Title	動学的一般均衡モデルにおける合理的期待均衡の頑健性
Sub Title	Robustness of rational expectations equilibrium in dynamic general equilibrium model
Author	加藤, 寛之(Kato, Hiroyuki)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2004
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.97, No.2 (2004. 7) ,p.217(45)- 230(58)
JaLC DOI	10.14991/001.20040701-0045
Abstract	本稿は一部門の動学的一般均衡モデルにおいて, 経済主体の合理的期待を仮定しない場合の定常状態の安定性について議論したものである。観察される情報に基づいた学習を考慮することで, 極限が合理的期待にならずとも定常状態の安定性が保たれ得ることを示す。 This study discusses the stability of a stationary state, for cases where rational expectations of economic agents are not assumed in the one-sector dynamic general equilibrium model. By considering the learning process based on observed information, the stability of a stationary state can be maintained even if limits do not represent rational expectations.
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20040701-0045

動学的一般均衡モデルにおける合理的期待均衡の頑健性

Robustness of Rational Expectations Equilibrium in Dynamic General Equilibrium Model

加藤 寛之(Hiroyuki Kato)

本稿は一部門の動学的一般均衡モデルにおいて，経済主体の合理的期待を仮定しない場合の定常状態の安定性について議論したものである。観察される情報に基づいた学習を考慮することで，極限が合理的期待にならずとも定常状態の安定性が保たれ得ることを示す。

Abstract

This study discusses the stability of a stationary state, for cases where rational expectations of economic agents are not assumed in the one-sector dynamic general equilibrium model. By considering the learning process based on observed information, the stability of a stationary state can be maintained even if limits do not represent rational expectations.

「三田学会雑誌」97 巻 2 号（2004 年 7 月）

動学的一般均衡モデルにおける合理的期待均衡の頑健性

加　藤　寛　之

（初稿受付 2004 年 3 月 17 日，
査読を経て掲載決定 2004 年 5 月 25 日）

要　　旨

本稿は一部門の動学的一般均衡モデルにおいて，経済主体の合理的期待を仮定しない場合の定常状態の安定性について議論したものである。観察される情報に基づいた学習を考慮することで，極限が合理的期待にならずとも定常状態の安定性が保たれ得ることを示す。

キーワード

動学的一般均衡，合理的期待，定常状態，大域的安定性，学習

1.　序

一部門の最適成長モデルは古くから，Ramsey（1928），Koopmans（1965），Cass（1966）等によって扱われ，定常状態が大域的に安定になることが知られている。それらのモデルはそれ自体としては規範的モデルであったが，その後は消費者と企業のいる分権的な一般均衡モデルとして解釈されるようになった（Becker（1980），Bewley（1982）等）。そこでは経済主体は将来の経済の状態について完全な情報を持っているとされることが多い。つまり，経済主体は無限先までの均衡価格を知っている，とされるのである。こうした考え方を一般に合理的期待という。しかしこうした考えは次のような疑問にさらされることが多かった。それは，将来の均衡価格が分かるためには需要函数と供給函数を知らねばならず，これは自分以外の嗜好や生産技術を知っているということを意味するので，一般均衡モデルが想定するような市場の分権性とは矛盾するのではないか，というものである。

本稿では，一部門の動学的一般均衡モデルにおいて，経済主体が将来の均衡価格が正確には分からない，としても合理的期待モデルにおいて定常状態であった点は大域的に安定であることを示す。

当然のことだが，間違った予想に基づいて最適問題を解くより，正しい予想に基づいて最適問題を解くほうが厚生は高い。従って経済主体は自分が得られる最大限の情報を使い，なるべく正しい

予想をしようとする。本稿では経済主体は自分の嗜好や技術以外には正確な情報はないが，過去に成立した均衡価格の流列を全て考慮して正確な経済モデルを予想しようとする。本稿はこうした学習をしながら得られる均衡資本経路に注目をする。

