

Title	ネットワークの形成と安定性
Sub Title	Network formation and stability
Author	川又, 邦雄(Kawamata, Kunio) 玉田, 康成(Tamada, Yasunari) 山田, 隆太(Yamada, Ryuta)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2005
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.98, No.1 (2005. 4) ,p.15- 31
JaLC DOI	10.14991/001.20050401-0015
Abstract	<p>本稿では2人のプレイヤーが相互に合意に至ったときにのみリンク（協力関係）を形成するようなネットワーク構成ゲームにおいて、どのようなネットワーク構造が対安定となるのかを、4人のプレイヤーを想定して分析している。とくに、様々な生産関数やネットワークにかかるコストを具体的に与えることによって、どの形式のネットワーク構造が対安定な構造となるかについて議論することを目的とする。本稿の分析においては、考える全てのネットワーク構造が対安定となる可能性があることが確認され、完全グラフ、サークル状グラフ、分離グラフが他の構造に比べて対安定になりやすい構造であることが分かる。</p> <p>This study explores the network configuration games wherein two players form a link (cooperation relationship) when mutual agreement has been reached.</p> <p>In addition, it considers four players game to analyze the pairwise stability of the network structure. In particular, by considering various forms of production functions and costs incurred in the network, we discuss the network structures that become pairwise stable.</p> <p>The analysis results confirmed the possibility that all imaginable network structures are liable to become pairwise stable.</p> <p>Moreover, we observed that the complete graph, the circular graph, and the separated graph (in two pairs) become pairwise stable structures more easily than other structures.</p>
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20050401-0015

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

ネットワークの形成と安定性

Network Formation and Stability

川又 邦雄(Kunio Kawamata)

玉田 康成(Yasunari Tamada)

山田 隆太(Ryuta Yamada)

本稿では 2 人のプレーヤーが相互に合意に至ったときのみリンク（協力関係）を形成するようなネットワーク構成ゲームにおいて、どのようなネットワーク構造が対安定となるのかを、4 人のプレーヤーを想定して分析している。とくに、様々な生産関数やネットワークにかかるコストを具体的に与えることによって、どの形式のネットワーク構造が対安定な構造となるかについて議論することを目的とする。本稿の分析においては、考える全てのネットワーク構造が対安定となる可能性があることが確認され、完全グラフ、サークル状グラフ、分離グラフが他の構造に比べて対安定になりやすい構造であることが分かる。

Abstract

This study explores the network configuration games wherein two players form a link (cooperation relationship) when mutual agreement has been reached. In addition, it considers four players game to analyze the pairwise stability of the network structure. In particular, by considering various forms of production functions and costs incurred in the network, we discuss the network structures that become pairwise stable. The analysis results confirmed the possibility that all imaginable network structures are liable to become pairwise stable. Moreover, we observed that the complete graph, the circular graph, and the separated graph (in two pairs) become pairwise stable structures more easily than other structures.

ネットワークの形成と安定性

川 又 邦 雄
玉 田 康 成
山 田 隆 太

要 旨

本稿では 2 人のプレーヤーが相互に合意に至ったときにのみリンク（協力関係）を形成するようなネットワーク構成ゲームにおいて、どのようなネットワーク構造が対安定となるのかを、4 人のプレーヤーを想定して分析している。とくに、様々な生産関数やネットワークにかかるコストを具体的に与えることによって、どの形式のネットワーク構造が対安定な構造となるかについて議論することを目的とする。本稿の分析においては、考えうる全てのネットワーク構造が対安定となる可能性があることが確認され、完全グラフ、サークル状グラフ、分離グラフが他の構造に比べて対安定になりやすい構造であることが分かる。

キーワード

ネットワーク形成, 協調関係, 対安定, 最適ネットワーク

1. 序

経済や社会の数多くの局面で、個々の（経済）主体が協力関係のペアをつくり、それが結果として全体を覆い尽くすネットワークの形成へと結びつくことがある。例えば、研究者間の共同プロジェクト、企業間の共同研究開発、国家間の FTA、などを挙げることができるだろう。Jackson and Wolinsky (1996) はそのような 2 人の主体間の協力関係の構築とそのネットワークの形成を、研究者間での共同研究になぞらえて共著者ゲーム (co-author game) と呼んだが、同様の協力・協調関係は現実の経済社会において数多く見られる。

本稿では主体間の様々な協力関係をリンクとして捉え、リンクから形成されるネットワークの構造の変化が新たなリンク形成のインセンティブにどのような影響を与えるか、そして個々の主体の利得や社会全体の効率性が安定的なネットワークの構造にどのように依存するかを明らかにする。共著者ゲームは Jackson and Wolinsky のほか、Slikker and Nouweland (2001) などによっても

議論されている。それらの研究はプレイヤー間のリンクを結ぶインセンティブと、リンクによって形成されるネットワーク構造の効率性とのあいだのトレードオフを指摘しており、典型的には、プレイヤーのリンクを結ぶインセンティブが過剰なネットワークを実現してしまうことが結論付けられている。リンクを結ぶインセンティブとその推移は対安定性 (pairwise stability) の概念によって与えられている。すなわちプレイヤーのペア双方がリンクを結ぶインセンティブをもつときにはそれが実現し、また、1人でもリンクを切断したいプレイヤーがいれば、それを自由に切断できるというものである。従来の研究では、対安定なネットワークと効率的なネットワークとの乖離について特殊な関数型をもちいて議論されているが、本稿ではそれぞれのリンクが生み出す価値について数多くの関数型を例示し、また、リンクを結ぶための費用も考慮に入れることで、多様なネットワーク構造が安定的であることを議論する。それに加えて、どのネットワーク構造が安定的となるかについてその傾向も分析する。具体的には、全てのプレイヤー間にリンクが張られた完全グラフのほか、中心となるプレイヤーが存在するような星型ネットワーク (これは階層構造のネットワークとしても解釈可能である)、全てのプレイヤーがリンクを結び合うサークル状グラフ、それぞれ独立のリンクが複数存在するようなネットワークなどが対安定となる。

ネットワーク形成ゲームについては、上記したように Jackson and Wolinsky ではネットワークの形成においてどのネットワーク構造が安定的な構造であり社会的に最適な構造であるのかという問題が議論されている。また、Jackson and Watts (2002) では、より動学的な枠組みでネットワーク構造の安定性の議論が行われている⁽¹⁾。本稿に最も近い研究としては、Kawamata and Tamada (2003) を挙げるができる。本稿と同様に共著者ゲームにおいて様々な価値関数についてのネットワークの安定性と総価値の最適性のパターンの分析が行われているが、本稿ではコブ・ダグラス型や CES 型関数などより一般的な生産関数を想定し、ネットワークを結ぶためのコストやプレイヤー間のウェイトも考察に含まれる。その他、Bolton and Dewatripont (1994) や Van-Zandt (1998) はネットワーク内部の情報の流れの効率性に着目して、効率的なネットワークのあり方について分析している。提携の形成という観点からは、数多くの文献が存在し、Aumann and Dreze (1974) はシャプレイ値に基づいた価値の配分によるネットワークの分析を行っている。また、Kim and Shin (2002) や Slikker and Nouweland (2001) も同様である。Kawamata and Tamada (2004) はリンク形成のインセンティブをシャプレイ値によって特徴付けたうえで、安定的なネットワークについての分析を行っている。

