Title	不確実性と資産市場均衡II
Sub Title	Uncertainty and asset market equilibrium II
Author	福岡, 正夫(Fukuoka, Masao) 須田, 伸一(Suda, Shinichi)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2004
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.97, No.3 (2004. 10) ,p.363(61)- 396(94)
JaLC DOI	10.14991/001.20041001-0061
Abstract	本稿においては, 資産構造が不完備であるならば, ほとんどすべての経済で資産市場均衡配分がパレート最適とはなりえないことを, 価値尺度財資産モデルの場合(定理3）, 名目資産モデルの場合（定理4）, 実物資産モデルの場合(定理5)に分けて順次に示す。証明には, 前節までと同様, 横断性定理が活用されるが, もととなる方程式体系としては主体的均衡の1階条件および市場の需給均衡条件を構成要素としたいわゆるextended approach が採用されている。 This study demonstrates that asset market equilibrium allocation cannot be Pareto optimal in almost all economies, if the asset structure is incomplete in three different cases, sequentially: (1) numeraire asset model (Theorem 3); (2) nominal asset model (Theorem 4); and (3) real asset model (Theorem 5). While the transversality theorem is utilized for a proof (as is the case in the prior sections), a so-called extended approach, which comprises the first-order condition of subjective equilibrium and the market demand-supply equilibrium condition, is adopted as a base equation system.
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20041001-0061

不確実性と資産市場均衡 II
Uncertainty and Asset Market Equilibrium II

福岡　正夫(Masao Fukuoka)
須田　伸一(Shinichi Suda)

本稿においては，資産構造が不完備であるならば，ほとんどすべての経済で資産市場均衡配分がパレート最適とはなりえないことを，価値尺度財資産モデルの場合(定理 3)，名目資産モデルの場合（定理 4)，実物資産モデルの場合(定理 5)に分けて順次に示す。証明には，前節までと同様，横断性定理が活用されるが，もととなる方程式体系としては主体的均衡の 1 階条件および市場の需給均衡条件を構成要素としたいわゆる extended approach が採用されている。

Abstract
This study demonstrates that asset market equilibrium allocation cannot be Pareto optimal in almost all economies, if the asset structure is incomplete in three different cases, sequentially: (1) numeraire asset model (Theorem 3); (2) nominal asset model (Theorem 4); and (3) real asset model (Theorem 5). While the transversality theorem is utilized for a proof (as is the case in the prior sections), a so-called extended approach, which comprises the first-order condition of subjective equilibrium and the market demand-supply equilibrium condition, is adopted as a base equation system.

「三田学会雑誌」97 巻 3 号（2004 年 10 月）

不確実性と資産市場均衡 II

福　岡　正　夫
須　田　伸　一

要　　旨

本稿においては，資産構造が不完備であるならば，ほとんどすべての経済で資産市場均衡配分がパレート最適とはなりえないことを，価値尺度財資産モデルの場合（定理 3），名目資産モデルの場合（定理 4），実物資産モデルの場合（定理 5）に分けて順次に示す。証明には，前節までと同様，横断性定理が活用されるが，もととなる方程式体系としては主体的均衡の 1 階条件および市場の需給均衡条件を構成要素としたいわゆる extended approach が採用されている。

キーワード

資産市場均衡，不完備な資産構造，パレート最適性，extended approach

8

前節までの所論をつうじて，資産市場完備の条件 $\operatorname{rank} V = S$ がどんな $\bar{p}_1 \in R^{LS}_{++}$ に対しても満たされているときには，すべての経済 ω において資産市場の均衡配分は条件付き先物市場均衡配分に一致すること，また実物資産の場合も，上記の完備条件が少なくともある $\bar{p}_1 \in R^{LS}_{++}$ について満たされているならば，開かつフル・メジャーの経済集合に属するという意味でほとんどすべての経済 ω においてやはり同様の帰結が成り立つこと，を明らかにした。よってそれらの条件下では，資産市場均衡はつねに，あるいはほとんどつねに存在し，かつその均衡配分はパレート最適になることが知られたのである。では転じて上記の条件がいずれも満たされない場合，すなわちどんな $\bar{p}_1 \in R^{LS}_{++}$ に対しても $\operatorname{rank} V < S$ となる場合には，帰結はどう変わってくるであろうか。本節以下で目指すところは，そのような不完備資産市場の特性の解明である。

$\operatorname{rank} V = S$ という条件は $J \geqq S$ であることを必要としているから，以下でとり上げられる不完備市場の事態は明らかに $J < S$ であることを十分条件としている。換言すれば，資産の種類が少なく状態の数に不足する場合には，資産市場は必然的に不完備とならざるをえないのである。もちろん $J \geqq S$ であっても $\operatorname{rank} V < S$ for all $\bar{p}_1 \in R^{LS}_{++}$ となることは不可能ではないが，その場合には

V のランクが J を下回り，資産の中には redundant なものが存在していることになる。ゆえにそのような redundant な資産の存在をあらかじめ除外して考えるとすれば，以下では不完備市場の考察として，もっぱら $J<S$ の場合をとり上げていけばよいことになろう。また前に示したように，rank $V=S$ for some $\bar{p}_1 \in R^{LS}_{++}$ という条件は実物収益行列 A が正則であることと同値であるから，実物資産の場合，市場がつねに不完備であれば A は明らかに非正則となるほかはない。

さて資産市場が上記の意味で不完備である場合には前節までの帰結は成立せず，したがって資産市場均衡の存否いかんもあらためて重要な検討事項となるのでなくてはならない。しかし不完備資産市場均衡の存在証明は，それ自体がかなり重厚長大な推論プロセスを必要とするので，ここではそのとり扱いをのちの機会に委ねることにした。したがって，目下の所論では不完備資産市場均衡の存在に関しては，既存の結果を借用するにとどめ，議論を中断することなく効率性の検討を続けていくことにしたい。

当然に推測されるところではあるが，まず最初に，$J<S$ である場合には，資産市場均衡配分は**ほとんどすべての**経済においてパレート最適にはなりえないことを精確に証明する[(27)]。そのための準備として，まずはつぎの補題の成立を示すことから始めよう。

補題 5　どんな経済 $\omega \in R^{L(S+1)I}_{++}$ の資産市場均衡配分 x^* においても，それがパレート最適になるためには，条件

$$\psi^1=\psi^2=\cdots=\psi^I$$

が満たされねばならない。ただし

$$\psi^i=(\psi^i(1),\cdots,\psi^i(S))=\left(\frac{\lambda^i_1(1)}{\lambda^i_0},\cdots,\frac{\lambda^i_1(S)}{\lambda^i_0}\right),\quad i=1,\cdots,I$$

で，$\lambda^i_0, \lambda^i_1(s), s=1,\cdots,S$ は各取引主体 i の効用最大化問題に現れるラグランジュ乗数である。

証明

所与の資産市場均衡について，主体 i のラグランジュ式を

$$\begin{aligned} L^i \;=\; & u^i(x^i)-\lambda^i_0[\bar{p}^{*'}_0(x^i_0-\omega^i_0)+q^{*'}z^i] \\ & -\lambda^i_1(1)[\bar{p}^*_1(1)'(x^i_1(1)-\omega^i_1(1))-V(1)z^i] \\ & \cdots \\ & -\lambda^i_1(S)[\bar{p}^*_1(S)'(x^i_1(S)-\omega^i_1(S))-V(S)z^i] \end{aligned}$$

---

(27)　初期賦存量の状態がすでにパレート最適になっていれば，たとえ $J<S$ であっても，初期賦存量自体が資産市場均衡配分になる。したがって，100 パーセント**すべての**経済において不完備資産市場均衡配分がパレート最適になりえないことは証明できない。

と書くことにすれば，1 階の条件として

$$\frac{\partial L^i}{\partial x^i_{\ell 0}} = \frac{\partial u^i}{\partial x^i_{\ell 0}} - \lambda^i_0 \bar{p}^*_{\ell 0} = 0,\ \ell = 1, \cdots, L$$

$$\frac{\partial L^i}{\partial x^i_{\ell 1}(s)} = \frac{\partial u^i}{\partial x^i_{\ell 1}(s)} - \lambda^i_1(s) \bar{p}^*_{\ell 1}(s) = 0,\ \ell = 1, \cdots, L,\ s = 1, \cdots, S$$

が成り立っている。他方 x^* がパレート最適であるためには，よく知られているように財，状態間のどの対（つい）どうしの限界代替率を選んだ場合も，それらはすべての主体間で均等となっていなければならないから，なかんずくその一部として一方の s を 0 に固定した場合についても

$$\frac{\dfrac{\partial u^i}{\partial x^i_{\ell 1}(s)}}{\dfrac{\partial u^i}{\partial x^i_{\ell 0}}} = \frac{\dfrac{\partial u^j}{\partial x^j_{\ell 1}(s)}}{\dfrac{\partial u^j}{\partial x^j_{\ell 0}}},\ i, j = 1, \cdots, I,\ s = 1, \cdots, S$$

が満たされているのでなくてはならない。そこでこの条件に前記 1 階条件を適用すれば，$\bar{p}^*_{\ell 0}, \bar{p}^*_{\ell 1}(s)$ が消去されて

$$\frac{\lambda^i_1(s)}{\lambda^i_0} = \frac{\lambda^j_1(s)}{\lambda^j_0},\ i, j = 1, \cdots, I,\ s = 1, \cdots, S$$

となり，よって

$$\psi^i(s) = \psi^j(s),\ i, j = 1, \cdots, I,\ s = 1, \cdots, S$$

とならねばならないことになる。証了。

そこでこの補題 5 の帰結にもとづいて，$J < S$ の場合の資産市場均衡配分が生成的にパレート最適にはなりえないことを示すことにしよう。ただこの主張を証明するにあたっては，資産の種類によって若干付帯条件が異なってくるので，以下では価値尺度財資産モデル，名目資産モデル，実物資産モデルのそれぞれの場合を分けてとり扱うのが便利である。また，技術的な理由により，以下本稿では，初期賦存量ベクトルの集合 Ω に関する仮定 A.3.1 を，つぎの A.8 に強めることにしたい。

A.8　Ω は $R^{L(S+1)I}_{++}$ の有界な開部分集合である。

なぜこれが必要とされるかについては，後述ステップ 3 の推論を参照されたい。

さて，もっとも簡単な価値尺度財モデルの場合から，とり上げていくことにする。[28]

（28）定理 3 およびその証明については，A. Villanacci, L. Carosi, P. Benevieri and A. Battinelli, *Differential Topology and General Equilibrium with Complete and Incomplete Markets*, 2002, p.420 の Theorem 2 と Proof を参照。

定理３　収益行列 V をもつ価値尺度財資産モデルを考え，そこで $J < S$ であるとすれば，初期賦存量空間 Ω の開かつフル・メジャーの部分集合 Ω^* が存在して，すべての $\omega \in \Omega^*$ に対してその経済 $E(V)$ のどの資産市場均衡 $((x^*, z^*), (\bar{p}^*, q^*))$ の均衡配分 x^* もパレート最適にはなりえない。

証明

推論に立ち入るに先立って，あらかじめ収益行列 V については状態 $1, \cdots, S$ の番号を適当に入れ替え，その第１行を落としても残る $(S-1) \times J$ の行列について

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} V^1(2) & \cdots & V^J(2) \\ \vdots & & \vdots \\ V^1(S) & \cdots & V^J(S) \end{bmatrix} = J$$