予想形成のあり方と定常状態の安定性の関係について論じた文献は多くあり，主に近視眼的予見にとどまる場合は定常状態には収束せずむしろ乖離していき（Tobin（1965），Nagatani（1970），Ohyama（1989）），長期的な完全予見であれば定常状態に収束する（Sargent and Wallace（1973）），とされる。しかしこれらの文献では経済主体の最適行動が考慮されていない。また，Easley and Kiefer（1988）では毎期外生的ショックがあるが，その分布が分からない最適成長モデルを考えている。しかしそこでは，ショックに対する利得関数の形は分かっている。利得関数は効用関数と生産関数の形で決まるものであるから，経済主体が自分以外の嗜好と技術を正確に知っていることを意味する。動学的一般均衡モデルにおいて合理的期待を想定しない時に，学習過程を考慮して定常状態の安定性について議論したものはあまりないようである。

この論文の構成は以下の通りである。2 節で合理的期待を仮定しない一部門の動学的一般均衡モデルを提示し，学習を考慮した均衡資本経路を定義する。3 節でその経路の定常状態への安定性を示す。4 節では反例をあげる。

2. モデル

一財を生産する代表的企業と，同一の消費者（労働者かつ資本所有者）からなるモデルを考える。消費者は労働と資本を企業に提供し，その対価として，賃金と賃貸料をもらう。K，L をそれぞれ資本，労働，$\beta \in (0,1)$ を割引因子とする。

仮定 1. 生産函数 $F(K,L)$ は $F : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ で，$\mathbb{R}^2_{++}$ 上で C^2 級かつ一次同次とする。さらに，$k \equiv K/L$，$f(k) \equiv F(K/L,1)$ としたとき，$f'(k) > 0$，$f''(k) < 0$，$f(0) = 0$，$\lim_{k\downarrow 0} f'(k) > 1/\beta$，$\lim_{k\uparrow\infty} f'(k) = 0$ とする。効用函数 u は $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ で，$\mathbb{R}_{++}$ 上で C^2 級とする。さらに，$u' > 0$，$u'' < 0$，$\lim_{x\downarrow 0} u'(x) = \infty$ とする。

代表的企業は各 $t \in \mathbb{N}$ で以下の問題を解く。

$$\Pi(\frac{w_t}{p_t}, \frac{r_t}{p_t}) \equiv \max_{K_t, L_t}[F(K_t, L_t) - \frac{w_t}{p_t}L_t - \frac{r_t}{p_t}K_t]$$

但し w_t/p_t，r_t/p_t は財で測った t における実質賃金，実質賃貸料とする。

K_t，L_t の需要を K_t^d，L_t^d とすると，これらは各 t において次のように決まる。

$$\frac{w_t}{p_t} = F_L(K_t^d, L_t^d), \qquad \frac{r_t}{p_t} = F_K(K_t^d, L_t^d)$$

消費者は各 t で以下の問題を解く。 正確な定義は後で行うが，W は消費者がその期に得られる実質収入，$\mathcal{V}_t$ は t 時点で消費者が将来に対して持っている予想に基づいて，次期に残した資本から最大限得られると期待する効用を表している。

$$\max_{c_t, k_{t+1}^s} [u(c_t) + \beta \mathcal{V}_t(k_{t+1}^s)]$$
$$\text{subject to} \qquad c_t + k_{t+1}^s \leq W(k_t^s)$$

簡単化のため労働は $\bar{L} > 0$ だけ非弾力的に供給されているとする。t 期の資本供給を K_t^s とすると，$\bar{L}$ 人が k_t^s だけ供給することから $K_t^s = \bar{L}k_t^s$ である。実質賃金 w_t/p_t と実質賃貸料 r_t/p_t は各 t で労働市場が $L_t^d = \bar{L}$，資本市場が $K_t^d = K_t^s$ で均衡するように決まる，とする。K_t^s は $t-1$ において決まるので，t においては外生である。 従って t における労働市場と資本市場では，k_t^s が所与となっているので，w_t/p_t と r_t/p_t は k_t^s によって決まる。W は一人の消費者が得る実質収入を表す，とし，以下のように定義する。

$$W(k_t^s) = \frac{w_t}{p_t}(k_t^s) + \frac{r_t}{p_t}(k_t^s)k_t^s + \pi(\frac{w_t}{p_t}(k_t^s), \frac{r_t}{p_t}(k_t^s))$$