(1) Slikker and Nouweland (2001) がよいサーベイである。

2. モデル

2人のプレーヤーによる協力関係構築のゲーム（共著者ゲーム, co-author game）を考える。 $N = \{1, \dots, n\}$ をプレーヤーの集合とし、各プレーヤーは他のプレーヤーとの共同プロジェクト（リンクと呼ぶことにする）によって生産活動を行うものとする。1つのリンクは2人のプレーヤーによって構築され、プレーヤー i とプレーヤー j のリンクを $\{i, j\}$ 、もしくは単純化して ij によって表現する。また、1人のプレーヤーは複数のリンクを結ぶことも可能であるとする。

$L^N \equiv \{ij | ij \subset N, j \neq i\}$ と定義する。 L^N は N 人のプレーヤーによる可能な全てのリンクの集合を表しており、すなわち L^N は完全グラフ (complete graph) を意味している。また N 人プレーヤーにおけるリンクの集合 $L \subset L^N$ をネットワーク (N, L) とし、 $L_i \subset L$ をプレーヤー i を参加するリンクとしよう。そして、プレーヤー i が参加するリンクの数を $d_i = |L_i|$ と表す。

それぞれのプレーヤーは1単位の時間を保有し、その限られた時間を所属するリンクのために費やすものとする。よって、もしプレーヤー i が d_i のリンクをもつならば、 $s_i = 1/d_i$ 時間をそれぞれのリンクに費やすことになる。1つのリンクの生産性は、そのリンクに参加するプレーヤーがどれだけそのリンクに時間を費やすかに依存する。すなわち、プレーヤー i がプレーヤー j とのプロジェクトから得られる価値は s_i と s_j の関数であり $f(s_i, s_j)$ と表現される。すると、プレーヤー i がネットワーク (N, L) から得る価値の合計は、

$$u_i(L) = \sum_{j:ij \in L} f(s_i, s_j)$$

となり、ネットワーク (N, L) の総価値は、

$$v(L) = \sum_{i \in N} u_i(L)$$

によって与えられることになる。ネットワークの効率性はネットワークがもたらす価値によって評価することができる。つまり、プレーヤーの集合 N が与えられたときに、全ての $L' \subset L^N$ について $v(L) \geq v(L')$ が成立するとき、ネットワーク (N, L) は最適である。

2.1 ネットワーク構成

本稿は具体的なネットワークの形を比較することを目的としている。したがって、取り扱いを単純化するためにプレーヤー数が4人である場合に限定して考察を進める。プレーヤー数が4人である場合、ネットワークを所与として、プレーヤーは以下の4つのタイプに分類することができる。

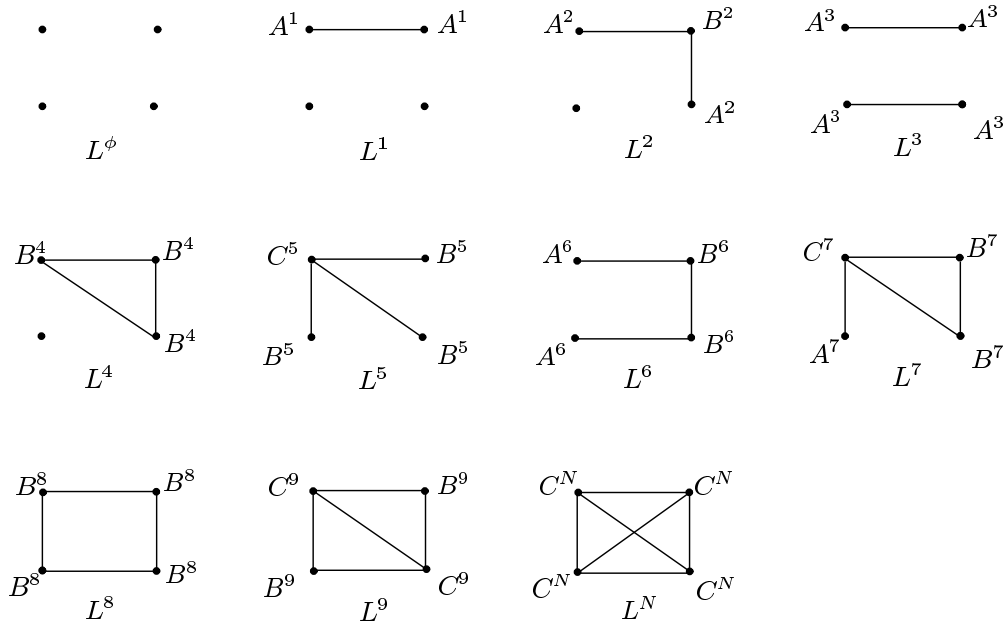


図 1

- まったくリンクに参加しないプレーヤーであるタイプ ϕ ($d_\phi = 0$)。
- 1つのリンクに参加するプレーヤーであるタイプ A ($d_A = 1$)。
- 2つのリンクに参加するプレーヤーであるタイプ B ($d_B = 2$)。
- 3つのリンクに参加するプレーヤーであるタイプ C ($d_C = 3$)。

プレーヤーの数が4人である場合には、可能なネットワークは図1で示す11パターンに限られ、ここで、 L^s は1つのネットワークを表している。さらに、 θ^s はネットワーク L^s におけるタイプ $\theta \in \{\phi, A, B, C\}$ のプレーヤーを意味し、また、プレーヤーにとってのネットワークの価値はプレーヤーのタイプにのみ依存するので、タイプ s の利得は u_s によって表すものとする。

それでは、いくつかのネットワークを説明してみよう。 L^2 は2人のタイプ A のプレーヤー、1人のタイプ B 、1人のタイプ ϕ によって構成され、ネットワークにおけるリンクの数は2本である。これは、3人のプレーヤーによるライン型ネットワークの形成とみることができる。さらに、 L^6 は3本のリンクから形成され、4人のプレーヤーによるライン型ネットワークである。 L^5 ではすべてのプレーヤーとリンクを構築する中心的プレーヤーと、その中心プレーヤーとのみリンクを構築するプレーヤーから形成されており、星型ネットワーク（または階層構造ネットワーク）と解釈することができる。さらに、前述したように、 L^N は可能な全てのリンクが構築されている完全ネットワークである。

2.2 ネットワークの対安定性

プレイヤーは双方が合意すれば自由にリンクを構築することができ、またどちらか一方にとってそれが望ましいならば自由にリンクから離脱できる。このような双方合意の原則のもとに安定的なネットワークは次の対安定性 (pairwise stability) の概念によって特徴付けられる。

定義 1 (対安定性) ネットワーク (N, L) は以下の 2 つの条件を満たすとき対安定であるという。

1. 全ての $i, j \in L$ について, $u_i(L) \geq u_i(L \setminus ij)$ かつ $u_j(L) \geq u_j(L \setminus ij)$ である。
2. 全ての $i, j \notin L$ について, $u_i(L) < u_i(L \cup ij)$ であれば, $u_j(L) > u_j(L \cup ij)$ である。