となるように手筈を調えておく。そうした工夫が一般性を失うことなくできるのは，つぎのような事情による。まず価値尺度財資産モデルにおいては，V は $\bar{p}_1$ から独立であり，また当初から redundant な資産を除いて考えているので，本来の V 行列のランクは J になる。したがって，その S 個の行の中から J 個の一次独立の行を，それも $\bar{p}_1$ から独立に選ぶことができる。ところが目下の場合は $J < S$ であるから，そのように選んだ J 個の行のほかにまだ $(S-J)$ 個の行が残っており，よってその中から任意に一つの行を選んでそれを V からとり去っても，残る $(S-1) \times J$ 行列のランクを J 個に保つことができる。ゆえに第１行が除かれる行，第２行から第 S 行までが J 個の一次独立の行を含む $(S-1)$ 個の行になるように，状態の番号をつけ換えればよいのである。

そこでそのように状態が番号づけられていると想定した上で，価値尺度財を第１財と決めて，その価格を

$$\bar{p}_{10} = \bar{p}_{11}(1) = \cdots = \bar{p}_{11}(S) = 1$$

と基準化し，それらを除いた価格ベクトルを以下では

$$\hat{\bar{p}}_0 = (\bar{p}_{20}, \cdots, \bar{p}_{L0})'$$

$$\hat{\bar{p}}_1(s) = (\bar{p}_{21}(s), \cdots, \bar{p}_{L1}(s))',\ s = 1, \cdots, S$$

そして

$$\hat{\bar{p}} = (\hat{\bar{p}}_0, \hat{\bar{p}}_1(1), \cdots, \hat{\bar{p}}_1(S))$$

と記す。

さて従前どおり $((x^i)_{i=1}^I, (\lambda^i)_{i=1}^I, (z^i)_{i=1}^I) = (x, \lambda, z), ((\omega^i)_{i=1}^I) = \omega$ と略記して，所与の資産市場均衡を $\xi = (x^*, \lambda^*, z^*, \hat{\bar{p}}^*, q^*)$ と書き，その均衡条件を $F(\xi, \omega) = 0$ であらわすとする。前稿第６節

ではドブリューの流儀に倣って，そのような均衡条件を社会的超過需要関数を用いてあらわすいわゆる reduced approach を採用したが，ここでは多少やり方を変え，スメール流に各主体の効用最大化条件にまで溯って，それらと市場の需給均衡条件をあわせて用いるいわゆる extended approach を採ることにする。(29)

すると上記 $F(\xi,\omega)=0$ の内容は

$$
\begin{aligned}
&Du^1-\lambda^1\Phi(\bar{p})=0\\
&-\Phi(\bar{p})(x^1-\omega^1)+\begin{bmatrix}-q\\ V\end{bmatrix}z^1=0\\
&\lambda^1\begin{bmatrix}-q\\ V\end{bmatrix}=0\\
&\qquad\vdots\\
&Du^I-\lambda^I\Phi(\bar{p})=0\\
&-\Phi(\bar{p})(x^I-\omega^I)+\begin{bmatrix}-q\\ V\end{bmatrix}z^I=0\\
&\lambda^I\begin{bmatrix}-q\\ V\end{bmatrix}=0
\end{aligned}
\tag{19}
$$

という各主体 $i=1,\cdots,I$ の主体的均衡条件と

$$\sum_{i=1}^{I}(\hat{x}^i-\hat{\omega}^i)=0 \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{I}z^i=0 \tag{21}$$

という市場の需給均衡条件から構成されることになる。ここで

$$
\Phi(\bar{p})=\begin{bmatrix}\bar{p}_0{}' & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \bar{p}_1(1)' & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \bar{p}_1(S)'\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}(1,\bar{p}_{20},\cdots,\bar{p}_{L0}) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & (1,\bar{p}_{21}(1),\cdots,\bar{p}_{L1}(1)) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & (1,\bar{p}_{21}(S),\cdots,\bar{p}_{L1}(S))\end{bmatrix}
$$

(29) この推論法については A. Villanacci *et al, op.cit.*, pp.420-422 参照。

であり，$\hat{x}^i, \hat{\omega}^i$ は価値尺度財 ($\ell = 1$) の成分を除いた x^i, ω^i の表記である。(19) が各主体のラグランジュ式をそれぞれ x^i, λ^i, z^i で偏微分することで得られる 1 階の最大化条件であること，(20)，(21) がそれぞれ財市場および資産市場の需給均衡条件であること，(20) から財 1 に関する需給均衡条件が省かれているのはワルラス法則の成立によるものであること，などはいうまでもないであろう。

ところで当該の資産市場均衡配分 x^* がパレート最適を満たすとすれば，前に証明した補題 5 の条件が満たされなくてはならないから，その一部として条件

$$\frac{\lambda_1^I(1)}{\lambda_0^I} = \frac{\lambda_1^1(1)}{\lambda_0^1} \tag{22}$$

を前掲の (19) ～ (21) にさらに加えて併記することとする。ここですべての s, i に関する条件ではなく，$s = 1$, $i = 1$, I に関するもののみを掲げるのは，パレート最適が満たされないことを示すには，その条件が一部でも満たされないことを示せば足りるからである。

よって以下で示したいことは，$J < S$ であるならば，すべての $\omega \in \Omega^*$ についてシステム

$$F(\xi, \omega) = 0$$
$$\lambda_1^I(1) - \frac{\lambda_1^1(1)}{\lambda_0^1}\lambda_0^I = 0$$

が解をもたないような開かつフル・メジャーの Ω^* が存在しうるということである。横断性定理を用いてそのことを示すのが続く推論の眼目となるが，その前にあらかじめ上記システムの方程式と未知数の数の勘定をしておくと，つぎのとおりである。まず未知数については $x \in R^{L(S+1)I}$, $\lambda \in R^{(S+1)I}$, $z \in R^{IJ}$，$\hat{\hat{p}} \in R^{L(S+1)-(S+1)}$，$q \in R^J$ であるから，その数は全部で $(L(S+1) + (S+1) + J)I + L(S+1) - (S+1) + J$ 個となる。他方，方程式は (19) の主体 i に関する条件がそれぞれ $L(S+1)$ 個，$(S+1)$ 個，J 個あり，主体数が I 人であるから，(19) 全部で $(L(S+1) + (S+1) + J)I$ 個，それに (20) が $L(S+1) - (S+1)$ 個（前述したようにワルラス法則により各状態について 1 個ずつ省かれている），(21) が J 個で，これらを足せばちょうど未知数の数にひとしい。しかし，それにさらに (22) が加わるので，方程式のほうが 1 個超過して，解は通常は存在しないことになる。ところが $F(\xi, \omega) = 0$ の部分に解があることは資産市場均衡の存在定理[30]より知られているので，結局 (22) の部分が満たされないことになり，どの資産市場均衡もパレート最適を満たさないという論の運びになるのである。

そこでつぎは横断性定理を用いるための準備作業として，上記のシステムのヤコービ行列のランクを計算する手順となるが，いま (19) ～ (22) をそれぞれ (x^1, λ^1, z^1) , $\cdots$, $(x^I, \lambda^I, z^I), \hat{\hat{p}}, q$ および $\omega^1, \cdots, \omega^I$ の順序で偏微分し，その結果をまとめて掲げれば，下記の行列 Q^* になる。ただし ω^i については (20) から価値尺度財の式が除かれているので，財 1 の初期賦存量による微分は主体ごとに後に回し

(30) たとえば，A. Villanacci *et al, op.cit.*, p.322 の Theorem 20 を見よ。

て $\omega^i=(\hat{\omega}^i,\mathring{\omega}^i)$ とし, その順序にしたがって微分していくものとする。前にも触れたが, ^ は財 1 を除くことをあらわす記号で, 詳記すれば $\hat{\omega}^i=(\hat{\omega}^i_0,\hat{\omega}^i_1)=(\omega^i_{20},\cdots,\omega^i_{L0},\omega^i_{21}(1),\cdots,\omega^i_{L1}(1),\cdots,\omega^i_{21}(S),\cdots,\omega^i_{L1}(S))$ であり，一方 ∘ は財 1 のみを含む記号で $\mathring{\omega}^i=(\omega^i_{10},\omega^i_{11}(1),\cdots,\omega^i_{11}(S))$ である。

$$
Q^* = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccc} x^1 & \lambda^1 & z^1 & \cdots & x^I & \lambda^I & z^I & \hat{\bar{p}} & q & \hat{\omega}^1 & \mathring{\omega}^1 & \cdots & \hat{\omega}^I & \mathring{\omega}^I \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc|c|cccc}
D^2u^1 & -\Phi(\bar{p})' & 0 & & & & & & 0 & 0 & & \\
-\Phi(\bar{p}) & 0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\ V\end{smallmatrix}\right] & & 0 & & & * & \Phi(\hat{\bar{p}}) & I & & 0 \\
0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\ V\end{smallmatrix}\right]' & 0 & & & & & \vdots & 0 & 0 & & \\
 & & & \ddots & & & & \vdots & & & \ddots & \\
 & & & & D^2u^I & -\Phi(\bar{p})' & 0 & \vdots & & & 0 & 0 \\
 & 0 & & & -\Phi(\bar{p}) & 0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\ V\end{smallmatrix}\right] & * & 0 & & \Phi(\hat{\bar{p}}) & I \\
 & & & & 0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\ V\end{smallmatrix}\right]' & 0 & & & & 0 & 0 \\
\hline
\hat{I} & 0 & 0 & \cdots\cdots & \hat{I} & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \cdots\cdots & -I & 0 \\
\hline
0 & 0 & I & \cdots\cdots & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots & 0 & 0 \\
\hline
0 & g & 0 & \cdots\cdots & 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

上掲行列中 $\Phi(\hat{\bar{p}})$ は

$$
\begin{bmatrix}
\bar{p}_0{}' & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \hat{\bar{p}}_1(1)' & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \hat{\bar{p}}_1(S)'
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
(\bar{p}_{20},\cdots,\bar{p}_{L0}) & 0 & \cdots & 0 \\
0 & (\bar{p}_{21}(1),\cdots,\bar{p}_{L1}(1)) & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & (\bar{p}_{21}(S),\cdots,\bar{p}_{L1}(S))
\end{bmatrix}
$$

の略記，$\hat{I}$ は

$$
\hat{I} = \begin{bmatrix}
\begin{matrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix} & & 0 \\
 & \ddots & \\
0 & & \begin{matrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}
\end{bmatrix}
$$

をあらわしており，最終行の g, h はそれぞれ

$$g = \left(\frac{\lambda_1^1(1)}{(\lambda_0^1)^2}\lambda_0^I,\ -\frac{1}{\lambda_0^1}\lambda_0^I,\ 0\right)$$

$$h = \left(-\frac{\lambda_1^1(1)}{\lambda_0^1},\ 1,\ 0\right)$$

をあらわしている。

さて行列 Q^* の行の数は

$$(L(S+1)+(S+1)+J)I+(L-1)(S+1)+J+1$$

であり，列の数は

$$(L(S+1)+(S+1)+J)I+L(S+1)-(S+1)+J+((L-1)(S+1)+(S+1))I$$

であるから，明らかに行の数よりも列の数のほうが上回る。そこで以下では，この行列が少なくとも行の数だけのランクをもつことを示したいわけである。

まずは手順として

$$\begin{bmatrix} D^2u^i & -\Phi(\bar{p})' & 0 \\ -\Phi(\bar{p}) & 0 & \left[\begin{smallmatrix} -q \\ V \end{smallmatrix}\right] \\ 0 & \left[\begin{smallmatrix} -q \\ V \end{smallmatrix}\right]' & 0 \end{bmatrix}$$

