーション系が「完全情報交換」であるとは、任意の  $\omega \in \Omega$ 、 $S \in \mathcal{N}$  と  $i \in S$  について  $\mathcal{P}_i^S(\omega) = \bigcap_{i \in S} \mathcal{P}_i^{\{i\}}(\omega)$  が成立することである。
- (3) コミュニケーション系が「私的情報」であるとは、任意の  $\omega \in \Omega$  と  $S \in \mathcal{N}$  と  $i \in S$  について、 $\mathcal{P}_i^S(\omega) = \mathcal{P}_i^{\{i\}}(\omega)$  が成立することである。

粗い情報交換のコミュニケーション系では、提携に参加しているプレーヤーらが情報の出し惜しみをしている状況をあらわしている。グループ内の他人に情報を教えない方がよいとプレーヤーら

が判断している場合である。技術の核心部分は互いに秘密にしあうという企業間のゆるやかな提携を記述するのに有用な概念と考えられる。粗い情報交換では、提携参加前に持っている初期の情報に基づいてプレイヤーが行動をとると、意思決定の段階で個人の情報が明らかになってしまう。情報隠蔽という理由から、提携で行動をとる際には、自分の保有している初期情報を利用せずに行動せざるを得ない。

完全情報交換のコミュニケーション系では、提携に参加しているプレイヤーは、コミュニケーションを通じて互いの情報を完全に交換し合っている状況をあらわしている。企業間の統合や、組織内部のコミュニケーションに応用できる概念である。

私的情報のコミュニケーション系では、提携が形成され、コミュニケーションがなされたとしても、各プレイヤーは情報交換を全くしないという状況をあらわしている。大きな人数が参加している提携内での情報のあり方を記述していると考えられている。

**定義 6.** コミュニケーション系が  $N$  で有界とは、すべての  $S \in \mathcal{N}$  について、

$$\mathcal{P}_i^S(\omega) \supset \mathcal{P}_i^N(\omega)$$

が任意の  $i \in S$  と  $\omega \in \Omega$  で成立することである。

コミュニケーション系が  $N$  で有界というのは、全員提携時の情報が一番細かくなっているという状況である。誰も情報を共有しないという私的情報やすべての情報を共有するという完全情報交換は、その代表的な例となる。

**仮定 1.**

- (1) すべての  $i$  について  $X_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$  を非空、凸、コンパクト集合とする。
- (2) すべての  $i$  について  $u_i$  は、 $\prod_{i \in N} \Sigma_i$  上で連続な準凹関数とする。

**命題 1** 仮定 1 のもとで、コミュニケーション系が  $N$  で有界であるならば事前  $\alpha$  コアは非空になる。

(証明) 提携の族  $\mathcal{B}$  を平衡集合族、すなわち、すべての  $S \in \mathcal{N}$  に対して  $\sum_{S \in \mathcal{B}(i)} \lambda_S = 1$  を満たすような正数の組  $(\lambda_S)_{S \in \mathcal{B}(i)}$  が存在するような部分集合族とする。ただし、 $\mathcal{B}(i)$  を  $\mathcal{B}$  の要素で  $i$  を含むものとする。

証明のために、次の集合を準備する。任意の  $S \in \mathcal{N}$  について

$$\underline{V}(S) = \bigcup_{\sigma^S \in \Sigma^S} \bigcap_{\sigma^{N \setminus S} \in \Sigma^{N \setminus S}} \left\{ u \in \mathbb{R}^N \mid \forall i \in S, u_i \leq u_i(\sigma^S, \sigma^{N \setminus S}) \right\}$$

と定義する。\$V\$ と \$\underline{V}\$ の定義から、\$V(N) = \underline{V}(N)\$ と \$V(S) \subset \underline{V}(S)\$ を得る。よって、\$C(V) \subset C(\underline{V})\$ を得る。従って、\$\underline{V}\$ について、\$\bigcap\_{S \in \mathcal{B}} \underline{V}(S) \subset \underline{V}(N)\$ を証明すればよい。

平衡集合族 \$\mathcal{B}\$ に対応するウエイトを \$(\lambda\_S)\_{S \in \mathcal{B}}\$ とする。任意に \$u \in \bigcap\_{S \in \mathcal{B}} \underline{V}(S)\$ を選ぶ。\$\underline{V}(S)\$ の定義から、提携 \$S\$ の戦略 \$\sigma^S \in \Sigma^S\$ が存在して、すべての \$\sigma^{N \setminus S} \in \Sigma^{N \setminus S}\$ と \$i \in S\$ について \$u\_i \leq u\_i(\sigma^S, \sigma^{N \setminus S})\$ を得る。