条件 1 はリンクを結んでいるどちらのプレイヤーにとっても, そのリンクを切断すればどちらのプレイヤーの効用も減少することを意味し, 条件 2 は一方の個人がリンクを増加させると効用が増加する場合, もう一方の個人はそのリンクを増加させることによって効用を減少させることを意味している。

Jackson and Wolinsky の例

ここで, 例として Jackson and Wolinsky において議論された生産関数, すなわち,

$$f(s_i, s_j) = s_i + s_j + s_i s_j$$

を考え, 対安定ネットワークと最適ネットワークを議論しておきたい。このとき, それぞれのプレイヤーにとってのネットワークの価値とネットワーク全体が生み出す価値の総和は表 1 のようになる。

Network	Payoff	Value		
L^ϕ	$(u_\phi, u_\phi, u_\phi, u_\phi) = (0, 0, 0, 0)$	0		
L^1	$(u_A, u_A, u_\phi, u_\phi) = (3, 3, 0, 0)$	6		
L^2	$(u_B, u_A, u_A, u_\phi) = (4, 2, 2, 0)$	8		
L^3	$(u_A, u_A, u_A, u_A) = (3, 3, 3, 3)$	12	最適	
L^4	$(u_B, u_B, u_B, u_\phi) = (5/2, 5/2, 5/2, 0)$	15/2		
L^5	$(u_C, u_A, u_A, u_A) = (5, 5/3, 5/3, 5/3)$	10		
L^6	$(u_B, u_B, u_A, u_A) = (13/4, 13/4, 2, 2)$	21/2		
L^7	$(u_C, u_B, u_B, u_A) = (11/3, 9/4, 9/4, 5/3)$	59/6		
L^8	$(u_B, u_B, u_B, u_B) = (5/2, 5/2, 5/2, 5/2)$	10		
L^9	$(u_C, u_C, u_B, u_B) = (25/9, 25/9, 2, 2)$	86/9		
L^N	$(u_C, u_C, u_C, u_C) = (7/3, 7/3, 7/3, 7/3)$	28/3		PS

表 1 Jackson and Wolinsky : $f(s_i, s_j) = s_i + s_j + s_i s_j$

表1より、Jackson and Wolinsky が考察した生産関数のもとでは、最適ネットワークは L^3 である。しかし、これは対安定ネットワークではない。なぜならば、 L^3 の2人のタイプ A プレーヤーがリンクを結ぶことで、ネットワークは L^6 に移行し2人のプレーヤーはタイプ B となる。そのとき、プレーヤーにとっての価値は3から $13/4$ へと上昇するので、実際、2人はリンクを結ぶことになる。しかしながら L^6 もまた対安定ではない。 L^6 の2人のタイプ A プレーヤーがリンクを結ぶことでネットワークは L^8 へと移行し、そのことで2人の価値は2から $5/2$ へと上昇するのである。同様の試行を考えると、唯一の対安定ネットワークは L^N となることが簡単に確認できる。したがって、最適ネットワークと対安定ネットワークとのあいだには齟齬が生じ、結果として対安定ネットワークは過剰リンクを生み出す。理由は単純である。新たなリンクの形成は既存リンクの価値を減少させることになるが、それぞれのプレーヤーは新たなリンクを形成する際に、既存のパートナーの承諾は必要としないので、この負の効果の一部 ($1/2$) しか考慮しないのである。

しかしながら、例えばプロジェクトに1つ参加するごとに c のコストがかかるものとした場合、この対安定なネットワークは変化することが分かる。そこで、

$$f(s_i, s_j) = s_i + s_j + s_i s_j - c$$

という生産関数を考え、 $c = 3/2$ として計算を行う。表2を参照してほしい。このとき、唯一の最適ネットワークは L^3 であり、しかも、それは唯一の対安定ネットワークである。したがって、最適ネットワークと対安定ネットワークとの間の齟齬は解消することとなる。

このように、最適ネットワークと対安定なネットワークとのあいだの関係は、それぞれのリンクがもたらす生産性、およびリンク構築のコストの双方に強く依存することになる。以下では、生産関数を特定化することによって、多種多様なネットワークが対安定ネットワークとして実現しうる

Network	Payoff	Value		
L^ϕ	$(u_\phi, u_\phi, u_\phi, u_\phi) = (0, 0, 0, 0)$	0		
L^1	$(u_A, u_A, u_\phi, u_\phi) = (3/2, 3/2, 0, 0)$	3		
L^2	$(u_B, u_A, u_A, u_\phi) = (1, 1/2, 1/2, 0)$	2		
L^3	$(u_A, u_A, u_A, u_A) = (3/2, 3/2, 3/2, 3/2)$	6	最適	PS
L^4	$(u_B, u_B, u_B, u_\phi) = (-1/2, -1/2, -1/2, 0)$	$-3/2$		
L^5	$(u_C, u_A, u_A, u_A) = (1/2, 1/6, 1/6, 1/6)$	1		
L^6	$(u_B, u_B, u_A, u_A) = (1/4, 1/4, 1/2, 1/2)$	$3/2$		
L^7	$(u_C, u_B, u_B, u_A) = (-5/6, -3/4, -3/4, 1/6)$	$-13/6$		
L^8	$(u_B, u_B, u_B, u_B) = (-1/2, -1/2, -1/2, -1/2)$	-2		
L^9	$(u_C, u_C, u_B, u_B) = (-31/18, -31/18, -1, -1)$	$-49/9$		
L^N	$(u_C, u_C, u_C, u_C) = (-13/6, -13/6, -13/6, -13/6)$	$-26/3$		

表2 $f(s_i, s_j) = s_i + s_j + s_i s_j - 3/2$

こと、そして、最適ネットワークとの関係について議論していく。

3. 分析

それでは、具体的な生産関数を与えることによって、様々なネットワークが対安定ネットワークとなりうることを確認し、最適ネットワークと比較してみたい。関数の例として、典型的には次のものを考える。

$$\text{例 1} \quad f(s_i, s_j) = \left(\frac{1}{2}(ws_i - c)^\alpha + \frac{1}{2}(s_j - c)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\text{例 2} \quad f(s_i, s_j) = \max\{ws_i - c, s_j - c\}$$

例 1 で挙げた関数は CES 型生産関数に生産性に関するウェイト w とリンクの構築が生産性に与える負の効果（コスト） c を導入したものである（例えば $\alpha = 1/2$, $w = 1$, $c = 0$ などを当てはめると $f(s_i, s_j) = \left(\frac{1}{2}(s_i)^{1/2} + \frac{1}{2}(s_j)^{1/2} \right)^2$ が得られる）。このとき、代替の弾力性は $\rho = 1/(1 - \alpha)$ によって与えられ、仮に $\alpha = 1$ ならば完全代替、 $\alpha = -\infty$ ならば完全補完を意味することになる。また、 $f(s_i, s_j) = (s_i s_j)^{\frac{1}{2}}$ （コブ・ダグラス型生産関数）は $\alpha = 0$, $w = 1$, $c = 0$ としたものと解釈できる。例 1 の関数型の α を変化させることによって 2 人のプレーヤーのリンクにおける代替の程度を測ることができ、またその範囲についてはとくに制限を設けない⁽²⁾。さらに、例 2 の生産関数においても、例えば、 $w = 2$, $c = 0$ ($f(s_i, s_j) = \max\{2s_i, s_j\}$) や $w = 1$, $c = 1/10$ ($f(s_i, s_j) = \max\{s_i, s_j\} - 1/10$) などを想定していく。