というブロックの部分に注目して，均衡においてはこの $(L(S+1)+(S+1)+J)\ \times\ (L(S+1)+(S+1)+J)$ の正方行列がかならず正則になることを示す[(31)]。

事実もしそれが正則にならないとすれば，

$$\begin{bmatrix} D^2u^i & -\Phi(\bar{p})' & 0 \\ -\Phi(\bar{p}) & 0 & \left[\begin{smallmatrix} -q \\ V \end{smallmatrix}\right] \\ 0 & \left[\begin{smallmatrix} -q \\ V \end{smallmatrix}\right]' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^i \\ \Delta\lambda^i \\ \Delta z^i \end{bmatrix} = 0$$

となるような $(\Delta x^i, \Delta\lambda^i, \Delta z^i) \neq 0$ があるのでなければならない。するとまず $\Delta x^i \neq 0$ となることが，つぎのような推論をつうじて示される。というのは，これをバラして書いた

$$D^2u^i\Delta x^i - \Phi(\bar{p})'\Delta\lambda^i = 0 \tag{23}$$

$$-\Phi(\bar{p})\Delta x^i + \begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix}\Delta z^i = 0 \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix}'\Delta\lambda^i = 0 \tag{25}$$

(31) 以下の証明については，A. Villanacci *et al, op.cit.*, pp.313-314 参照。

の (23) から，もし $\Delta x^i = 0$ なら $-\Phi(\bar{p})'\Delta\lambda^i = 0$ となり，そこで $\Phi(\bar{p})'$ から価値尺度財に対応する行だけをとり出すと，

$$-\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \Delta\lambda^i = 0,$$

したがって $\Delta\lambda^i = 0$ とならねばならない。他方 (24) からは $\Delta x^i = 0$ ならば

$$\begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix} \Delta z^i = 0$$

となるが, ここで V の中から J 本の一次独立な行ベクトルを選び, それを V^* とすれば $V^*\Delta z^i = 0$ となって, $\Delta z^i = 0$ となる。ゆえに以上の推論のすべてから，もし $\Delta x^i = 0$ であれば $(\Delta x^i, \Delta\lambda^i, \Delta z^i) = 0$ ということになり，$(\Delta x^i, \Delta\lambda^i, \Delta z^i) \neq 0$ と矛盾する結果が生じるのである。

そこで $\Delta x^i \neq 0$ となるので，つぎに均衡条件 $Du^i = \lambda^i\Phi(\bar{p})$ の両辺に右から Δx^i を掛ければ $Du^i\Delta x^i = \lambda^i\Phi(\bar{p})\Delta x^i$ を得，したがって (24) から

$$Du^i\Delta x^i = \lambda^i \begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix} \Delta z^i$$

を得る。ところがふたたび均衡条件から

$$\lambda^i \begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix} = 0$$

であるから，上記の帰結より

$$Du^i\Delta x^i = 0 \tag{26}$$

となるのでなければならない。一方 (23) に左から $\Delta x^{i'}$ を掛ければ $\Delta x^{i'}D^2u^i\Delta x^i = \Delta x^{i'}\Phi(\bar{p})'\Delta\lambda^i$ を得，(24) を転置して得られる

$$\Delta x^{i'}\Phi(\bar{p})' = \Delta z^{i'} \begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix}'$$

をそれに代入すれば,

$$\Delta x^{i'}D^2u^i\Delta x^i = \Delta z^{i'} \begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix}' \Delta\lambda^i$$

となる。ゆえに (25) を用いることにより,

$$\Delta x^{i'}D^2u^i\Delta x^i = 0 \tag{27}$$

という結果を得る。

ところが明らかにそれは矛盾である。なぜなら厳密に擬凹の効用関数 u^i の下では，Du^i と直交する非ゼロの Δx^i がある場合，かならず $\Delta x^{i'} D^2 u^i \Delta x^i < 0$ とならねばならないからである。よって背理法の仮定の成立しないことが確かめられた。

これで当該正方行列のランクが $L(S+1)+(S+1)+J$ となることが分かったが，この帰結にもとづけば，各主体 $i=1,\cdots,I$ について上記正方行列を対角ブロックとした Q^* の部分行列

$$\begin{bmatrix} D^2u^1 & -\Phi(\bar{p})' & 0 & & & & \\ -\Phi(\bar{p}) & 0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\V\end{smallmatrix}\right] & & 0 & & \\ 0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\V\end{smallmatrix}\right]' & 0 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & D^2u^I & -\Phi(\bar{p})' & 0 \\ & 0 & & & -\Phi(\bar{p}) & 0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\V\end{smallmatrix}\right] \\ & & & & 0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\V\end{smallmatrix}\right]' & 0 \end{bmatrix}$$

のランクが $(L(S+1)+(S+1)+J)I$ となることはいうまでもない。

われわれの当面の課題は，繰り返していえば Q^* のランクがその行の数，すなわち $(L(S+1)+(S+1)+J)I+(L-1)(S+1)+J+1$ になること，を示す点にあり，そこでつぎにはそのための手順として，Q^* を各主体の効用最大化条件に対応する部分と，財市場の需給均衡条件，資産市場の需給均衡条件およびパレート最適条件にかかわる部分の二つに分け，前者を A，後者を B であらわすことにしよう。さらに記号の簡略化のため，いま

$$\begin{aligned} n &= (L(S+1)+(S+1)+J)I \\ k &= (L-1)(S+1)+J+1 \\ m &= L(S+1)-(S+1)+J+((L-1)(S+1)+(S+1))I \end{aligned}$$

と略記することにすれば，Q^* は上記のように $n\times(n+m)$ の A 行列と，$k\times(n+m)$ の B 行列に上下分割した形で書かれることになる。そして前のパラグラフの帰結から A 部分についてはすでに rank $A=n$ になることが知られたわけである。Q^* 全体が $(L(S+1)+(S+1)+J)I+(L-1)(S+1)+J+1$ だけのランクをもつという示すべき主張は，この略式表示でいえば $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ のランクが $n+k$ になることを示すにひとしい。以下では事実この主張が成り立つことを，つぎの補題を援用することによって証明する。(32)

(32) この補題およびその証明については，A. Villanacci *et al, op.cit.*, p.24 の Proposition 45 と Proof を参照。

補題６　行列 $Q^* = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ において A が $n \times (n+m)$，B が $k \times (n+m), k \leqq m$，かつ $\mathrm{rank}\ A = n$ であるとき，二つの命題

（I）rank $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = n + k$

（II）$\alpha = 1, \cdots, k$ のそれぞれについて第 α 成分が 1，他のすべての成分が 0 の列ベクトルを $e^\alpha \in R^k$ とすると

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} y^\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ e^\alpha \end{bmatrix},\ \alpha = 1, \cdots, k$$

となるような列ベクトル $y^\alpha \in R^{n+m}, \alpha = 1, \cdots, k,$ が存在する

は同値である。

証明

（I）$\Rightarrow$（II）

rank $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = n + k$ であるから，どんな $b \in R^{n+k}$ に対しても

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} y = b$$

となるような $y \in R^{n+m}$ がある。そこでそのような b として $\begin{bmatrix} 0 \\ e^\alpha \end{bmatrix} \in R^{n+k}$ を選べば，$\alpha = 1, \cdots, k$ の α ごとに y^α があることになる。

（II）$\Rightarrow$（I）

$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} y^\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ e^\alpha \end{bmatrix}$ となるような $y^\alpha \in R^{n+m}$ が $\alpha = 1, \cdots, k$ ごとにあったとする。仮定により rank $A = n$ であるから，やはりどの $e^\beta \in R^n, \beta = 1, \cdots, n$ に対しても $Ag^\beta = e^\beta$ となるような $g^\beta \in R^{n+m}$ がある。ゆえに $Y = (y^1, \cdots, y^k)$，$G = (g^1, \cdots, g^n)$ とすれば

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} [G\ Y] = \begin{bmatrix} AG & AY \\ BG & BY \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ BG & I_k \end{bmatrix}$$

となり，

$$\mathrm{rank} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} [G\ Y] = n + k$$

であることになる。ところがよく知られた行列のランク命題[33]から

（33） たとえば，A. Villanacci *et al, op.cit.*, p.10 の Corollary 7。二つの行列 M, N について rank $MN \leqq \min\{\mathrm{rank}\ M, \mathrm{rank}\ N\}$。

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}[G\ \ Y]\leqq\min\left\{\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix},\operatorname{rank}\ [G\ \ Y]\right\}$$

となるので，

$$n+k\leqq\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$$

他方 $k\leqq m$ であるところから，当然

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}\leqq n+k$$

であることを考慮すれば，結局

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=n+k$$

となるほかはない。証了。

これで補題 6 そのものの成り立つことが示されたので，以下ではそれを用いて Q^* がその行の数，すなわち $(L(S+1)+(S+1)+J)I+(L-1)(S+1)+J+1$ のランクをもつことを証明する。

証明はつぎの三つのステップに分けて行う。

ステップ 1。まず Q^* から下部の $J+1$ 個の行をとり除いた，つまり A に財の需給均衡条件に対応する行のみをつけ加えた

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c|ccccc}
D^2u^1 & -\Phi(\bar{p})' & 0 & & & & & & 0 & 0 & & & \\
-\Phi(\bar{p}) & 0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\V\end{smallmatrix}\right] & & 0 & & & * & \Phi(\hat{p}) & I & & 0 & \\
0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\V\end{smallmatrix}\right]' & 0 & & & & & & 0 & 0 & & & \\
 & & & \ddots & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & D^2u^I & -\Phi(\bar{p})' & 0 & & & & & 0 & 0 \\
 & 0 & & & -\Phi(\bar{p}) & 0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\V\end{smallmatrix}\right] & * & 0 & & & \Phi(\hat{p}) & I \\
 & & & & 0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\V\end{smallmatrix}\right]' & 0 & & & & & 0 & 0 \\
\hline
\hat{I} & 0 & 0 & \cdots\cdots & \hat{I} & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & \cdots\cdots & -I & 0
\end{array}\right]$$

という行列を考え，そのランクが $n+(L-1)(S+1)$ になることを示す。この行列について最終行ブロックを B とみなして補題6 をあてはめるとすれば，そこでの k,m はそれぞれ $k'=(L-1)(S+1), m'=m=L(S+1)-(S+1)+J+((L-1)(S+1)+(S+1))I$ となっているから，明らかに $k'<m'$ であって $k\leqq m$ という補題の仮定は満たされている。また $\operatorname{rank}\ A=n$ という仮定が満たされることもすでに証明ずみであるから，補題の帰結を用いることができて，上記行列のランクが $n+k'=n+(L-1)(S+1)$

になることを示すには，当該行列の右からある $(n+m)\times k'$ の行列 Z を掛けて，その結果が

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline I_{k'} \end{array}\right]}_{(L-1)(S+1)} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \\ \} \ (L-1)(S+1) \end{array}$$