但し

$$\pi(\frac{w_t}{p_t}(k_t^s), \frac{r_t}{p_t}(k_t^s)) = \Pi(\frac{w_t}{p_t}(k_t^s), \frac{r_t}{p_t}(k_t^s))/\bar{L}.$$

W を収入函数と呼ぶことにする。F の一次同次性から $W(k_t^s) = f(k_t^s)$ であることに注意する。$\frac{w_t}{p_t}(k_t^s)$ と $\frac{r_t}{p_t}(k_t^s)$ の函数の形状は以下の情報を含んでいる。

$$k_t^s \mapsto K_t^s \mapsto (\frac{w_t}{p_t}, \frac{r_t}{p_t}).$$

最初の対応は，自分以外の消費者がどれだけ資本を提供するか，二つめの対応は企業の要素需要関数の形がどうであるか，という情報を含んでいる。消費者はこうした函数形を正確には分からないとする。消費者は $W(\cdot)$ の形を今までの観測し得た情報から推測する。一人の消費者が，t 期に観測し得るものとは，$k_t^s \mapsto W(k_t^s)$ の関係，つまり本当の $W(\cdot)$ の形（ここでは $f(\cdot)$）のうち実際に実現した，$(k_\tau^s, f(k_\tau^s))$ $\tau = 1, 2, \cdots, t$ という t 個の点のみである。以下で具体的に消費者行動を定式化する。ここで，$k^* > 0$, $k_H > 0$ をそれぞれ，

$$f'(k^*) = \frac{1}{\beta}, \quad f(k_H) = k_H$$

と定義する。仮定 1 よりこれらの存在と一意性，さらに $0 < k^* < k_H$ は明らかである。

定義．$\{k_t\}_{t=1}^{\infty}$ が実行可能経路とは，$c_t + k_{t+1} \le f(k_t), t \in \mathbb{N}$ となる $c_t \ge 0, t \in \mathbb{N}$ が存在することをいう。

注．$\{k_t\}_{t=1}^{\infty}$ を任意の実行可能経路とする。$k_1 \in [0, k_H]$ なら，　$k_t \in [0, k_H]$ が全ての $t \in \mathbb{N}$ でいえる。

消費者が予想する収入函数の全体として，以下の集合を考える。

$$\Phi = \{W \in C^2([0,\xi],[0,\xi]) \mid W(0) = 0, W' \ge 0, -a \le W'' \le 0\}$$

ここで $-a < 0$ はこの集合に一様な下限で，ξ は $\xi > k_H$ となる任意の値とする。$(\Phi, \|\cdot\|_{C^2})$ は可分な Banach 空間の閉部分集合となる。但し $\|W\|_{C^2} = \max_{x\in[0,\xi]} |W(x)| + \max_{x\in[0,\xi]} |W'(x)| + \max_{x\in[0,\xi]} |W''(x)|$ とする。Φ のボレル σ-集合族を $\mathcal{B}(\Phi)$ と書く。$V : \Phi \times [0,\xi] \to \mathbb{R}$ を以下のように定義する。

$$V(W, x) = \max_{\{y_1, y_2, \cdots\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{t-1} u(W(y_t) - y_{t+1}).$$

但し，$y_0 = x$ である。

u，W はそれぞれ強凹，凹函数で，コンパクト区間 $[0,\xi]$ 上の連続函数であること，また $[0,\xi]^{\infty}$ は直積位相についてコンパクトであることから以下のことがいえる。

命題 1.