それでは、実際に対安定ネットワークと最適ネットワークを導き出してみたい。

L^N が対安定となるケース

まずは完全ネットワーク L^N が対安定となる可能性を議論する。 L^N が対安定になることは上で議論した Jackson and Wolinsky の例においても示されているが、他の生産関数においても容易に見つけることができる。例えば、例 1 の生産関数において $\alpha = -1/2$ とし、 $w = 1$, $c = 0$ とした場合には、ネットワークの各プレーヤーにとっての価値と総価値は表 3 のようになる。

結果 1 リンクを生産関数を $f(s_i, s_j) = \left(\frac{1}{2}s_i^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}s_j^{-\frac{1}{2}} \right)^{-2}$ とする。このとき、最適ネットワークは L^3 , L^8 , L^N であり、唯一の対安定ネットワークは L^N である。したがって、完全ネットワーク L^N は最適かつ対安定なネットワークである。

(2) 通常は、生産関数が凹関数であることを保証するために、 $-\infty \leq \alpha \leq 1$ を仮定する。

Network	Payoff	Value		
L^ϕ	$(u_\phi, u_\phi, u_\phi, u_\phi) = (0, 0, 0, 0)$	0		
L^1	$(u_A, u_A, u_\phi, u_\phi) = (1, 1, 0, 0)$	2		
L^2	$(u_B, u_A, u_A, u_\phi) = (2/(1/2 + 1/\sqrt{2})^2, (1/2 + \sqrt{3}/2)^{-2}, (1/2 + \sqrt{3}/2)^{-2}, 0)$	$4/(1/2 + 1/\sqrt{2})^2$		
L^3	$(u_A, u_A, u_A, u_A) = (1, 1, 1, 1)$	4	最適	
L^4	$(u_B, u_B, u_B, u_\phi) = (1, 1, 1, 0)$	3		
L^5	$(u_C, u_A, u_A, u_A) = (3/(1/2 + \sqrt{3}/2)^2, (1/2 + \sqrt{3}/2)^{-2}, (1/2 + \sqrt{3}/2)^{-2}, (1/2 + \sqrt{3}/2)^{-2})$	$6/(1/2 + \sqrt{3}/2)^2$		
L^6	$(u_B, u_B, u_A, u_A) = (1/8 + (1 + \sqrt{2})^{-2}, 1/8 + (1 + \sqrt{2})^{-2}, (1 + \sqrt{2})^{-2}, (1 + \sqrt{2})^{-2})$	$1/4 + 4/(1 + \sqrt{2})^2$		
L^7	$(u_C, u_B, u_B, u_A) = ((1/2 + \sqrt{3}/2)^{-2} + 2/(1/\sqrt{2} + \sqrt{3}/2)^{-2}, 1/2 + (1/\sqrt{2} + \sqrt{3}/2)^{-2}, 1/2 + (1/\sqrt{2} + \sqrt{3}/2)^{-2}, (1/2 + \sqrt{3}/2)^{-2})$	$1 + 2/(1/2 + \sqrt{3}/2)^2 + 4/(1/\sqrt{2} + \sqrt{3}/2)^2$		
L^8	$(u_B, u_B, u_B, u_B) = (1, 1, 1, 1)$	4	最適	
L^9	$(u_C, u_C, u_B, u_B) = (1/3 + 2/(\sqrt{2} + \sqrt{3}/2)^2, 1/3 + 2/(\sqrt{2} + \sqrt{3}/2)^2, 2/(1/\sqrt{2} + \sqrt{3}/2)^2, 2/(1/\sqrt{2} + \sqrt{3}/2)^2)$	$2/3 + 8(1/\sqrt{2} + \sqrt{3}/2)^2$		
L^N	$(u_C, u_C, u_C, u_C) = (1, 1, 1, 1)$	4	最適	PS

表 3 結果 1: $f(s_i, s_j) = \left(\frac{1}{2}s_i^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}s_j^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$

この例では、完全ネットワーク L^N が対安定なネットワークになることは Jackson and Wolinsky の例と同様であるが、 L^N は対安定なネットワークであると同時に、最適ネットワークでもあることに注意してほしい。したがって、個々のプレイヤーのインセンティブとネットワーク全体の効率性とのあいだに齟齬は生じない。

また、コブ・ダグラス型の生産関数を考えても、同じように L^N が対安定かつ最適なネットワークとなることが確認できる。これについては、表 4 を参照してほしい。

結果 2 リンクの生産関数を $f(s_i, s_j) = (s_i s_j)^{\frac{1}{2}}$ とする。最適ネットワークは L^3 , L^8 , L^N であり、 L^N が唯一の対安定ネットワークである。したがって、完全ネットワーク L^N は最適かつ対安定となる。

L^3 が対安定となるケース

次に、それぞれのプレイヤーが1つずつリンクに参加するネットワークである L^3 が対安定になる可能性を議論する。この L^3 が対安定ネットワークとなる結果は $f(s_i, s_j) = s_i + s_j + s_i s_j - 1/2$ のケースにおいても示されているが、他の生産関数を与えた場合にも容易に見つけることができる。

Network	Payoff	Value		
L^ϕ	$(u_\phi, u_\phi, u_\phi, u_\phi) = (0, 0, 0, 0)$	0		
L^1	$(u_A, u_A, u_\phi, u_\phi) = (1, 1, 0, 0)$	2		
L^2	$(u_B, u_A, u_A, u_\phi) = (\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$	$2\sqrt{2}$		
L^3	$(u_A, u_A, u_A, u_A) = (1, 1, 1, 1)$	4	最適	
L^4	$(u_B, u_B, u_B, u_\phi) = (1, 1, 1, 0)$	3		
L^5	$(u_C, u_A, u_A, u_A) = (\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$		
L^6	$(u_B, u_B, u_A, u_A) = (1/2 + 1/\sqrt{2}, 1/2 + 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$	$1 + \sqrt{2}$		
L^7	$(u_C, u_B, u_B, u_A) = (\sqrt{2/3} + 1/\sqrt{3}, 1/2 + 1/\sqrt{6}, 1/2 + 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{3})$	$1 + 2\sqrt{2/3} + 2/\sqrt{3}$		
L^8	$(u_B, u_B, u_B, u_B) = (1, 1, 1, 1)$	4	最適	
L^9	$(u_C, u_C, u_B, u_B) = (1/3 + \sqrt{2/3}, 1/3 + \sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$	$2/3 + 4\sqrt{2/3}$		
L^N	$(u_C, u_C, u_C, u_C) = (1, 1, 1, 1)$	4	最適	PS