となるような行列 Z が存在することを示せればよい。そこでいまそのような Z として

$$Z^* = \underbrace{\left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline -I_{k'} \\ \hline \Phi(\hat{\bar{p}}) \end{array}\right]}_{(L-1)(S+1)} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x^1 \\ \vdots \\ \mathring{\omega}^{I-1} \end{array}\right] \end{array}\right\} n+L(S+1)-(S+1)+J+L(S+1)(I-1) \\ \left.\right]\ \hat{\omega}^I \ \cdots \ (L-1)(S+1) \\ \left.\right]\ \mathring{\omega}^I \ \cdots \ S+1 \end{array}$$

をつくり，それを当該行列に掛けて計算すれば，所望の帰結の得られることが容易に確かめられる。(34) よって当該行列のランクが $n+(L-1)(S+1)$ になることが判明した。

ステップ 2。つぎの手順としては，ステップ 1 の行列にさらに資産の需給均衡条件に対応する J 個の行から成るブロックをつけ加えた

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c|ccccc}
D^2u^1 & -\Phi(\bar{p})' & 0 & & & & & & 0 & 0 & & & \\
-\Phi(\bar{p}) & 0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\V\end{smallmatrix}\right] & & 0 & & & * & \Phi(\hat{\bar{p}}) & I & & 0 & \\
0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\V\end{smallmatrix}\right]' & 0 & & & & & & 0 & 0 & & & \\
 & & & \ddots & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & D^2u^I & -\Phi(\bar{p})' & 0 & & & & & 0 & 0 \\
 & 0 & & & -\Phi(\bar{p}) & 0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\V\end{smallmatrix}\right] & * & 0 & & & \Phi(\hat{\bar{p}}) & I \\
 & & & & 0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\V\end{smallmatrix}\right]' & 0 & & & & & 0 & 0 \\
\hline
\hat{I} & 0 & 0 & \cdots\cdots & \hat{I} & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & \cdots\cdots & -I & 0 \\
\hline
0 & 0 & I & \cdots\cdots & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0
\end{array}\right]$$

---

(34) 0 成分が掛かる箇所，0 成分に掛けられる箇所は当然すべて 0。$(-I_{k'},\Phi(\hat{\bar{p}}))$ が $(\Phi(\hat{\bar{p}}),I_{k'})$ に掛かる箇所は $-\Phi(\hat{\bar{p}})+\Phi(\hat{\bar{p}})$ となって，やはり 0。同じく $(-I_{k'},\Phi(\hat{\bar{p}}))$ が $(-I_{k'},0)$ に掛かる箇所は $-I_{k'}$ に $-I_{k'}$ が掛かることになって $(I_{k'},0)$ となる。

という行列を考え，この行列のランクが $n+(L-1)(S+1)+J$ になることを示す。こんどは，それから最下部の行ブロックを除いた行列を新たに A，最下部行ブロックを新たに B と考えれば，補題 6 の n，k，m はそれぞれ $n''=n+(L-1)(S+1)$，$k''=J$，$m''=m=L(S+1)-(S+1)+J+((L-1)(S+1)+(S+1))I$ となるから，やはり補題の仮定 $k''\leqq m''$ は満たされていることが分かる。また新たな A 部分のランクが $n+(L-1)(S+1)$ になることはすでにステップ 1 で証明ずみである。よってふたたび補題を利用することができ，前記行列のランクが $n+(L-1)(S+1)+J$ になることを示すには，上記の行列に右から $(n+m)\times J$ の行列 Z を掛けて，その結果が

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c} 0\\ \vdots\\ 0\\ \hline 0\\ \vdots\\ 0\\ \hline I_{k''} \end{array}\right]}_{J}\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\} n\\ \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\} (L-1)(S+1)\\ \left.\begin{array}{l}\\ \end{array}\right\} J \end{array}$$

となるような Z がつくれることを示せばよい。このたびはそのような Z として

$$Z^{**}=\underbrace{\left[\begin{array}{c} 0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\\ \hline I_{k''}\\ \hline 0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\\ \hline -\begin{bmatrix}-q\\ V\end{bmatrix} \end{array}\right]}_{J}\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x^1\\ \lambda^1\\ z^1\\ \vdots\\ x^I\\ \lambda^I \end{array}\right\} n-J\\ z^I\cdots\cdots J \end{array}\right\} n\\ \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \hat{\hat{p}}\\ q\\ \vdots\\ \hat{\omega}^I \end{array}\right\} L(S+1)-(S+1)+J+L(S+1)(I-1)+(L-1)(S+1)\\ \mathring{\omega}^I\cdots S+1^I\cdots S+1 \end{array}\right\} m \end{array}$$

をつくり，それを掛けてみれば，やはり所望の帰結の得られることが確認できる[35]。よって当該の行列のランクが $n+(L-1)(S+1)+J$ となることが示された。

---

(35)　前と同様 0 成分が掛かる箇所, 0 成分に掛けられる箇所は当然 0。$(\Phi(\bar{p}),0,\begin{bmatrix}-q\\ V\end{bmatrix})$ ならびに $(\Phi(\hat{\hat{p}}),I_{k''})$ に $(I_{k''},\cdots,-\begin{bmatrix}-q\\ V\end{bmatrix})$ が掛かる箇所は，$\begin{bmatrix}-q\\ V\end{bmatrix}$ に $I_{k''}$ が，$I_{k''}$ に $-\begin{bmatrix}-q\\ V\end{bmatrix}$ が掛かる形になっていて，相殺されて 0。また最終ブロックとの掛け算は I と $I_{k''}$ のみが掛かる形になって，$I_{k''}$ となる。

ステップ 3。最後の第 3 段階では，ステップ 2 の行列にさらにパレート条件に対応する行を最終行としてつけ加えて，本来のヤコービ行列 Q^* を復元し，そのランクが $n+(L-1)(S+1)+J+1$ になることを，前のステップで得た帰結にもとづいて示して，証明を終える。ここでふたたび最終行を除いた行列を A，最終行を B とみなして，$n'''=n+(L-1)(S+1)+J$，$k'''=1$，$m'''=m=L(S+1)-(S+1)+J+((L-1)(S+1)+(S+1))I$ とすれば，$m \geqq 1$ であるところから $k''' \leqq m'''$ の満たされることは自明であり，また A 部分のランクが $n+(L-1)(S+1)+J$ となることはステップ 2 で証明ずみである。よって再三補題が利用でき，上記所望の帰結を示すためには当該行列に右から $(n+m)\times 1$ の列ベクトル Z を掛けて，その結果が

$$
\underbrace{\left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right]}_{1}
\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} (L-1)(S+1) \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} J \\ \left.\begin{array}{c} \\ \end{array}\right\} 1 \end{array}
$$

となるような Z がつくれることを示せばよい。そのような列ベクトル Z を次ページの Z^{***} のように書き，これを Q^* に掛ければ，結果は

$$
\left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline (\text{ロ}) \\ \hline (\text{ハ}) \\ \hline (\text{イ}) \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right]
$$

$$
Z^{***} = \underbrace{\left[\begin{array}{c}
0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline
b_1 \\ \vdots \\ b_{L(S+1)} \\ \hline
-\frac{\lambda_0^1}{\lambda_1^1(1)} \\ 0 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_S \\ \hline
0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline
0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline
0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline
\hat{I}\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{L(S+1)} \end{bmatrix} \\ \hline
c_1 \\ \vdots \\ c_{S+1}
\end{array}\right]}_{1}
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} x^1 \\ \vdots \\ z^{I-1} \end{array}\right\} (L(S+1)+(S+1)+J)(I-1) \\
x^I \cdots L(S+1) \\
x^I \cdots S+1 \\
z^I \cdots J \\
\left.\begin{array}{l} \hat{\hat{p}} \\ \\ q \end{array}\right\} L(S+1)-(S+1)+J \\
\left.\begin{array}{l} \hat{\omega}^1 \\ \vdots \\ \mathring{\omega}^{I-1} \end{array}\right\} L(S+1)(I-1) \\
\hat{\omega}^I \cdots (L-1)(S+1) \\
\mathring{\omega}^I \cdots S+1
\end{array}
$$

となる。よって所望の帰結を得るには，(イ), (ロ), (ハ) の部分がすべて 0 となるように $(a_2, \cdots, a_S)$, $(b_1, \cdots, b_{L(S+1)})$，$(c_1, \cdots, c_{S+1})$ が求められればよいのである。まず（イ）の部分についてみると，この部分は行列 $(-q', V')$ と列ベクトル $(-\dfrac{\lambda_0^1}{\lambda_1^1(1)}, 0, a_2, \cdots, a_S)$ とが掛け合わされることになっており，したがって

$$-q'\left[-\frac{\lambda_0^1}{\lambda_1^1(1)}\right] + V'\begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_S \end{bmatrix} = 0$$

が満たされるような $(a_2, \cdots, a_S)$ が求められればよいわけである。上式は

$$\begin{bmatrix} V^1(2) & \cdots & V^1(S) \\ \vdots & & \vdots \\ V^J(2) & \cdots & V^J(S) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 \\ \vdots \\ a_S \end{bmatrix} = \left[-q'\frac{\lambda_0^1}{\lambda_1^1(1)}\right]$$

と書き換えられるが，前述したとおりあらかじめ

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} V^1(2) & \cdots & V^1(S) \\ \vdots & & \vdots \\ V^J(2) & \cdots & V^J(S) \end{bmatrix} = J$$

が成り立つように $1, \cdots, S$ の順序が入れ替えられているので，上式を解いて $(a_2, \cdots, a_S)$ を求めるには何らの問題もなく，これで（イ）の箇所をすべて 0 にできることが明らかとされた。

つぎに (ロ) の部分は行列 $[D^2u^I \quad -\Phi(\bar{p})']$ と列ベクトル $(b_1, \cdots, b_{L(S+1)}, -\dfrac{\lambda_0^1}{\lambda_1^1(1)}, 0, a_2, \cdots, a_S)$ とが掛け合わされる形になっているから，（イ）によって $(a_2, \cdots, a_S)$ が定まっていれば，それを用いて

$$D^2u^I\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{L(S+1)} \end{bmatrix} - \Phi(\bar{p})'\begin{bmatrix} -\dfrac{\lambda_0^1}{\lambda_1^1(1)} \\ 0 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_S \end{bmatrix} = 0$$

を満たすように $(b_1, \cdots, b_{L(S+1)})$ が求められればよい。ここで前稿の仮定 A.3.2 の（4）から，一

般性を失うことなく D^2u^I は正則行列とすることができるので[36]，

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{L(S+1)} \end{bmatrix} = (D^2u^I)^{-1}\Phi(\bar{p})' \begin{bmatrix} -\dfrac{\lambda_0^1}{\lambda_1^1(1)} \\ 0 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_S \end{bmatrix}$$

として $(b_1, \cdots, b_{L(S+1)})$ を求めることができ，（ロ）の箇所をすべて 0 とすることができる。

最後に（ハ）の部分は，掛け算の結果が

$$\Phi(\bar{p})\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{L(S+1)} \end{bmatrix} + \Phi(\hat{\bar{p}})\hat{I}\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{L(S+1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{S+1} \end{bmatrix}$$

となり，したがってすでに求められた $(b_1, \cdots, b_{L(S+1)})$ を用いて

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{S+1} \end{bmatrix} = -\Phi(\bar{p})\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{L(S+1)} \end{bmatrix} - \Phi(\hat{\bar{p}})\hat{I}\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{L(S+1)} \end{bmatrix}$$