すべての \$i \in N\$ について、新しい戦略を \$\sigma\_i^\* := \sum\_{S \in \mathcal{B}(i)} \lambda\_S \sigma\_i^S\$ と定義する。\$\sigma\_i^S\$ は \$\mathcal{P}\_i^S\$ 可測で、コミュニケーション系が \$N\$ で有界であることから、\$\sigma\_i^S\$ は \$\mathcal{P}\_i^N\$ 可測となる。普遍戦略集合 \$X\_i\$ が凸集合であることから、\$\Sigma\_i^N\$ は凸集合となる。よって、\$\sigma\_i^\*\$ は \$\Sigma\_i^N\$ の要素になる。

そこで、任意の \$j\$ を固定して、すべての \$i\$ について、うまく \$(\tau\_i^S)\_{i \in N}\$ を見つけてくると、\$\sigma\_i^\*\$ が、

$$\sigma_i^* = \sum_{S \in \mathcal{B}(j)} \lambda_S \tau_i^S$$

と書け、更に、すべての \$S \in \mathcal{B}(j)\$ について \$u\_j(\tau\_1^S, \dots, \tau\_n^S) \geq u\_j\$ を満たすようにできることを証明する。

任意の \$S \in \mathcal{B}(j)\$ を考える。\$\tau\_i^S\$ を次のように定義する。

$$\tau_i^S := \begin{cases} \sigma_i^S & i \in S \text{ の時} \\ \frac{\sum_{E \in \mathcal{B}(i) \setminus \mathcal{B}(j)} \lambda_E \sigma_i^E}{\sum_{E \in \mathcal{B}(i) \setminus \mathcal{B}(j)} \lambda_E} & i \notin S \text{ の時} \end{cases}$$

\$\sum\_{E \in \mathcal{B}(i)} \lambda\_E = \sum\_{E \in \mathcal{B}(j)} \lambda\_E = 1\$ であることに注意して、計算をすると、

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \mathcal{B}(j)} \lambda_S \tau_i^S &= \sum_{S \in \mathcal{B}(j) \cap \mathcal{B}(i)} \lambda_S \tau_i^S + \sum_{S \in \mathcal{B}(j) \setminus \mathcal{B}(i)} \lambda_S \left( \frac{\sum_{E \in \mathcal{B}(i) \setminus \mathcal{B}(j)} \lambda_E \sigma_i^E}{\sum_{E \in \mathcal{B}(i) \setminus \mathcal{B}(j)} \lambda_E} \right) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{B}(j) \cap \mathcal{B}(i)} \lambda_S \tau_i^S + \sum_{S \in \mathcal{B}(j) \setminus \mathcal{B}(i)} \lambda_S \left( \frac{\sum_{E \in \mathcal{B}(j) \setminus \mathcal{B}(i)} \lambda_E \sigma_i^E}{\sum_{E \in \mathcal{B}(j) \setminus \mathcal{B}(i)} \lambda_E} \right) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{B}(j) \cap \mathcal{B}(i)} \lambda_S \tau_i^S + \sum_{E \in \mathcal{B}(i) \setminus \mathcal{B}(j)} \lambda_E \sigma_i^E \\ &= \sum_{S \in \mathcal{B}(j) \cap \mathcal{B}(i)} \lambda_S \sigma_i^S + \sum_{S \in \mathcal{B}(i) \setminus \mathcal{B}(j)} \lambda_S \sigma_i^S \\ &= \sum_{S \in \mathcal{B}(j)} \lambda_S \sigma_i^S \\ &= \sigma_i^* \end{aligned}$$

を得る。この議論は、任意に固定した \$j\$ について成立した。それゆえ、すべての \$j \in N\$ について

$$u_j(\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*) = u_j \left( \sum_{S \in \mathcal{B}(j)} \lambda_S \tau_1^S, \dots, \sum_{S \in \mathcal{B}(j)} \lambda_S \tau_n^S \right) \quad \sigma^* \text{ の定義より}$$



$$\begin{aligned} &\geq \min_{S \in \mathcal{B}(j)} u_j(\tau_i^S, \dots, \tau_n^S) && u_j \text{ の準凹性より} \\ &\geq u_j && \tau^S \text{ の定義と } u \in V(S) \text{ より} \end{aligned}$$