表4 結果2: $f(s_i, s_j) = (s_i s_j)^{\frac{1}{2}}$

Network	Payoff	Value		
L^ϕ	$(u_\phi, u_\phi, u_\phi, u_\phi) = (0, 0, 0, 0)$	0		
L^1	$(u_A, u_A, u_\phi, u_\phi) = (9/10, 9/10, 0, 0)$	9/5		
L^2	$(u_B, u_A, u_A, u_\phi) = (4/5, 2/5, 2/5, 0)$	8/5		
L^3	$(u_A, u_A, u_A, u_A) = (9/10, 9/10, 9/10, 9/10)$	18/5	最適	PS
L^4	$(u_B, u_B, u_B, u_\phi) = (3/10, 3/10, 3/10, 0)$	9/10		
L^5	$(u_C, u_A, u_A, u_A) = (7/10, 7/30, 7/30, 7/30)$	7/5		
L^6	$(u_B, u_B, u_A, u_A) = (11/20, 11/20, 2/5, 2/5)$	19/10		
L^7	$(u_C, u_B, u_B, u_A) = (11/30, 13/60, 13/60, 7/30)$	31/30		
L^8	$(u_B, u_B, u_B, u_B) = (3/10, 30/10, 3/10, 3/10)$	6/5		
L^9	$(u_C, u_C, u_B, u_B) = (13/90, 13/90, 2/15, 2/15)$	5/9		
L^N	$(u_C, u_C, u_C, u_C) = (1/30, 1/30, 1/30, 1/30)$	2/15		

表5 結果3: $f(s_i, s_j) = s_i s_j - 1/10$

例えば, Kawamata and Tamada (2003) において議論されたように, Jackson and Wolinsky から相互依存関係の項を取り除いた関数型である $f(s_i, s_j) = s_i + s_j$ において確認することができる。また, コブ・ダグラス型の関数にリンク構築のコスト c を導入しても, それが十分に小さい場合には妥当する。仮に $c = 1/10$ としたならば, 表5のような価値を計算することができる。

結果3 リンクの生産関数を $f(s_i, s_j) = s_i s_j - 1/10$ とする。このとき, 唯一の最適ネットワークは L^3 であり, かつ, それは唯一の対安定ネットワークである。

また、上で述べたように L^3 が対安定となる例は比較的多くある。以下の例にも L^3 が対安定になるケースを見つけることが可能である。

L^4 が対安定となるケース

次に、 L^4 というネットワーク構造が対安定なネットワークである可能性を考えてみたい。ネットワーク L^4 は、3 人のプレーヤーが相互に完全なネットワークをもち、1 人のプレーヤーが全くリンクに参加しないという構造である。すなわち、3 人のプレーヤーのみによってサークル状のネットワークが形成されているのである。いま、例 1 の関数型において $\alpha = -1/2$, $w = 1$, $c = 1/4$ としてみよう。このとき、プレーヤーにとってのネットワークの価値とその総和は表 6 に与えられる。このとき、 L^3 だけではなく、 L^4 と L^8 が対安定なネットワークとなりうる事が分かる。

結果 4 リンクの生産関数を $f(s_i, s_j) = \left(\frac{1}{2}(s_i - 1/4)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(s_j - 1/4)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$ とする。このとき、唯一の最適ネットワークは L^3 であり、対安定ネットワークは L^3 , L^4 , L^8 となる。したがって、 L^3 は最適かつ対安定ネットワークである。

上記したように L^3 が対安定もしくは最適となる例は数多くあり、これもその 1 つである。また、4 人のプレーヤーによるサークル状ネットワークである L^8 もまた対安定であることに注意してほしい。

Network	Payoff	Value		
L^0	$(u_\phi, u_\phi, u_\phi, u_\phi) = (0, 0, 0, 0)$	0		
L^1	$(u_A, u_A, u_\phi, u_\phi) = (3/4, 3/4, 0, 0)$	3/2		
L^2	$(u_B, u_A, u_A, u_\phi) = (2/(1+1\sqrt{3})^2, (1+1\sqrt{3})^{-2}, (1+1\sqrt{3})^{-2}, 0)$	$4(1+1\sqrt{3})^2$		
L^3	$(u_A, u_A, u_A, u_A) = (3/4, 3/4, 3/4, 3/4)$	3	最適	PS
L^4	$(u_B, u_B, u_B, u_\phi) = (1/2, 1/2, 1/2, 0)$	3/2		PS
L^5	$(u_C, u_A, u_A, u_A) = (3/(1/\sqrt{3} + \sqrt{3})^2, (1/\sqrt{3} + \sqrt{3})^{-2}, (1/\sqrt{3} + \sqrt{3})^{-2}, (1/\sqrt{3} + \sqrt{3})^{-2})$	$6/(1/\sqrt{3} + \sqrt{3})^2$		
L^6	$(u_B, u_B, u_A, u_A) = (1/4 + (1+1/\sqrt{3})^{-2}, 1/4 + (1+1/\sqrt{3})^{-2}, (1+1/\sqrt{3})^{-2}, (1+1/\sqrt{3})^{-2})$	$1/2 + 4(1+1/\sqrt{3})^2$		
L^7	$(u_C, u_B, u_B, u_A) = (2/(1+\sqrt{3})^2 + (1/\sqrt{3} + \sqrt{3})^{-2}, 1/4 + (1+\sqrt{3})^{-2}, 1/4 + (1+\sqrt{3})^{-2}, (1/\sqrt{3} + \sqrt{3})^{-2})$	$1/2 + 4/(1+\sqrt{3})^2 + 2/(1/\sqrt{3} + \sqrt{3})^2$		
L^8	$(u_B, u_B, u_B, u_B) = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$	2		PS
L^9	$(u_C, u_C, u_B, u_B) = (1/12 + 2/(1+\sqrt{3})^2, 1/12 + 2/(1+\sqrt{3})^2, 2/(1+\sqrt{3})^2, 2/(1+\sqrt{3})^2)$	$1/6 + 8/(1+\sqrt{3})^2$		
L^N	$(u_C, u_C, u_C, u_C) = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$	1		

表 6 結果 4: $f(s_i, s_j) = \left(\frac{1}{2}(s_i - 1/4)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(s_j - 1/4)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$

Network	Payoff	Value		
L^ϕ	$(u_\phi, u_\phi, u_\phi, u_\phi) = (0, 0, 0, 0)$	0		
L^1	$(u_A, u_A, u_\phi, u_\phi) = (9/10, 9/10, 0, 0)$	9/5		
L^2	$(u_B, u_A, u_A, u_\phi) = (9/5, 9/10, 9/10, 0)$	18/5		
L^3	$(u_A, u_A, u_A, u_A) = (9/10, 9/10, 9/10, 9/10)$	18/5		
L^4	$(u_B, u_B, u_B, u_\phi) = (4/5, 4/5, 4/5, 0)$	12/5		
L^5	$(u_C, u_A, u_A, u_A) = (27/10, 9/10, 9/10, 9/10)$	27/5	最適	PS
L^6	$(u_B, u_B, u_A, u_A) = (13/10, 13/10, 9/10, 9/10)$	22/5		PS
L^7	$(u_C, u_B, u_B, u_A) = (17/10, 4/5, 4/5, 9/10)$	21/5		
L^8	$(u_B, u_B, u_B, u_B) = (4/5, 4/5, 4/5, 4/5)$	16/5		
L^9	$(u_C, u_C, u_B, u_B) = (31/30, 31/30, 4/5, 4/5)$	11/3		
L^N	$(u_C, u_C, u_C, u_C) = (7/10, 7/10, 7/10, 7/10)$	14/5		