連続性:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t)$$

は $\mathbb{R}^{\infty}$ 上の直積位相について連続である。

存在: 最適問題

$$\max_{\{k_2, k_3, \cdots\}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(W(k_t) - k_{t+1})$$

は，各初期値 $k_1 \in [0,\xi]$ に対して一意的な最適解を持つ。

補題 1. $V(\cdot, x)$ は各 $x \in [0,\xi]$ で連続である。

（証明）$W_n,\ W\in\Phi$ を，$\|\cdot\|_{C^2}$ で，$W_n\longrightarrow W\ (n\to\infty)$ となるものとする。$x\in[0,\xi]$ を任意に選ぶ。各 n における最適解を次のように書く。

$(y_1^n(x),y_2^n(x),\cdots y_i^n(x),\cdots)$
$=\arg\max_{y_1,y_2,\cdots}[u(W_n(x)-y_1)+\beta u(W_n(y_1)-y_2)+\beta^2u(W_n(y_2)-y_3)+\cdots],$
$(y_1(x),y_2(x),\cdots y_i(x),\cdots)$
$=\arg\max_{y_1,y_2,\cdots}[u(W(x)-y_1)+\beta u(W(y_1)-y_2)+\beta^2u(W(y_2)-y_3)+\cdots].$

$y_1^n(x)\in[0,\xi]$ なので，$\{n\}$ の部分列をとって，それを $\{n_1\}$ と書くとすると，$y_1^{n_1}(x)\to y_1^*(x)$ $(n_1\to\infty)$ とできる。$y_2^{n_1}(x)\in[0,\xi]$ なので，$\{n_1\}$ の部分列をとって，それを $\{n_2\}$ と書くことにすると，$y_2^{n_2}(x)\to y_2^*(x)\ (n_2\to\infty)$ とできる。従って，任意の $i\geq 3$ について， 帰納的に $\{n_{i-1}\}$ の部分列をとって，それを $\{n_i\}$ と書くことにすれば，$y_i^{n_i}(x)\to y_i^*(x)\ (n_i\to\infty)$ とできることが分かる。n_i のなかで i 番目の番号を全ての i についてとり続けたものを $\{n'\}$ と書くことにすると（カントールの対角線論法），構成の仕方より， $y_i^{n'}(x)\to y_i^*(x)\ (n'\to\infty)$ が全ての i についていえる。つまり $(y_1^{n'}(x),y_2^{n'}(x),\cdots,y_i^{n'}(x),\cdots)\longrightarrow(y_1^*(x),y_2^*(x),\cdots,y_i^*(x),\cdots)\ (n'\to\infty)$ が（各 i の）各点収束でいえたことになる。

$W_{n'}$ は W に一様に収束していることと，W の連続性から，
$\left|\{W_{n'}(y_i^{n'}(x))-y_{i+1}^{n'}(x)\}-\{W(y_i^*(x))-y_{i+1}^*(x)\}\right|$
$\leq\left|W_{n'}(y_i^{n'}(x))-W(y_i^*(x))\right|+\left|y_{i+1}^{n'}(x)-y_{i+1}^*(x)\right|$
$\leq\left|W_{n'}(y_i^{n'}(x))-W(y_i^{n'}(x))\right|+\left|W(y_i^{n'}(x))-W(y_i^*(x))\right|+\left|y_{i+1}^{n'}(x)-y_{i+1}^*(x)\right|$
$\leq\left\|W_{n'}-W\right\|_{C^2}+\left|W(y_i^{n'}(x))-W(y_i^*(x))\right|+\left|y_{i+1}^{n'}(x)-y_{i+1}^*(x)\right|$
$\longrightarrow 0\ (n'\to\infty)$ が任意の i についていえる。$\sum_{t=1}^{\infty}\beta^{t-1}u(c_t)$ が直積位相について連続であることと，$\{W_{n'}(y_i^{n'}(x))-y_{i+1}^{n'}(x)\}\longrightarrow\{W(y_i^*(x))-y_{i+1}^*(x)\}$ がすべての i についていえることから，
$u(W_{n'}(x)-y_1^{n'}(x))+\beta u(W_{n'}(y_1^{n'}(x))-y_2^{n'}(x))+\beta^2u(W_{n'}(y_2^{n'}(x))-y_3^{n'}(x))+\cdots$
$\quad\longrightarrow u(W(x)-y_1^*(x))+\beta u(W(y_1^*(x))-y_2^*(x))+\beta^2u(W(y_2^*(x))-y_3^*(x))+\cdots$
$(n'\to\infty)$ $(*)$ がいえる。