を得る。従って、 $\bigcap_{S \in \mathcal{B}} \underline{V}(S) \subset \underline{V}(N)$  が成立する。Scarf (1967) より、 $C(\underline{V})$  が非空になる。よって、 $C(V)$  は非空となる。◇

系 1. 仮定 1 のもとで、コミュニケーション系が完全情報交換もしくは、私的情報であるならば、事前  $\alpha$  コアは非空になる。

Hirase and Utsumi (2004b) は、他の存在条件についても扱っている。

#### 4. 応用例

例 1. コミュニケーション系が  $N$  で有界という条件は、必ずしも必要条件にはならないことを例示する。非対称情報の自発的貢献ゲームを考える。プレーヤーの集合を  $N = \{1, 2, 3\}$ 、状態の集合を  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  とする。プレーヤー  $i$  の行動集合を  $X_i = [0, K]$  とする。ここで、 $K > 0$  は十分大きな数とする。利得関数は、期待効用関数で与え、

$$Eu_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{3} \left\{ \sqrt{\sigma_1(\omega_j) + \sigma_2(\omega_j) + \sigma_3(\omega_j)} + m_i - c(\omega_j)\sigma_i(\omega_j) \right\}$$

とする。ここで、 $m_i > 0$  はプレーヤー  $i$  の所得、 $\sigma_i(\omega_j)$  は状態が  $\omega_j$  のときの公共財を生産するために投資する貨幣的な貢献と解釈される。 $c: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  は確率変数で、限界不効用をあらわす。問題を簡単にするために、 $c(\omega_1) = 1$ 、 $c(\omega_2) = 2$ 、 $c(\omega_3) = 3$  と定義する。

最初にコミュニケーション系が粗い情報交換の場合を考察する。

$$\mathcal{P}_1^{\{1\}} = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}\}$$

$$\mathcal{P}_2^{\{2\}} = \{\{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2\}\}$$

$$\mathcal{P}_3^{\{3\}} = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}\}$$

として、 $|S|$  が 2 以上のときは、すべての  $i$  について

$$\mathcal{P}_i^S = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}\}$$

とする。

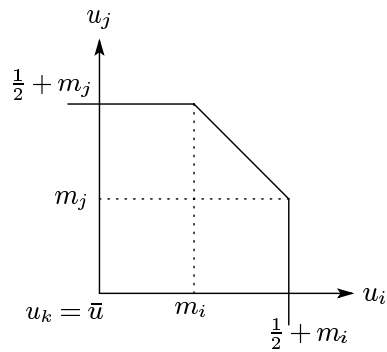


図1 粗い情報交換の場合の  $V(\{i, j\})$

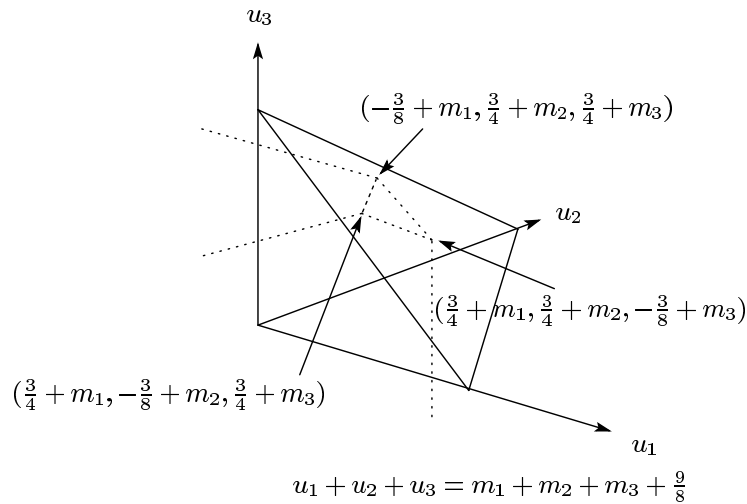


図2 粗い情報交換の場合の  $V(N)$

各プレイヤーの最大利得から、

$$V(\{1\}) = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \mid u_1 \leq m_1 + \frac{3}{20} \right\}$$

$$V(\{2\}) = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \mid u_2 \leq m_2 + \frac{1}{8} \right\}$$

$$V(\{3\}) = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \mid u_3 \leq m_3 + \frac{1}{6} \right\}$$