表7 結果5: $f(s_i, s_j) = \max\{s_i, s_j\} - 1/10$

L^5, L^6 が対安定となるケース

次に L^5 と L^6 のネットワークが対安定になる可能性を考える。 L^5 というネットワークには、中心となる1人のプレイヤーが存在し、その中心のプレイヤーに対して他の全てのプレイヤーがリンクを共有する。そのグラフは星型のグラフとなる。

L^6 は2人のプレイヤーが2つのリンクに属し、他の2人のプレイヤーが1つのリンクに属するという構造をもち、すなわちライン型のネットワークとなる。

これらのネットワークが対安定になる結果は、Kawamata and Tamada (2003) において議論されているように、リンクの生産関数を例2の関数で想定すると得ることができる。いま、 $w = 1, c = 1/10$ とすると、各プレイヤーにとっての価値とその総和は表7のようになる。

結果5 リンクの実産関数を $f(s_i, s_j) = \max\{s_i, s_j\} - 1/10$ とする。このとき、唯一の最適ネットワークは L^5 であり、 L^5, L^6 が対安定ネットワークとなる。したがって、星型ネットワーク L^5 は最適かつ対安定なネットワークである。

L^7 が対安定となるケース

ここではネットワーク L^7 が対安定となる可能性に関して議論する。ネットワーク L^7 は3人によるサークル型ネットワークに1本のリンクが張られている特徴的な状況を描写している。このネットワークはリンクの実産関数を例2とし、 $w = 2, c = 0$ とした場合に対安定となることが、表8より確認できる。

結果6 リンクの実産関数を $f(s_i, s_j) = \max\{2s_i, s_j\}$ とする。このとき、唯一の最適ネットワー

Network	Payoff	Value		
L^ϕ	$(u_\phi, u_\phi, u_\phi, u_\phi) = (0, 0, 0, 0)$	0		
L^1	$(u_A, u_A, u_\phi, u_\phi) = (2, 2, 0, 0)$	4		
L^2	$(u_B, u_A, u_A, u_\phi) = (2, 2, 2, 0)$	6		
L^3	$(u_A, u_A, u_A, u_A) = (2, 2, 2, 2)$	8		PS
L^4	$(u_B, u_B, u_B, u_\phi) = (2, 2, 2, 0)$	6		
L^5	$(u_C, u_A, u_A, u_A) = (3, 2, 2, 2)$	9	最適	PS
L^6	$(u_B, u_B, u_A, u_A) = (2, 2, 2, 2)$	8		
L^7	$(u_C, u_B, u_B, u_A) = (7/3, 2, 2, 2)$	25/3		PS
L^8	$(u_B, u_B, u_B, u_B) = (2, 2, 2, 2)$	8		PS
L^9	$(u_C, u_C, u_B, u_B) = (2, 2, 2, 2)$	8		PS
L^N	$(u_C, u_C, u_C, u_C) = (2, 2, 2, 2)$	8		PS

表 8 結果 6 : $f(s_i, s_j) = \max\{2s_i, s_j\}$

Network	Payoff	Value		
L^ϕ	$(u_\phi, u_\phi, u_\phi, u_\phi) = (0, 0, 0, 0)$	0		
L^1	$(u_A, u_A, u_\phi, u_\phi) = (9/5, 9/5, 0, 0)$	18/5		
L^2	$(u_B, u_A, u_A, u_\phi) = (\sqrt{194}/5, \sqrt{97/2}/5, \sqrt{97/2}/5, 0)$	$2\sqrt{194}/5$		
L^3	$(u_A, u_A, u_A, u_A) = (9/5, 9/5, 9/5, 9/5)$	36/5		
L^4	$(u_B, u_B, u_B, u_\phi) = (8/5, 8/5, 8/5, 0)$	24/5		
L^5	$(u_C, u_A, u_A, u_A) = (\sqrt{389}/5, \sqrt{389}/15, \sqrt{389}/15, \sqrt{389}/15)$	$2\sqrt{389}/5$	最適	
L^6	$(u_B, u_B, u_A, u_A) = (4/5 + \sqrt{97/2}/5, 4/5 + \sqrt{97/2}/5, \sqrt{97/2}/5, \sqrt{97/2}/5)$	$8/5 + 2\sqrt{194}/5$		
L^7	$(u_C, u_B, u_B, u_A) = (\sqrt{386}/15 + \sqrt{389}/15, 4/5 + \sqrt{193/2}/15, 4/5 + \sqrt{193/2}/15, \sqrt{389}/15)$	$8/5 + 2\sqrt{386}/15 + 2\sqrt{389}/15$		PS
L^8	$(u_B, u_B, u_B, u_B) = (8/5, 8/5, 8/5, 8/5)$	32/5		
L^9	$(u_C, u_C, u_B, u_B) = (7/15 + \sqrt{386}/15, 7/15 + \sqrt{386}/15, \sqrt{386}/15, \sqrt{386}/15)$	$14/15 + 4\sqrt{386}/15$		
L^N	$(u_C, u_C, u_C, u_C) = (7/5, 7/5, 7/5, 7/5)$	18/5		PS

表 9 結果 7 : $\left(\frac{1}{2}(2s_i - 1/5)^{-2} + \frac{1}{2}(s_j - 1/5)^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

クは L^5 であり、 L^7 と L^N が対安定ネットワークになる。

また、 L^7 はリンクの生産関数を例 1 において、 $\alpha = -2$ 、 $w = 2$ 、 $c = 1/5$ とすると対安定となる。 $w > 1$ なので、プレーヤー間に非対称性が存在することに注意してほしい。各プレーヤーにとっての価値と、総価値は表 9 にまとめられている。