となるような $(c_1, \cdots, c_{S+1})$ を求めれば，当該部分をすべて 0 とすることができよう。

以上の長々しい議論をつうじて，われわれのヤコービ行列 Q^* のランクが $n+k$ すなわち $(L(S+1)+(S+1)+J)I+(L-1)(S+1)+J+1$ となることが漸く判明した。そこでこの帰結にもとづき推論を終結に導くために，横断性定理が援用される手順となる。

いま記述を簡単にするために

$$M = R_{++}^{L(S+1)I} \times R_{++}^{(S+1)I} \times R^{JI} \times R_{++}^{(L-1)(S+1)} \times R^J$$

そして $m^* = \dim M = L(S+1)I + (S+1)I + JI + (L-1)(S+1) + J,\ n^* = m^* + 1$ として

$$\begin{aligned} N &= R^{L(S+1)I+(S+1)I+JI} \times R^{(L-1)(S+1)} \times R^J \times R \\ &= R^{n^*} \end{aligned}$$

(36) よく知られているように，A.3.2.（4）$h'D^2u^i(x^i)h < 0,\ \forall h \neq 0,\ s.t.\ Du^i(x^i)h = 0,\ \forall x^i \in R_{++}^{L(S+1)}$ という仮定があれば，$\forall$ コンパクト集合 $X \subset R_{+}^{L(S+1)}, \exists\ \tilde{u}^i$，$\tilde{u}^i$ は u^i の単調増加変換，$s.t.\ D^2\tilde{u}^i(x^i)$ は負値定符号, $\forall x^i \in X$ ということがいえ，したがって $D^2\tilde{u}^i(x^i)$ は正則, $\forall x^i \in X$ ということがいえる。このようなコンパクト集合 X が存在することを保証するために，仮定 A. 8 が要請されているのである。

と書き，

$$
\begin{aligned}
F_P^* : M \times \Omega &\to N \\
(\xi, \omega) &\mapsto (F(\xi, \omega), \lambda_1^I(1) - \frac{\lambda_1^1(1)}{\lambda_0^1}\lambda_0^I)
\end{aligned}
$$

と定義すれば，目下のコンテキストにおける横断性定理の主張は，すべての $(\xi, \omega) \in {F_P^*}^{-1}(0)$ について rank $D_{\xi,\omega}F_P^*(\xi, \omega) = n^*$ ならば，ω のフル・メジャーの集合 $\Omega^* \subset \Omega$ が存在して，どの $\omega \in \Omega^*$ に対しても，すべての $\xi \in \{\xi \in M | F_P^*(\xi, \omega) = 0\}$ について rank $D_\xi F_P^*(\xi, \omega) = n^*$ になるということである。ここで同定理の仮定の成り立つことはすでに示されたわけであるから，その帰結もまた成り立つのでなくてはならない。ところが $D_\xi F_P^*(\xi, \omega)$ は n^* 行，m^* 列であるから，$n^* = m^* + 1$ より，そのランクが n^* になることは不可能であり，これは Ω^* に含まれる ω に対しては $F_P^*(\xi, \omega) = 0$ を満たすような $\xi \in M$ が存在しえないということを意味している。つまり

$$\{\xi \in M | F_P^*(\xi, \omega) = 0\} = \varnothing$$

となることが知られたということである。しかるに他方 F に関しては，すべての $\omega \in \Omega$ に対して

$$\{\xi \in M | F(\xi, \omega) = 0\} \neq \varnothing$$

であることが知られており，[37] よって Ω^* に含まれるすべての ω に対して満たされないのは

$$
\begin{aligned}
&F(\xi, \omega) = 0 \\
&\lambda_1^I(1) - \frac{\lambda_1^1(1)}{\lambda_0^1}\lambda_0^I = 0
\end{aligned}
$$

の 2 条件のうち後者であるほかはないという結果になる。したがってフル・メジャーの Ω^* に含まれるどの ω の下でも，そこで存在が保証されている資産市場均衡配分はパレート最適たりえないのである。

推論を終結する仕上げとして，最後に Ω^* が開集合となることを示したい。それを示すには，ある $\bar{\omega}$ を Ω^* から任意にとったとき，十分小さなある $\epsilon > 0$ が選べて，$\bar{\omega}$ のその ϵ 近傍に含まれるどの ω ももとの $\bar{\omega}$ と同じ性質をもつこと，すなわちそれらの ω の下では $F_P^*(\xi, \omega) = 0$ を満たす ξ が存在しないこと，を示せばよい。そこでいま所望の帰結に反して，どんな $\epsilon > 0$ を選んでも，当該 ϵ 近傍内にある ω があって，$F_P^*(\xi, \omega) = 0$ を満たす ξ が存在すると仮定してみよう。するとまず任意に ϵ' を選び，$\bar{\omega}$ の ϵ' 近傍内からある ω' をとれば $F_P^*(\xi', \omega') = 0$ を満たす ξ' があることになる。よって $\omega' \notin \Omega^*$ となり，そこでその ω' が含まれないように，さらに小さな ϵ'' 近傍を選ぶとすれば，その場合も背理法の仮定からその中に $F_P^*(\xi'', \omega'') = 0$ を満たす ξ'' と ω'' があることになる。以下

(37) 脚注 (30) 参照。

同じ議論を繰り返していくとすれば，いずれも均衡条件を満たす $(\xi',\omega'),(\xi'',\omega''),\cdots$ という点列が限りなくとれることになるから，いまそれを $\{(\xi^\nu,\omega^\nu)\},\nu=1,2,\cdots$ と書くことにしよう。するとつぎに述べるような推論をつうじて，この点列はかならず収束する部分列をもつことが分かる。まず ω^ν はその作り方から $\bar{\omega}$ に収束する。つぎに $\xi^\nu=(x^\nu,\lambda^\nu,z^\nu,\bar{p}^\nu,q^\nu)$ の x^ν についてみると，$x^{i\nu}$ は集合

$$\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\left\{x^i\in R_{++}^{L(S+1)}|u^i(x)\geqq u^i(\omega^{i\nu})\text{ かつ }x^i\leqq\sum_{i=1}^{I}\omega^{i\nu}\right\}$$

の中を動くが，ω^ν が $\bar{\omega}\in R_{++}^{L(S+1)}$ に収束しているので，この集合は $R_{++}^{L(S+1)}$ のあるコンパクト集合に含まれることが分かる。したがって $\{x^{i\nu}\}$ は $R_{++}^{L(S+1)}$ のある点に収束する部分列をもつ。以下記号が煩雑になるので，$\{x^{i\nu}\}$ のこの部分列そのものを $\{x^{i\nu}\}$ と書いてしまうことにする。するとつぎに λ^ν については価値尺度財 $\ell=1$ に関する均衡条件から

$$\frac{\partial u^i(x^{i\nu})}{\partial x_{10}^i}=\lambda_0^{i\nu}$$
$$\frac{\partial u^i(x^{i\nu})}{\partial x_{11}^i(s)}=\lambda_1^i(s)^\nu,\ s=1,\cdots,S$$

が成り立っており，ここで u^i の偏導関数は連続，そして $\{x^{i\nu}\}$ は収束するので，$\{\lambda^{i\nu}\}$ もまた R_{++}^{S+1} のある点に収束することが分かる。つぎに $\bar{p}^\nu$ についてみると，$\ell\neq1$ の財の均衡条件として

$$0<\frac{\partial u^i(x^{i\nu})}{\partial x_{\ell0}^i}=\lambda_0^{i\nu}\bar{p}_{\ell0}^\nu,\ \ell=2,\cdots,L$$
$$0<\frac{\partial u^i(x^{i\nu})}{\partial x_{\ell1}^i(s)}=\lambda_1^i(s)^\nu\bar{p}_{\ell1}^\nu(s),\ \ell=2,\cdots,L,\ s=1,\cdots,S$$

が成り立っているから $\{x^{i\nu}\}$，$\{\lambda^{i\nu}\}$ が収束すれば，$\{\bar{p}^\nu\}$ もまた $R_{++}^{(L-1)(S+1)}$ のある点に収束する。つぎに q^ν については

$$\lambda_0^{i\nu}q_j^\nu=\lambda_1^i(1)V^j(1)+\cdots+\lambda_1^i(S)V^j(S),\ j=1,\cdots,J$$

であるところから，$\{\lambda^{i\nu}\}$ が収束すれば q^ν が収束することも，これまた明らか。最後に z^ν については，rank $V=J$ であるところから，$x^\nu,\bar{p}^\nu,q^\nu,\omega^\nu$ が与えられれば z^ν も一意に定まるので，予算制約式

$$\bar{p}_0^{\nu'}(x_0^{i\nu}-\omega_0^{i\nu})=-q^{\nu'}z^{i\nu}$$
$$\bar{p}_1(1)^{\nu'}(x_1^i(1)^\nu-\omega_1^i(1)^\nu)=V^1(1)z_1^{i\nu}+\cdots+V^J(1)z_J^{i\nu}$$
$$\vdots$$
$$\bar{p}_1(S)^{\nu'}(x_1^i(S)^\nu-\omega_1^i(S)^\nu)=V^1(S)z_1^{i\nu}+\cdots+V^J(S)z_J^{i\nu}$$

により，$\{x^\nu\},\{\bar{p}^\nu\},\{q^\nu\},\{\omega^\nu\}$ が収束すれば，$\{z^\nu\}$ もやはり収束することがいえる。これで $\{\xi^\nu,\omega^\nu\}$ はすべて均衡条件 $F_P^*(\xi^\nu,\omega^\nu)=0$ を満たしつつ $M\times\Omega^*$ の点 $(\bar{\xi},\bar{\omega})$ に収束する部分列をもつことが明らかとなった。ところが $\bar{\omega}\in\Omega^*$ であることより $F_P^*(\bar{\xi},\bar{\omega})=0$ は満たされないはずであるから，明らかにこれは矛盾である。よって背理法の仮定は成り立たず，Ω^* は開集合となることが示された。証了。

9

以上のところで，価値尺度財資産モデルの場合について資産市場均衡配分は生成的にパレート最適条件を満たしえないことが明らかにされたので，つぎは名目資産モデルの場合をとり上げ，この場合もまた若干の事情の相違を考慮に入れれば，やはり同様の帰結が成り立ちうることを証明しよう。(38)

定理 4　収益行列 V をもつ名目資産モデルを考え，そこで $J<S$ かつ $(S-J)(I-1)\geqq S$ とすれば，Ω の開かつフル・メジャーの部分集合 Ω^* が存在して，すべての $\omega\in\Omega^*$ に対してその経済 $E(V)$ のすべての資産市場均衡 $((x^*,z^*),(\bar{p}^*,q^*))$ の均衡配分 x^* はパレート最適にはなりえない。

証明

名目資産モデルの場合，価値尺度財資産モデルの場合と相違が生じるのは，価格が何個基準化できるかという点で，価値尺度財資産モデルの場合は前に見たように $\bar{p}_{10}=\bar{p}_{11}(1)=\cdots=\bar{p}_{11}(S)=1$ と $(S+1)$ 個の価格が基準化できたのに対して，名目資産モデルの場合は $\bar{p}_{10}=\bar{p}_{11}(1)=1$ とたかだか 2 個の価格しか基準化できないのである。これは，価値尺度資産モデルの場合，予算制約式が

$$
\begin{aligned}
&\bar{p}_0{}'x_0^i-\bar{p}_0{}'\omega_0^i=-q'z^i\\
&\bar{p}_1(1)'x_1^i(1)-\bar{p}_1(1)'\omega_1^i(1)=\bar{p}_{11}(1)(A_1^1(1)z_1^i+\cdots+A_1^J(1)z_J^i)\\
&\qquad\vdots\\
&\bar{p}_1(S)'x_1^i(S)-\bar{p}_1(S)'\omega_1^i(S)=\bar{p}_{11}(S)(A_1^1(S)z_1^i+\cdots+A_1^J(S)z_J^i)
\end{aligned}
$$