後は $(y_1(x),y_2(x),\cdots)=(y_1^*(x),y_2^*(x),\cdots)$ であること，つまり，
$u(W(x)-y_1^*(x))+\beta u(W(y_1^*(x))-y_2^*(x))+\beta^2u(W(y_2^*(x))-y_3^*(x))+\cdots$
$\qquad\geq u(W(x)-y_1)+\beta u(W(y_1)-y_2)+\beta^2u(W(y_2)-y_3)+\cdots$
が，任意の実行可能経路 $\{y_1,y_2,y_3\cdots\}$ についていえることを示せばよい。

今 $\{y_1,y_2,y_3,\cdots\}$ を勝手な実行可能経路とする。$\{y_1^n,y_2^n,y_3^n,\cdots\}$ を W_n において実行可能な経路で $\{y_1,y_2,y_3,\cdots\}$ に各点で収束するようにとる。すると，

$$u(W_{n'}(x)-y_1^{n'}(x))+\beta u(W_{n'}(y_1^{n'}(x))-y_2^{n'}(x))+\beta^2 u(W_{n'}(y_2^{n'}(x))-y_3^{n'}(x))+\cdots$$
$$\geq u(W_{n'}(x)-y_1^{n'})+\beta u(W_{n'}(y_1^{n'})-y_2^{n'})+\beta^2 u(W_{n'}(y_2^{n'})-y_3^{n'})+\cdots,$$

が成立している。$\sum_{t=1}^{\infty}\beta^{t-1}u(c_t)$ の連続性から，

$$u(W(x)-y_1^*(x))+\beta u(W(y_1^*(x))-y_2^*(x))+\beta^2 u(W(y_2^*(x))-y_3^*(x))+\cdots$$
$$\geq u(W(x)-y_1)+\beta u(W(y_1)-y_2)+\beta^2 u(W(y_2)-y_3)+\cdots。$$

$\{y_1,y_2,y_3,\cdots\}$ は任意なので，$(y_1(x),y_2(x),\cdots)=(y_1^*(x),y_2^*(x),\cdots)$ がいえた。従って，$(*)$ から，$V(W_{n'},x)\longrightarrow V(W,x)$ $(n'\to\infty)$ である。

今，$V(W_n,x)\nrightarrow V(W,x)$ とする。 部分列 $\tilde{n}$ を選んで，$\left|V(W_{\tilde{n}},x)-V(W,x)\right|\geq\varepsilon$ が，適当な $\varepsilon>0$ で成立する。 前の議論と同様にして，$\tilde{n}$ の更なる部分列をとって，それを $\tilde{\tilde{n}}$ と書くと，$V(W_{\tilde{\tilde{n}}},x)\to V(W,x)$ とすることができる，これは矛盾。よって $V(W_n,x)\longrightarrow V(W,x)$ である。x は任意なので証明は終わる。Q.E.D.