Network	Payoff	Value		
L^ϕ	$(u_\phi, u_\phi, u_\phi, u_\phi) = (0, 0, 0, 0)$	0		
L^1	$(u_A, u_A, u_\phi, u_\phi) = (3/4, 3/4, 0, 0)$	$3/2$		
L^2	$(u_B, u_A, u_A, u_\phi) = (\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/4, \sqrt{3}/4, 0)$	$\sqrt{3}$		
L^3	$(u_A, u_A, u_A, u_A) = (3/4, 3/4, 3/4, 3/4)$	3	最適	PS
L^4	$(u_B, u_B, u_B, u_\phi) = (1/2, 1/2, 1/2, 0)$	$3/2$		
L^5	$(u_C, u_A, u_A, u_A) = (3/4, 1/4, 1/4, 1/4)$	$3/2$		
L^6	$(u_B, u_B, u_A, u_A) = (1/4 + \sqrt{3}/4, 1/4 + \sqrt{3}/4, \sqrt{3}/4, \sqrt{3}/4)$	$1/2 + \sqrt{3}$		
L^7	$(u_C, u_B, u_B, u_A) = (1/4 + 1/(2\sqrt{3}), 1/4 + 1/(4\sqrt{3}), 1/4 + 1/(4\sqrt{3}), 1/4)$	$-1 + 2\sqrt{2/3} + 2/\sqrt{3}$		
L^8	$(u_B, u_B, u_B, u_B) = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$	2		PS
L^9	$(u_C, u_C, u_B, u_B) = (-5/12 + \sqrt{2/3}, -5/12 + \sqrt{2/3}, -1/2 + \sqrt{2/3}, -1/2 + \sqrt{2/3})$	$-11/6 + 4\sqrt{2/3}$		
L^N	$(u_C, u_C, u_C, u_C) = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$	1		

表 10 結果 8: $f(s_i s_j) = (s_i s_j)^{\frac{1}{2}} - 1/4$

結果 7 リンクの生産関数を $(\frac{1}{2}(2s_i - 1/5)^{-2} + \frac{1}{2}(s_j - 1/5)^{-2})^{-\frac{1}{2}}$ とする。このとき、唯一の最適ネットワークは L^5 であり、 L^7 と L^N が対安定ネットワークになる。

この結論は非常に特徴的である。最適ネットワークは星型ネットワークであるが、プレイヤーの個別インセンティブは過剰リンクをもたらし、 L^7 と完全ネットワーク L^N が対安定となるのである。

L^8 が対安定となるケース

次にネットワーク L^8 が対安定になる可能性を議論する。 L^8 は、各々のプレイヤーが2つのリンクを形成し、結果として全てのプレイヤーが1本のラインで結びついたサークル状ネットワークを意味している。このネットワーク構造が対安定になることはすでに結果 3 において示しているが、コストを含めたコブ・ダグラス型の生産関数を利用した場合にも確認できる。いま、コブ・ダグラス型関数型においてリンク形成費用 $c = 1/4$ としよう。結果は表 10 にまとめられている。

結果 8 リンクの生産関数を $f(s_i s_j) = (s_i s_j)^{\frac{1}{2}} - 1/4$ とする。このとき、唯一の最適ネットワークは L^3 であり、 L^3 と L^8 が対安定ネットワークである。したがって、ネットワーク L^3 は最適かつ対安定となる。

さらに L^8 が唯一の対安定ネットワークとなるのは、以下の、

$$f(s_i, s_j) = s_i + s_j + \sqrt{s_i + s_j} - c$$

Network	Payoff	Value		
L^ϕ	$(u_\phi, u_\phi, u_\phi, u_\phi) = (0, 0, 0, 0)$	0		
L^1	$(u_A, u_A, u_\phi, u_\phi) = (1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 0, 0)$	$2 + 2\sqrt{2}$		
L^2	$(u_B, u_A, u_A, u_\phi) = (1 + \sqrt{6}, 1/2 + \sqrt{3/2},$ $1/2 + \sqrt{3/2}, 0)$	$2 + 2\sqrt{6}$		
L^3	$(u_A, u_A, u_A, u_A) = (1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$	$4 + 4\sqrt{2}$	最適	
L^4	$(u_B, u_B, u_B, u_\phi) = (2, 2, 2, 0)$	6		
L^5	$(u_C, u_A, u_A, u_A) = (1 + 2\sqrt{3}, 1/3 + 2/\sqrt{3},$ $1/3 + 2/\sqrt{3}, 1/3 + 2/\sqrt{3})$	$2 + 4\sqrt{3}$		
L^6	$(u_B, u_B, u_A, u_A) = (3/2 + \sqrt{3/2}, 3/2 + \sqrt{3/2},$ $1/2 + \sqrt{3/2}, 1/2 + \sqrt{3/2})$	$4 + 2\sqrt{6}$		
L^7	$(u_C, u_B, u_B, u_A) = (2/\sqrt{3} + \sqrt{10/3}, 5/6 + \sqrt{5/6},$ $5/6 + \sqrt{5/6}, 1/3 + 2/\sqrt{3})$	$2 + 4/\sqrt{3} + 2\sqrt{10/3}$		
L^8	$(u_B, u_B, u_B, u_B) = (2, 2, 2, 2)$	8		PS
L^9	$(u_C, u_C, u_B, u_B) = (-2/3 + \sqrt{2/3} + \sqrt{10/3},$ $-2/3 + \sqrt{2/3} + \sqrt{10/3}, -1/3 + \sqrt{10/3},$ $-1/3 + \sqrt{10/3})$	$-2 + 2\sqrt{2/3} + 4\sqrt{10/3}$		
L^N	$(u_C, u_C, u_C, u_C) = (-1 + \sqrt{6}, -1 + \sqrt{6}, -1 + \sqrt{6},$ $-1 + \sqrt{6})$	$-4 + 4\sqrt{6}$		

表 11 結果 9: $f(s_i, s_j) = s_i + s_j + \sqrt{s_i + s_j} - 1$

という生産関数を与え、 $c = 1$ とした場合に確認できる。結果は表 11 にまとめられている。

結果 9 リンクの実産関数を $f(s_i, s_j) = s_i + s_j + \sqrt{s_i + s_j} - 1$ とする。このとき、唯一の最適ネットワークは L^3 であり、唯一の対安定ネットワークは L^8 である。したがって最適ネットワークと対安定ネットワークとのあいだには齟齬が生じる。

L^9 が対安定となるケース

ここではネットワーク L^9 が対安定なネットワークになる可能性に関して議論する。このネットワーク構造が最適になることは、例 2 の生産関数を与え、 $w = 1$ 、 $c = 0$ とした場合に確認できる。結果は表 12 にまとめられている。

結果 10 リンクの実産関数を $f(s_i, s_j) = \max\{s_i, s_j\}$ とする。このとき、唯一の最適ネットワークは L^5 であり、 L^5 、 L^9 、 L^N が対安定ネットワークになる。 L^5 は最適かつ対安定なネットワークである。

Network	Payoff	Value		
L^ϕ	$(u_\phi, u_\phi, u_\phi, u_\phi) = (0, 0, 0, 0)$	0		
L^1	$(u_A, u_A, u_\phi, u_\phi) = (1, 1, 0, 0)$	2		
L^2	$(u_B, u_A, u_A, u_\phi) = (2, 1, 1, 0)$	4		
L^3	$(u_A, u_A, u_A, u_A) = (1, 1, 1, 1)$	4		
L^4	$(u_B, u_B, u_B, u_\phi) = (1, 1, 1, 0)$	3		
L^5	$(u_C, u_A, u_A, u_A) = (3, 1, 1, 1)$	6	最適	PS
L^6	$(u_B, u_B, u_A, u_A) = (3/2, 3/2, 1, 1)$	5		
L^7	$(u_C, u_B, u_B, u_A) = (2, 1, 1, 1)$	5		
L^8	$(u_B, u_B, u_B, u_B) = (1, 1, 1, 1)$	4		
L^9	$(u_C, u_C, u_B, u_B) = (4/3, 4/3, 1, 1)$	14/3		PS
L^N	$(u_C, u_C, u_C, u_C) = (1, 1, 1, 1)$	4		PS