と書け，したがってこれらの式の両辺をそれぞれ $\bar{p}_{10},\bar{p}_{11}(1),\cdots,\bar{p}_{11}(S)$ で割っても $\dfrac{q}{\bar{p}_{10}}$ を新たな q と再定義すれば，もとの予算集合を不変に保つことができるが，一方名目資産モデルの場合は予

(38)　この定理およびその証明については，A. Villanacci *et al, op.cit.*, p.422 の Theorem 3 と Proof を参照。

算制約式

$$\begin{aligned}
&\bar{p}_0{}'x_0^i - \bar{p}_0{}'\omega_0^i = -q'z^i \\
&\bar{p}_1(1)'x_1^i(1) - \bar{p}_1(1)'\omega_1^i(1) = V^1(1)z_1^i + \cdots + V^J(1)z_J^i \\
&\qquad\qquad\vdots \\
&\bar{p}_1(S)'x_1^i(S) - \bar{p}_1(S)'\omega_1^i(S) = V^1(S)z_1^i + \cdots + V^J(S)z_J^i)
\end{aligned}$$

の第 1 式を $\bar{p}_{10}$ で，第 2 式以下をすべて $\bar{p}_{11}(1)$ で割って，$q\dfrac{\bar{p}_{11}(1)}{\bar{p}_{10}}$ を新たな q，$\dfrac{z_j^i}{\bar{p}_{11}(1)}$ を新たな z_j^i と再定義することが予算集合を不変に保つ精一杯の基準化であり，それより多い価格を基準化することは不可能だからである。ということは，価格の基準化をつうじて価値尺度財資産モデルの場合は未知数を $(S+1)$ 個減らせるが，名目資産モデルの場合はそれを 2 個しか減らせないことを意味している。他方ワルラス法則をつうじて方程式の数を $(S+1)$ 個減らせることは両者のモデルで変わりはないから，結局名目資産モデルの均衡方程式は，上述の基準化を採用すると，見かけは前節 (19) ～ (21) の均衡方程式 $F(\xi,\omega)=0$ と同じになるが，その本数は未知数 ξ の数より $(S+1)-2=(S-1)$ 個だけ少なくなってしまうことになる。ゆえに $F(\xi,\omega)=0$ にさらにパレート最適条件の一部を加えて，方程式の数のほうが少なくとも 1 個超過するという前に準じた帰結を得るためには，加えるべき式の数が少なくとも $(S-1)+1=S$ 個なくてはならないのである。

そこでそのような目的に役立ちうるパレート最適の条件数が何個ありうるかを調べてみると，前記効用最大化の 1 階条件から，λ^i は各主体 i ごとに

$$\lambda^i \begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix} = 0$$

という条件，すなわちバラして書けば

$$\begin{aligned}
\lambda_0^i q_1 &= \lambda_1^i(1)V^1(1) + \cdots + \lambda_1^i(S)V^1(S) \\
\lambda_0^i q_2 &= \lambda_1^i(1)V^2(1) + \cdots + \lambda_1^i(S)V^2(S) \\
&\vdots \\
\lambda_0^i q_J &= \lambda_1^i(1)V^J(1) + \cdots + \lambda_1^i(S)V^J(S)
\end{aligned}$$

という J 個の条件を満たさなくてはならないから，各 i についてそのような λ^i 個の数は J 個自由度が減って $(S+1)-J$ 個となり，しかも λ^i は比率のみが問題となるから，さらに自由度はもう 1 個減って $(S-J)$ 個となる。よってパレート最適条件

$$\begin{aligned}
\lambda_0^i - \lambda_1^i(1)\frac{\lambda_0^1}{\lambda_1^1(1)} &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda_0^i - \lambda_1^i(S)\frac{\lambda_0^1}{\lambda_1^1(S)} &= 0
\end{aligned}$$

の中で，上記の目的のために利用できる最大限の個数は $(S-J)(I-1)$ 個であるということになる。

一方，前記のように均衡がパレート最適にはならないことを示すには，少なくとも S 個の式を加えねばならないから，所期の目的を達成するには

$$(S-J)(I-1) \geqq S$$

となっているのでなくてはならず，したがって名目資産モデルの場合はこの条件が仮定されねばならないのである。(39)

上記のところを考慮に入れると，目下の名目資産モデルで考えるシステムは，

$$F(\xi, \omega)=0$$

に

$$\begin{gathered} \lambda_0^i - \lambda_1^i(1)\frac{\lambda_0^1}{\lambda_1^1(1)} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_0^i - \lambda_1^i(S-J)\frac{\lambda_0^1}{\lambda_1^1(S-J)} = 0 \\ i = 2, \cdots, I \end{gathered}$$

を加えたものとなり，それが解をもたないような開かつフル・メジャーの Ω^* が存在することを示すのが以下での課題となる。

前節の記号に倣い，このシステム全体を

$$F_P^{**}(\xi, \omega)=0$$

であらわし，そのヤコービ行列 Q^{**} を求めると，それはつぎのページに掲げるようなものになる。Q^{**} はつぎの 2 点において前の価値尺度財モデルのヤコービ行列 Q^* と相違していることに注意されたい。まず各主体 i の λ^i に関する効用最大化条件を $\mathring{\omega}^i$ で偏微分したブロックが Q^* では I となっていたのがここでは $\Phi(\mathring{p})$ となっており，ここで

$$\Phi(\mathring{p}) = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \bar{p}_{11}(2) & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \bar{p}_{11}(S) \end{bmatrix}$$

(39) $(S-J)(I-1) \geqq S$ という条件は変形すると $J \leqq S\dfrac{I-2}{I-1}$ となるから，不完備性の条件 $J<S$ を多少とも強めたものと解することができよう。人数 I が多くなれば，それはますます不完備性の条件に近づくことになろう。

$$
Q^{**} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
x^1 & \lambda^1 & z^1 & x^2 & \lambda^2 & z^2 & \cdots\cdots & x^I & \lambda^I & z^I & \hat{\bar{p}} \;\; q & \hat{\omega}^1 & \mathring{\omega}^1 & \hat{\omega}^2 & \mathring{\omega}^2 & \cdots\cdots & \hat{\omega}^I & \mathring{\omega}^I
\end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccccc|c|ccccccc}
D^2u^1 & -\Phi(\bar{p})' & 0 & & & & & & & & & 0 & 0 & & & & & \\
-\Phi(\bar{p}) & 0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\ V\end{smallmatrix}\right] & & 0 & & \cdots\cdots & & 0 & & * & \Phi(\hat{\bar{p}}) & \Phi(\mathring{\bar{p}}) & 0 & & \cdots\cdots & 0 & \\
0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\ V\end{smallmatrix}\right]' & 0 & & & & & & & & \vdots & 0 & 0 & & & & & \\
 & & & D^2u^2 & -\Phi(\bar{p})' & 0 & & & & & & & & 0 & 0 & & & \\
 & 0 & & -\Phi(\bar{p}) & 0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\ V\end{smallmatrix}\right] & & & \vdots & & * & 0 & & \Phi(\hat{\bar{p}}) & \Phi(\mathring{\bar{p}}) & \cdots\cdots & 0 & \\
 & & & 0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\ V\end{smallmatrix}\right] & 0 & & & & & & & & 0 & 0 & & & \\
 & \vdots & & & \vdots & & \ddots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \\
 & & & & & & & D^2u^I & -\Phi(\bar{p})' & 0 & & & & & & & 0 & 0 \\
 & 0 & & & 0 & & \cdots\cdots & -\Phi(\bar{p}) & 0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\ V\end{smallmatrix}\right] & * & 0 & & 0 & & \cdots\cdots & \Phi(\hat{\bar{p}}) & \Phi(\mathring{\bar{p}}) \\
 & & & & & & & 0 & \left[\begin{smallmatrix}-q\\ V\end{smallmatrix}\right]' & 0 & & & & & & & 0 & 0 \\
\hline
\hat{I} & 0 & 0 & \hat{I} & 0 & 0 & \cdots\cdots & \hat{I} & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & -I & 0 & \cdots\cdots & -I & 0 \\
\hline
0 & 0 & I & 0 & 0 & I & \cdots\cdots & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\
\hline
 & & & 0 & [1\ D_2\ 0] & 0 & & & 0 & & & & & & & & & \\
0 & * & 0 & & 0 & & \ddots & & 0 & & 0 & 0 & & 0 & & \cdots\cdots & 0 & \\
 & & & & 0 & & & 0 & [1\ D_I\ 0] & 0 & & & & & & & &
\end{array}\right]
\end{array}
$$

である。これはいうまでもなく，価値尺度財資産モデルでは $\bar{p}_{10}$，$\bar{p}_{11}(1)$，$\cdots$，$\bar{p}_{11}(S)$ のすべてが基準化されえたのに対して，名目資産モデルでは $\bar{p}_{10}$，$\bar{p}_{11}(1)$ の 2 個のみが基準化されるにすぎないからである。つぎの相違点はパレート最適条件に対応する部分であって，Q^* の場合は当該部分が主体 I に関連する 1 個の行のみから成っていたのに対して，Q^{**} の場合は $(S-J)(I-1)$ 個の行から成っていることである。これは前回付加された最適条件が

$$\lambda_0^I - \lambda_1^I(1)\frac{\lambda_0^1}{\lambda_1^1(1)} = 0$$

の 1 個であったのに対して，今回付加される最適条件は上記の $(S-J)(I-1)$ 個となるからである。これらの条件を各変数で偏微分した結果を詳しく書けば，つぎのページの B 行列のごとくであり，前掲ヤコービ行列中，B 部分に含まれる $[1\ D_i\ 0]$ はすべての $i=2,\cdots,I$ をつうじて

$$\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{\lambda_0^1}{\lambda_1^1(1)} & & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \qquad \vdots \\ 1 & 0 & & -\dfrac{\lambda_0^1}{\lambda_1^1(S-J)} & 0 \cdots\cdots 0 \end{bmatrix}$$

を意味している。

さて，示したいことは，新たなヤコービ行列 Q^{**} がやはりフル・ランクになること，すなわち rank $Q^{**} = (L(S+1)+(S+1)+J)I+(L-1)(S+1)+J+(S-J)(I-1)$ になること，である。これを示すための手順としては，前回と同様 Q^{**} を各主体の効用最大化条件，財市場の需給均衡条件，資産市場の需給均衡条件にかかわる A 部分と，付加されたパレート最適条件にかかわる B 部分とに分け，さらに B 部分を $B_i, i=2,\cdots,I$ の各部分に分割して，まずは $\begin{bmatrix} A \\ B_2 \end{bmatrix}$ がフル・ランクになることから示していく。