と求められる。また、提携  $\{i, j\}$  や  $N$  の期待利得の集合は、図1、図2によって与えられる。

$(m_1 + \frac{3}{8}, m_2 + \frac{3}{8}, m_3 + \frac{3}{8})$  という利得ベクトルを考える。この利得ベクトルは、すべての  $j$  について  $\sigma_1(\omega_j) = \sigma_2(\omega_j) = \sigma_3(\omega_j) = \frac{3}{16}$  となる戦略ベクトルによって実行される。この利得ベクトルは、どのような提携をもってしても改善することができない。つまり、事前  $\alpha$  コアになる。この事実は、 $N$  で有界という条件が満たされなくても、事前  $\alpha$  コアが存在する可能性があることを示唆し

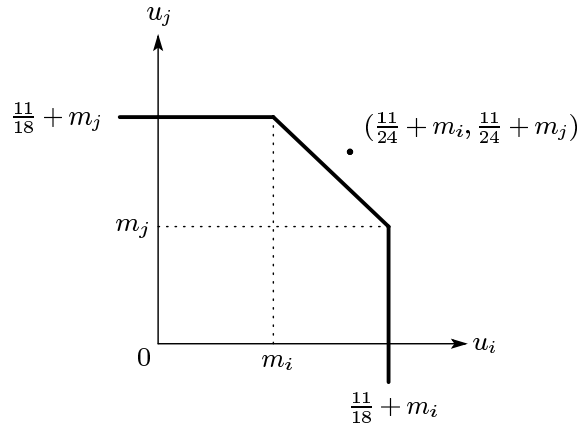


図3 完全情報交換の場合の  $V(\{i, j\})$

ている。

次に、同じゲームで完全情報交換のコミュニケーション系  $\{\hat{\mathcal{P}}_i^S\}_{\substack{i \in S \\ S \in \mathcal{N}}}$  を考察する。具体的には、 $\hat{\mathcal{P}}^{(i)} = \mathcal{P}_i^{(i)}$  として、 $|S|$  が2以上のときは、すべての  $i$  について

$$\hat{\mathcal{P}}_i^S = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}\}$$

とする。完全情報交換であるコミュニケーション系は  $N$  で有界になるので、この例は命題1の条件を満たしている。

$V(\{i\})$  については、粗い情報交換の場合と同じになる。2人提携  $\{i, j\}$  の期待利得の集合は図3の太線より左下の領域によって与えられる。ここで、 $(\frac{11}{24} + m_1, \frac{11}{24} + m_2, \frac{11}{24} + m_3)$  という利得ベクトルを考える。この利得ベクトルは、 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = (\frac{3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{1}{12})$  という戦略で実行可能であり、どのような提携もこれを改善できないことがわかる。つまり、事前  $\alpha$  コアになる。命題1の成立が例示されたわけである。◇

例2. 命題1を非対称情報の自発的貢献ゲームや共有地ゲームに応用することができる。プレイヤーの集合を  $N = \{1, \dots, n\}$ 、状態の集合を  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_l\}$  とする。プレイヤー  $i$  の行動集合を  $X_i = [0, K]$  とする。ここで、 $K > 0$  は十分に大きい正数である。プレイヤー  $i$  の利得関数を期待効用関数で与え、

$$Eu_i(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \sum_{\omega \in \Omega} \mu_i(\omega) \left\{ f_i \left( \sum_{i \in N} \sigma_i(\omega), \omega \right) - c_i(\sigma_i(\omega), \omega) \right\}$$

とする。ここで、 $\mu_i$  は、 $i$  の事前確率をあらわしている。 $f_i$  は、すべての  $\omega$  について  $\sum_{i=1}^n X_i$  を含むある开区間において凸関数とする。また、 $c_i$  は、すべての  $\omega$  について  $X_i$  を含むある开区間において凹関数であるとする。

命題 2 コミュニケーション系  $\{\mathcal{P}_i^S\}$  が  $N$  で有界ならば、このゲームの事前  $\alpha$  コアは存在する。

◇

## 5. 帰結と課題

本稿の主要な結論は、事前  $\alpha$  コアの存在を証明したことである。これにより、プレーヤー同士のコミュニケーションによって、協調行動が誘発される可能性が示唆されたといえる。我々のモデルの状態集合を 1 点集合だと考えることで Scarf (1971) のモデルを特殊ケースとして考えることができる。また系 1 にあるように、私的情報は  $N$  で有界なコミュニケーション系の 1 つなので、本稿の結論は Yannelis (1991) の結果の拡張であるといえる。さらに、Maus (2003) が扱った純粋交換経済はコミュニケーション系をもつ戦略形ゲームの 1 つであるため、我々の結論は、Scarf (1971), Yannelis (1991), Maus (2003) の結論の一般化であると解釈することができる。以下では今後の課題を二点取り上げて論じたい。