表 12 結果 10 : $f(s_i, s_j) = \max\{s_i, s_j\}$

Network	Payoff	Value		
L^ϕ	$(u_\phi, u_\phi, u_\phi, u_\phi) = (0, 0, 0, 0)$	0		
L^1	$(u_A, u_A, u_\phi, u_\phi) = (1/3 + \sqrt{2}, 1/3 + \sqrt{2}, 0, 0)$	$2/3 + 2\sqrt{2}$		
L^2	$(u_B, u_A, u_A, u_\phi) = (2/3 + \sqrt{6}, 1/3 + \sqrt{3/2}, 1/3 + \sqrt{3/2}, 0)$	$4/3 + 2\sqrt{6}$		
L^3	$(u_A, u_A, u_A, u_A) = (1/3 + \sqrt{2}, 1/3 + \sqrt{2}, 1/3 + \sqrt{2}, 1/3 + \sqrt{2})$	$4/3 + 4\sqrt{2}$		
L^4	$(u_B, u_B, u_B, u_\phi) = (5/3, 5/3, 5/3, 0)$	5		
L^5	$(u_C, u_A, u_A, u_A) = (1 + 2\sqrt{3}, 1/3 + 2/\sqrt{3}, 1/3 + 2/\sqrt{3}, 1/3 + 2/\sqrt{3})$	$2 + 4\sqrt{3}$	最適	
L^6	$(u_B, u_B, u_A, u_A) = (7/6 + \sqrt{3/2}, 7/6 + \sqrt{3/2}, 1/3 + \sqrt{3/2}, 1/3 + \sqrt{3/2})$	$3 + 2\sqrt{6}$		
L^7	$(u_C, u_B, u_B, u_A) = (2/\sqrt{3} + \sqrt{10/3}, 2/3 + \sqrt{5/6}, 2/3 + \sqrt{5/6}, 1/3 + 2/\sqrt{3})$	$5/3 + 4/\sqrt{3} + 2\sqrt{10/3}$		
L^8	$(u_B, u_B, u_B, u_B) = (5/3, 5/3, 5/3, 5/3)$	20/3		
L^9	$(u_C, u_C, u_B, u_B) = (-2/3 + \sqrt{2/3} + \sqrt{10/3}, -2/3 + \sqrt{2/3} + \sqrt{10/3}, -1/3 + \sqrt{10/3}, -1/3 + \sqrt{10/3})$	$-2 + 2\sqrt{2/3} + 4\sqrt{10/3}$		PS
L^N	$(u_C, u_C, u_C, u_C) = (-1 + \sqrt{6}, -1 + \sqrt{6}, -1 + \sqrt{6}, -1 + \sqrt{6})$	$-4 + 4\sqrt{6}$		

表 13 結果 11 : $f(s_i, s_j) = \sqrt{s_i + s_j} + \max\{s_i, s_j\} - 2/3$

さらにこのネットワークが唯一の対安定な構造となるのは、以下の、

$$f(s_i, s_j) = \sqrt{s_i + s_j} + \max\{s_i, s_j\} - c$$

という生産関数を与え、リンク形成費用を $c = 2/3$ とした場合に確認できる。結果は表 13 にまとめられている。

結果 11 リンクの実産関数を $f(s_i, s_j) = \sqrt{s_i + s_j} + \max\{s_i, s_j\} - 2/3$ とする。このとき、唯一の最適ネットワークは L^5 であり、唯一の対安定ネットワークは L^9 である。したがって最適ネットワークと対安定ネットワークのとのあいだには齟齬が生じる。

4. 結論と課題

本稿では 4 人プレイヤーの共著者ゲームにおいて様々なネットワーク構造が対安定な構造になる可能性を議論した。とくに、様々な生産関数やネットワークにかかるコスト等を具体的に与えることで、どの構造が対安定な構造になるのかを例を挙げて示し、またどのネットワーク構造が対安定な構造となり易いかも合わせて議論した。

具体的には、 L^3 , L^N のネットワークに関してはそれが唯一の最適かつ対安定なネットワークになるという結果を確認することができ、 L^8 , L^9 のネットワークに関しては、それが唯一の対安定なネットワークになるということを確認することができた。また L^4 , L^5 , L^6 , L^7 のネットワークに関しても唯一ではないものの対安定なネットワークになりうるということを確認した。また、全くリンクを形成しない L^0 , 2 人のプレイヤーのみがリンクを結ぶ L^1 , 1 人のプレイヤーが全くリンクを形成しない L^2 というネットワークは、リンクを形成する費用が高い場合を想定することで、比較的容易にこれらのネットワークが対安定となることを確認できる。⁽³⁾ すなわち、本稿では様々な生産関数やリンク形成のコストを与えることで、考える全てのネットワーク構造が対安定となる例を示すことができた。この分析結果から、どのネットワーク構造が対安定となるかは生産関数の形状やリンク形成のコストの大きさに大きく依存していることが分かる。

他方、 L^3 , L^5 , L^8 , L^N , つまり分離型グラフ、星型グラフ、サークル状グラフ、完全グラフのネットワーク構造は他の構造と比べて、より対安定になり易い傾向にあることを見てとることができた。

(名誉教授)

(経済学部助教授)

(経済学研究科博士課程)

(3) 例 5 の生産関数において $w = 1$, $c = 1$ とした場合に確認することができる。

参 考 文 献

- Aumann, R. J. and J. Dreze (1974), “Cooperative Games with Coalition Structures”, *International Journal of Game Theory*, 3, 217–237.
- Bolton, P. and M. Dewatripont (1994), “The Firm as a Communication Network”, *Quarterly Journal of Economics*, 109, 809–839.
- Jackson, M. and A. Watts (2002), “Evolution of Social and Economic Network”, *Journal of Economic Theory*, 106 (2), 265–295.
- Jackson, M. and A. Wolinsky (1996), “A Strategic Model of Social and Economic Network”, *Journal of Economic Theory*, 106 (2), 265–295.
- Kawamata, K. and Y. Tamada (2003), “Work Partnering and Network Formation”, *Waseda Economic Papers*, 42, 113–127.
- Kawamata, K. and Y. Tamada (2004), “The Stability of Networks with Direct and Indirect Connections”, mimeo.
- Kim, C. and H. Shin (2002), “Endogenous Formation of Coalitions with Composite Goods”, *International Journal of Industrial Organization*, 20, 1491–1511.
- Slikker, M. and A. van den Nouweland (2001), *Social and Economic Networks in Cooperative Game Theory*, Kluwer.
- Van-Zandt, T. (1998), “The Scheduling and Organization of Periodic Associative Computation: Efficient Networks”, *Review of Economic Design*, 3 (2), 93–127.