目下の場合の A は $\mathring{\omega}^i$ にかかわる列に前回含まれた I ブロックが $\Phi(\mathring{p})$ ブロックとなっている点を除けば，まったく前回ステップ 3 の場合の A と同じである。そして上記の相違点はランクの計算にはまったく影響しないから，A のランクは前と同様 $(L(S+1)+(S+1)+J)I+(L-1)(S+1)+J$ となり，これが補題 6 の n に該当する。また補題 6 の m が $L(S+1)-(S+1)+J+((L-1)(S+1)+(S+1))I$ である点にも変わりはなく，一方現在の k は $S-J$ であるから，$k \leqq m$ となることも自明である。よって補題の二つの仮定は目下の場合もいずれながら満たされており，したがって前と同様その帰結が使えて，$\begin{bmatrix} A \\ B_2 \end{bmatrix}$ がフル・ランクになることを示すには，

$$\begin{bmatrix} A \\ B_2 \end{bmatrix} Z^* = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{S-J} \end{bmatrix}$$

となるような Z^* があることを示せばよいのである。

$$
B = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
x^1\,\lambda^1\,z^1 & x^2 & \lambda_0^2 & \lambda^2_{1(1)} \;\cdots\cdots\; \lambda^2_{1(S-J)} & \lambda^2_{1(S-J+1)} \cdots \lambda^2_{1(S)} & z^2 & & x^I & \lambda_0^I & \lambda^I_{1(1)} \;\cdots\cdots\; \lambda^I_{1(S-J)} & \lambda^I_{1(S-J+1)} \cdots \lambda^I_{1(S)} & z^I \;\; \cdots
\end{array} \\
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
0 & 0 & \begin{matrix}1\\ \vdots \\ 1\end{matrix} & \begin{matrix} -\frac{\lambda_0^1}{\lambda^1_{1(1)}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\frac{\lambda_0^1}{\lambda^1_{1(S-J)}} \end{matrix} & 0 & 0 & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & 0 & \begin{matrix}1\\ \vdots \\ 1\end{matrix} & \begin{matrix} -\frac{\lambda_0^1}{\lambda^1_{1(1)}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\frac{\lambda_0^1}{\lambda^1_{1(S-J)}} \end{matrix} & 0 & &
\end{array}\right]
\end{array}
$$

いまそうした Z^* の候補としては次ページの Z^* のような形のものを考え，その $Z_1^* \sim Z_5^*$ の部分をつぎのような要領でつくってみる。まず Z_1^* の部分であるが，前記の B 行列から

$$D_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{\lambda_0^1}{\lambda_1^1(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\dfrac{\lambda_0^1}{\lambda_1^1(S-J)} \end{bmatrix}$$

であり，当然それは正則であるから，

$$Z_1^* = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & D_2^{-1} & \end{bmatrix}$$

のように Z_1^* を求めることができる。つぎに Z_2^* は，A の中の $\begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix}'$ の部分を

$$\begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix}' = \left[\begin{array}{c|ccc|ccc} -q_1 & V^1(1) & \cdots & V^1(S-J) & V^1(S-J+1) & \cdots & V^1(S) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -q_J & V^J(1) & \cdots & V^J(S-J) & V^J(S-J+1) & \cdots & V^J(S) \end{array}\right]$$
$$= [-q \;\; V_{\mathrm{I}} \;\; V_{\mathrm{II}}]$$

と分けて書き，上で求めた Z_1^* を用いて

$$Z_2^* = -V_{\mathrm{II}}^{-1}[-q \; V_{\mathrm{I}}]Z_1^*$$

のようにつくる。Z_3^* はいま求めた Z_1^*, Z_2^* を用い，また A. 3. 2 の（4）より一般性を失うことなく D^2u^2 が正則になると考えてよいことを想起して(40)

$$Z_3^* = (D^2u^2)^{-1}\Phi(\bar{p})' \begin{bmatrix} Z_1^* \\ Z_2^* \end{bmatrix}$$

のようにつくる。そして Z_4^* は

$$Z_4^* = \hat{I} Z_3^*$$

とする。最後に Z_5^* はこれら Z_3^*, Z_4^* を用いて

$$Z_5^* = \Phi(\mathring{p})^{-1}(\Phi(\bar{p})Z_3^* - \Phi(\hat{p})Z_4^*)$$

のようにつくる。

（40） 脚注（36）参照。

$$
Z^* = \left[\begin{array}{c}
0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline
Z_3^* \\ \hline
\\ Z_1^* \\ \\ \hline
\\ Z_2^* \\ \\ \hline
0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline
0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline
0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline
Z_4^* \\ \hline
Z_5^* \\ \hline
0 \\ \vdots \\ 0
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\left.\left]\begin{array}{l} x^1 \\ \lambda^1 \\ z^1 \end{array}\right.\right\} L(S+1)+(S+1)+J \\
\left.\right] x^2 \cdots L(S+1) \\
\left.\left]\begin{array}{l} \lambda_0^2 \\ \vdots \\ \lambda_{S-J}^2 \end{array}\right.\right\} S-J+1 \\
\left.\left]\begin{array}{l} \lambda_{S-J+1}^2 \\ \vdots \\ \lambda_S^2 \end{array}\right.\right\} J \\
\left.\left]\begin{array}{l} z^2 \\ \vdots \\ z^I \end{array}\right.\right\} (L(S+1)+(S+1)+J)(I-2)+J \\
\left.\left]\begin{array}{l} \hat{\hat{p}} \\ \\ q \end{array}\right.\right\} L(S+1)-(S+1)+J \\
\left.\left]\begin{array}{l} \hat{\omega}^1 \\ \\ \mathring{\omega}^1 \end{array}\right.\right\} L(S+1) \\
\left.\right] \hat{\omega}^2 \cdots (L-1)(S+1) \\
\left.\right] \mathring{\omega}^2 \cdots S+1 \\
\left.\left]\begin{array}{l} \hat{\omega}^3 \\ \vdots \\ \mathring{\omega}^I \end{array}\right.\right\} L(S+1)(I-2)
\end{array}
$$

すると以上のように Z_1^* から Z_5^* までをつくれば，そのそれぞれのつくり方から

$$
\begin{aligned}
& D^2u^2Z_3^* - \Phi(\bar{p})' \begin{bmatrix} Z_1^* \\ Z_2^* \end{bmatrix} = 0 \\
& -\Phi(\bar{p})'Z_3^* + \Phi(\hat{p})Z_4^* + \Phi(\mathring{p})Z_5^* = 0 \\
& [-q \ V'] \begin{bmatrix} Z_1^* \\ Z_2^* \end{bmatrix} = 0 \\
& \hat{I}Z_3^* - IZ_4^* = 0 \\
& \begin{bmatrix} 1 & \\ \vdots & D_2 \\ 1 & \end{bmatrix} Z_1^* = I_{S-J}
\end{aligned}
$$

となることがただちに分かり，$\begin{bmatrix} A \\ B_2 \end{bmatrix} Z^* = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{S-J} \end{bmatrix}$ を満たす Z^* がつくられたことが明らかとなる。よって補題 6 の主張から $\begin{bmatrix} A \\ B_2 \end{bmatrix}$ はフル・ランクをもつこと，すなわち rank $\begin{bmatrix} A \\ B_2 \end{bmatrix} = (L(S+1)+(S+1)+J)I+(L-1)(S+1)+J+(S-J)$ となることが導かれる。以下 $B_3, \cdots, B_I$ についても同様のことを繰り返していけば，Q^{**} がフル・ランクになることが示されるのである。

これで価値尺度財資産モデルの場合と同様，横断性定理の仮定が満たされることになったので，その帰結からあるフル・メジャーの $\Omega^* \subset \Omega$ が存在して，どんな $\omega \in \Omega^*$ をとっても，そこでの資産市場均衡配分はパレート最適条件を満たしえないことになる[41]。また $F_P^{**}(\xi, \omega) = 0$ を満たす (ξ, ω) の点列が収束部分列をもつという推論も前の定理の証明の最後の部分と同様に行いうるので，Ω^* が開集合となることについても同様である。証了。

10

最後に一般の実物資産モデルの場合をとり上げることにしたい。実物資産モデルでは収益行列 V が価格ベクトル $\bar{p}$ と実物収益行列 A とに分解されるから，V そのものはもはやファンダメンタルスとしての与件の資格を失って $\bar{p}$ に依存し，入れ代って A がファンダメンタルスとなる。ω の集合を Ω としたのに準じて，以下では A の集合を $\mathscr{A}$ と表記し，$\Delta \equiv \Omega \times \mathscr{A}$ と定義することにする。すると，ここでもやはり上記の相違から生じる問題点を考慮に入れて，若干推論法に工夫を凝らすことにより，つぎの定理の成立を示すことができよう。

---

(41) 資産市場均衡の存在については，A. Villanacci *et al, op.cit.*, p.330 の Theorem 8 を見よ。

定理５　実物資産モデルにおいて $J < S$ であるとする。そのとき Δ の開かつフル・メジャーの部分集合 Δ^* が存在して，$(\omega, A) \in \Delta^*$ となるどの (ω, A) に対しても経済 $E(A)$ の資産市場均衡配分 x^* はパレート最適にはなりえない。

証明

証明の基本方針は，前二つの定理の場合と同様，当面の経済の均衡方程式を列挙し，それにパレート最適性の必要条件をつけ加えた方程式システムが生成的に解をもたないことを示す点にある。

まず手始めに実物資産モデルではどのような価格の基準化が可能であるかを見ることにすれば，ここでの予算制約式は

$$\begin{aligned}
&\bar{p}_0{}'(x_0^i - \omega_0^i) = -q' z^i \\
&\bar{p}_1(1)'(x_1^i(1) - \omega_1^i(1)) = (\bar{p}_1(1)' A^1(1), \cdots, \bar{p}_1(1)' A^J(1)) z^i \\
&\qquad\vdots \\
&\bar{p}_1(S)'(x_1^i(S) - \omega_1^i(S)) = (\bar{p}_1(S)' A^1(S), \cdots, \bar{p}_1(S)' A^J(S)) z^i
\end{aligned}$$

と書けるので，価値尺度財資産モデルの場合とまったく同じ $\bar{p}_{10} = \bar{p}_{11}(1) = \cdots = \bar{p}_{11}(S) = 1$ という基準化のできることがただちに分かる。なぜなら $(\bar{p}_0, \bar{p}_1(1), \cdots, \bar{p}_1(S), q)$ という価格の代わりに

$$\left[\frac{\bar{p}_0}{\bar{p}_{10}}, \frac{\bar{p}_1(1)}{\bar{p}_{11}(1)}, \cdots, \frac{\bar{p}_1(S)}{\bar{p}_{11}(S)}, \frac{q}{\bar{p}_{10}}\right]$$