第一に、誘引両立性についてである。本稿では、状態が起こる前という意味で事前の意思決定について考察した。状態が実現した後に戦略を決めたり変えたりできる状況を考えるには状態実現時の誘引両立性を考慮しなければならないだろう。そのために、状態に依存する利得関数  $u'_i(\omega, \sigma_1(\omega), \dots, \sigma_n(\omega))$  を用い、 $\sum_{\omega' \in \mathcal{P}_i^S(\omega)} \frac{\mu(\{\omega'\})}{\mu(\mathcal{P}_i^S(\omega))} u'_i(\omega, \sigma_1(\omega), \dots, \sigma_n(\omega))$  などとする必要がある。この誘引両立性は  $\omega$  における行動の組  $(\sigma_1(\omega), \dots, \sigma_n(\omega))$  に対して、以下の条件を課すことになる。提携  $S$  が形成されたときに、すべての  $\sigma'_i$  と  $\omega$  に対して、

$$\sum_{\omega' \in \mathcal{P}_i^S(\omega)} \frac{\mu(\{\omega'\})}{\mu(\mathcal{P}_i^S(\omega))} u'_i(\omega', \sigma'_i(\omega'), \sigma_{-i}(\omega')) \geq \sum_{\omega' \in \mathcal{P}_i^S(\omega)} \frac{\mu(\{\omega'\})}{\mu(\mathcal{P}_i^S(\omega))} u'_i(\omega', \sigma'_i(\omega), \sigma'_{-i}(\omega'))$$

が成立するという条件である。この不等式が成立していれば、状態が判明した後もプレーヤー達は行動の組を変える誘引を持たない、というわけである。我々はこの誘引両立性を考慮した場合の事前  $\alpha$  コアの存在についても興味を持っている。

第二に、プレーヤーの情報開示に関する問題についてである。我々のモデルでは、コミュニケーション系を用いてグループ内のメンバーが持つ情報を外性的に与えている。これに対してグループ内で情報交換をする際に、プレーヤーが他のメンバーに対し自分の情報を隠したり嘘の情報を開示したりできる状況も考えられる。グループの中にあるメンバーの情報が内性的に決まるという状況である。そのために、Yazar (2001) などのようにグループ内における情報開示を戦略として扱うことを考えている。

(東洋大学経済学部非常勤講師)  
(東京工業大学大学院社会理工学研究科助手)

## 参 考 文 献

- Aumann, R. J., B. Peleg, (1960) "Von Neumann-Morgenstern solutions to cooperative games without side payments," *Bulletin of the American Mathematical Society*. **66**, 173–177.
- Forges, F., E. Minelli, (2001) "A note on the incentive compatible core," *Journal of Economic Theory*. **98**, 179–188.
- Hirase, K., Y., Utsumi, (2004a) " $\alpha$ -Cores with Communications," *Mita Journal of Economics*. **97**, 129–142.
- Hirase, K., Y., Utsumi, (2004b) "Ex ante  $\alpha$ -core with a communication system," mimeo.
- Lefebvre, I., (2001) "An alternative proof of the non-emptiness of the private core," *Economic Theory*. **18**, 275–291.
- Maus, S., (2003) "Balancedness and the core in economies with asymmetric information," *Economic Theory*. **22**, 613–627.
- Scarf, H., (1967) "The core of an  $n$ -person game," *Econometrica*. **35**, 50–69.
- Scarf, H., (1971) "On the Existence of a Cooperative Solution for a General Class of N-Person Games," *Journal of Economic Theory*. **3**, 169–181.
- Serfes, K., (2001) "Non-myopic learning in differential information economies: The core," *Economic Theory*. **18**, 333–348.
- Vohra, R., (1999) "Incomplete information, incentive compatibility and the core," *Journal of Economic Theory*. **86**, 123–147.
- Volij, O., (2000) "Communication, credible improvements and the core of an economy with asymmetric information," *International Journal of Game Theory*. **29**, 63–79.
- Wilson, R., (1978) "Information, Efficiency, and the core of an economy," *Econometrica*. **46**, 807–816.
- Yannelis, N. C., (1991) "The core of an economy with differential information," *Economic Theory*. **1**, 183–198.
- Yazar, J., (2001) "Ex ante contracting with endogenously determined communication plans," *Economic Theory*. **18**, 439–450.