という価格を用いても，予算集合には何ら変わるところがないからである。

したがって価値尺度財の価格を除いた価格ベクトルを前と同様 $\hat{p}$ で記せば，価格を基準化したのちの均衡方程式システムは

$$\begin{aligned}
&Du^1 - \lambda^1 \Phi(\hat{p}) = 0 \\
&-\Phi(\hat{p})(x^1 - \omega^1) + \begin{bmatrix} -q \\ V(\hat{p}) \end{bmatrix} z^1 = 0 \\
&\lambda^1 \begin{bmatrix} -q \\ V(\hat{p}) \end{bmatrix} = 0 \\
&\qquad\vdots \\
&Du^I - \lambda^I \Phi(\hat{p}) = 0 \\
&-\Phi(\hat{p})(x^I - \omega^I) + \begin{bmatrix} -q \\ V(\hat{p}) \end{bmatrix} z^I = 0 \\
&\lambda^I \begin{bmatrix} -q \\ V(\hat{p}) \end{bmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\sum_{i=1}^{I} (\hat{x}^i - \hat{\omega}^i) = 0 \tag{29}$$

$$\sum_{i=1}^{I} z^i = 0 \tag{30}$$

のように書けることになる。これは価値尺度財資産モデルの場合の (19), (20), (21) に対応するものであるが，一つだけ重要な相違点として，ここでは V が $\hat{p}$ に依存して $V(\hat{p})$ と書かれるようになったことに注意しなければならない。つまり実物資産モデルの場合の前記定理の証明にあたっては，以上に述べたところから価値尺度財資産モデルの場合と大枠において同様の証明法を適用することができるが，ただ V が事前に固定されておらず，いま述べたように $\hat{p}$ に依存するので，その点について新たに工夫する必要性が生じるのである。

その工夫というのは，価値尺度財資産モデルの場合は，(28), (29), (30) にさらにパレート最適の必要条件として

$$\lambda_1^I(1) - \frac{\lambda_1^1(1)}{\lambda_0^1}\lambda_0^I = 0 \tag{31}$$

の 1 本の式を付加したのに対して，こんどの場合は

$$\begin{aligned} \lambda_1^I(1) - \frac{\lambda_1^1(1)}{\lambda_0^1}\lambda_0^I &= 0 \\ \lambda_1^I(2) - \frac{\lambda_1^1(2)}{\lambda_0^1}\lambda_0^I &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_1^I(S) - \frac{\lambda_1^1(S)}{\lambda_0^1}\lambda_0^I &= 0 \end{aligned} \tag{32}$$

の S 本の式を全部付加したシステムを考えることにするという点である。今回 (31) をあらためて (32) にすることがなぜ前述の問題点の解決に資するかという理由は，以下論を進めるにつれてただちに明らかとなるであろう。

さて (28) ～ (30) プラス (32) が現下の方程式システムであるとすれば，その変数はパラメター (ω, A) を別として $\xi \equiv (x, \lambda, z, \hat{p}, q)$ であり，それの属する空間は $\Xi \equiv R_{++}^{L(S+1)I} \times R_{++}^{(S+1)I} \times R^{JI} \times R_{++}^{(L-1)(S+1)} \times R^J$ であらわされる。一方 (ω, A) に関しては，それらはつぎの定理に現れる Δ' から選ばれているものと想定する。

定理　Δ の開かつフル・メジャーの部分集合 Δ' が存在して，$(\omega, A) \in \Delta'$ であれば，経済 $E(A)$ のいずれの資産市場均衡 $((x^*, z^*), (\hat{p}^*, q^*))$ においても $\operatorname{rank} V(\hat{p}^*) = J$ となる。(42)

前の表記になぞらえて (28) ～ (30), (32) から成る方程式システムをまとめて

$$\begin{aligned} &F_P^{***}(\xi, \omega, A) = 0 \\ &\text{ここで}\quad (\xi, \omega, A) \in \Xi \times \Delta' \end{aligned}$$

(42)　この定理の証明については A. Villanacci *et al, op.cit.*, p.384, Theorem 29 のそれを参照されたい。なお，この Δ' は，$(\omega, A) \in \Delta'$ のときに経済 $E(A)$ の資産市場均衡がかならず存在するように選ぶことができる。

と書くことにしよう。すると以下で示されるべきわれわれの主張は，さらに

開かつフル・メジャーの $\Delta^* \subset \Delta'$ が存在して，すべての $(\omega, A) \in \Delta^*$ に対して $F_P^{***}(\xi, \omega, A) = 0$ は解をもたない。

ということとしていいあらわせる。

これを示すために，まずは $F_P^{***}(\xi, \omega, A) = 0$ を満たすどの $(\xi, \omega, A) \in \Xi \times \Delta'$ においても

$$\text{rank } DF_P^{***}(\xi, \omega, A) \geqq N + 1$$
$$N = L(S+1)I + (S+1)I + JI + (L-1)(S+1) + J$$

となることを示しておくことにしよう。

この主張の証明は，定理 3 の証明中 DF_P^* のランクを計算したときとほぼ同様に考えていけばよい。ただし価値尺度財資産モデルの場合は，前にも述べたように V が $\hat{p}^*$ から独立に固定されており，したがって V を構成する S 本の行ベクトルのうちどれが一次独立となるかを事前に指定することができた。それゆえパレート最適の必要条件として 1 個追加する条件を (32) のごとくに定めたとき，それに対応する第 1 行が J 本の一次独立な行ベクトルには含まれないように，換言すれば第 2 行から第 S 行までから一次独立な行ベクトルの組が選ばれうるように，あらかじめ状態の番号を決めておけたのであった[(43)]。ところが V が $\hat{p}^*$ に依存する現下の一般実物資産モデルの場合は，rank $V(\hat{p}^*) = J$ ということしか分かっておらず，したがって同じ (ω, A) の下でのある $\hat{p}^*$ において上記のような措置が可能であったとしても，違う $\hat{p}^*$ の下で $V(\hat{p}^*)$ そのものが変わってしまえば，J 本の一次独立なベクトルの組もまた動き，その中に第 1 行が含まれてしまう可能性を排除することができない。したがって J 本の一次独立な行ベクトルとしてどの行からなる組が選ばれようと，それ以外の $S-J$ 本の行の番号の中から追加すべき最適条件の選ばれうる余地が確保されていなくてはならないのである。

(32) のように S 個の最適条件を全部並べておくことの趣旨は，その点にある。そうしておきさえすれば，上述の問題点を思い煩うことなく，かならずその中から一次独立な行ベクトルの J 個の番号とは重複しない番号の最適条件を選ぶことができる。そこでそのような s に関する最適条件

$$\lambda_1^I(s) - \frac{\lambda_1^1(s)}{\lambda_0^1}\lambda_0^I = 0$$

を 1 個だけ追加して方程式システムをつくり，それを $\bar{F}_P^{***}(\xi, \omega, A) = 0$ と書くとすれば，それに定理 3 の証明をそのまま適用することによって

$$\text{rank } D\bar{F}_P^{***}(\xi, \omega, A) = N + 1$$

(43)　定理 3 の証明のはじめの部分を見よ。

という帰結を導くことができるのである。

上記のように重複しない番号の最適条件式を 1 個加えたときに $D\bar{F}_P^{***}(\xi,\omega,A)$ のランクはちょうど $N+1$ になるのであるから，(32) の中にそのような最適条件式がほかにも含まれているとすれば，さらに一次独立の行の数を増やしうる可能性があり，したがって

$$\text{rank } DF_P^{***}(\xi,\omega,A) \geqq N+1$$

という所望の帰結が得られることになる。S 個全部を用いたときにランクが $N+S$ になるかどうかは保証されないから，横断性定理そのものは使えないが，とりあえず上記のところさえ示されれば，以下の推論の目的には叶うのである。

すると，前稿でも用いた逆像定理の系すなわち第 7 節の系 1

$\mathscr{M}$ を多様体とし，$F:\mathscr{M}\to R^n$ は C^1 級とする。$\bar{y}\in R^n$ のとき，もしすべての $x\in F^{-1}(\bar{y})$ について rank $DF(x)\geqq\rho$ ならば，$F^{-1}(\bar{y})$ は次元が dim $\mathscr{M}-\rho$ であるような $\mathscr{M}$ の部分多様体の有限個の和集合に含まれる。

を，$\mathscr{M}$ を $\Xi\times\Delta'$ に，F を F_P^{***} に，n を $N+S$ に，ρ を $N+1$ に，x を (ξ,ω,A) に，$\bar{y}$ を 0 にそれぞれ読み換えて用いることにより，上に導いた帰結からただちに ${F_P^{***}}^{-1}(0)$ は，次元が dim $(\Xi\times\Delta')-(N+1)$ である有限個の $\Xi\times\Delta'$ の部分多様体の和集合に含まれるという結果を得ることができる。ここで当該の $\Xi\times\Delta'$ の部分多様体を $M_\alpha, \alpha=1,\cdots,m$ と記せば，

$${F_P^{***}}^{-1}(0)\subset\bigcup_{\alpha=1}^{m}M_\alpha$$

であり

$$\begin{aligned}\text{dim } M_\alpha &= N+L(S+1)I+LSJ-(N+1)\\ &= L(S+1)I+LSJ-1\end{aligned}$$

である。

そこでつぎのステップとして，$\alpha=1,\cdots,m$ のそれぞれについて，M_α から Δ' への自然な射影 $\phi_\alpha: M_\alpha\to\Delta'$ を考えることにし，それにサルドの定理を適用すれば，任意の $(\omega,A)\in\Delta_\alpha^*$ に対して (ω,A) が ϕ_α の正則値となるような Δ' のフル・メジャーの部分集合 Δ_α^* の存在することがいえる。また，定理 3 の証明の最後の部分と同様の議論を用いることによって，ϕ_α が固有（proper）な写像となることが分かるので，その正則値の集合 Δ_α^* は Δ' の開部分集合となっている。

さて (ω,A) が ϕ_α の正則値であるとは，任意の $(\xi,\omega,A)\in\phi_\alpha^{-1}(\omega,A)$ に対して，rank $D\phi_\alpha(\xi,\omega,A)=$ dim $\Delta'=L(S+1)I+LSJ$ ということにほかならない。ところが ϕ_α の定義域の次元は前に示したところから $L(S+1)I+LSJ-1$ であるから，rank $D\phi_\alpha(\xi,\omega,A)$ もまたたかだか $L(S+1)I+LSJ-1$

でしかなく，それが $L(S+1)I+LSJ$ になることは不可能である。これは $\phi_\alpha^{-1}(\omega,A)$ が空集合とならざるをえないことを意味し，結局サルドの定理による上記の帰結は

$$\phi_\alpha^{-1}(\omega,A)=\varnothing,\quad \forall(\omega,A)\in\Delta_\alpha^*$$

という帰結を生む。

あとの推論はいわば最後の仕上げであって，まず Δ^* を

$$\Delta^*=\bigcap_{\alpha=1}^{m}\Delta_\alpha^*$$

として定義する。すると Δ' が Δ の開かつフル・メジャーの部分集合であること，および Δ_α^* が Δ' の開かつフル・メジャーの部分集合であることにより，Δ^* は Δ の開かつフル・メジャーの部分集合である。そしていまかりにある $(\omega,A)\in\Delta^*$ に対して $F_P^{***}(\xi,\omega,A)=0$ が解をもちえたとすれば

$$(\xi,\omega,A)\in {F_P^{***}}^{-1}(0)\subset\bigcup_{\alpha=1}^{m}M_\alpha$$

となり，ある α に対して $(\xi,\omega,A)\in M_\alpha$ とならざるをえないが，一方 $(\omega,A)\in\Delta^*\subset\Delta_\alpha^*$ であるから，これらの帰結は前のパラグラフで得た $\phi_\alpha^{-1}(\omega,A)=\varnothing,\quad \forall(\omega,A)\in\Delta_\alpha^*$ という帰結と矛盾する。よって開かつフル・メジャーの Δ^* に属するすべての (ω,A) に対して $F_P^{***}(\xi,\omega,A)=0$ は解をもちえないということが示されたことになり，これで定理 5 の証明は完了する。

（名誉教授）
（経済学部教授）