今の補題 1 によって，$V(\cdot,x)$ は各 $x\in[0,\xi]$ で $(\mathcal{B}(\Phi),\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-可測であることが分かる。

次に $\mathcal{V}_t$ を定義する。$k_1\in(0,k_H]$ を一人当たりの初期資本とする。消費者は，$t=1$ において k_1 を企業にすべて提供する。すると $f(k_1)$ を得る。それに基づいて予想函数を次のように限定する。

$$F_1=\left\{W\in\Phi\;\middle|\;W \text{ は } (k_1,f(k_1)) \text{ を通る。}\right\}.$$

F_1 は C^2 ノルム位相について閉集合であるから，$\mathcal{B}(\Phi)$-可測集合である。μ_1 を $\mathcal{B}(\Phi)$ 上の主観確率で $\mu_1(F_1)=1$ を満たすものとする。この確率は全消費者共通であるとする。次期に残した資本から得られる，期待間接効用を，

$$\mathcal{V}_1(y)=\int_{\Phi}V(W,y)\mu_1(dW)$$

と定義する。 $t=1$ で消費者は以下の問題を解く。

$$\max_{c_1,k_2^s}[u(c_1)+\beta\mathcal{V}_1(k_2^s)]$$
$$\text{subject to}\qquad c_1+k_2^s\leq f(k_1^s).$$

k_2 がこれによって決まり，$t=2$ で消費者は $f(k_2)$ を得る。予想函数の集合をさらに限定して以下のようにする。

$$F_2=\left\{W\in\Phi\;\middle|\;W \text{ は } (k_1,f(k_1)),(k_2,f(k_2)) \text{ を通る。}\right\}.$$

F_2 は C^2 ノルム位相について閉集合であるから，$\mathcal{B}(\Phi)$-可測集合である。μ_2 を $\mathcal{B}(\Phi)$ 上の主観確率で $\mu_2(F_2)=1$ を満たすものとする。この確率は全消費者共通であるとする。次期に残した資本か

ら得られる，期待間接効用を，

$$\mathcal{V}_2(y) = \int_{\Phi} V(W, y)\mu_2(dW)$$

と定義する。$t = 2$ で消費者は以下の問題を解く。

$$\max_{c_2, k_3^s}[u(c_2) + \beta\mathcal{V}_2(k_3^s)]$$
$$\text{subject to} \qquad c_2 + k_3^s \leq f(k_2^s).$$

k_3 がこれによって決まり，$t = 3$ で消費者は $f(k_3)$ を得る。F_t，μ_t，$\mathcal{V}_t$ を $t \geq 3$ においても同様に定義する。$F_\infty = \cap_{t=1}^{\infty} F_t$ とし，μ_∞ を $\mu_\infty(F_\infty) = 1$ となる確率とする。

定義.

$$g^t(x) = \arg\max_y [u(f(x) - y) + \beta\mathcal{V}_t(y)].$$

とする。$k_1 \in (0, k_H]$ に対して，$k_t = g^{t-1}(g^{t-2}(\cdots(g^1(k_1))\cdots))$ とする。その時，$\{k_t\}_{t=1}^{\infty}$ を均衡資本経路と呼ぶことにする。

3.　主結果

補題 2.　全ての $t \in \mathbb{N}$ について $\mathcal{V}_t$ は微分可能な凹関数である。

（証明）W の凹性から $\mathcal{V}_t$ の凹性も確認できるので，微分可能性について証明する。$k \in (0, \xi)$，$t \in \mathbb{N}$ を任意に選ぶ。

$$(*) \lim_{h \to 0} \frac{\mathcal{V}_t(k + h) - \mathcal{V}_t(k)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \int_{\Phi} \frac{V(W, k + h) - V(W, k)}{h} \mu_t(dW).$$

今，$\bar{V} = u(\xi) + \beta u(\xi) + \beta^2 u(\xi) + \cdots = u(\xi)/(1 - \beta)$ とする。$V(W, \cdot)$ は非減少な凹函数であることから，

$$\left|\frac{V(W, k + h) - V(W, k)}{h}\right| \leq \frac{\bar{V}}{k}$$

が全ての $h > 0$，$W \in \Phi$ についていえる。μ_t は有限測度なので，有界収束定理から，

$$(*)=\int_{\Phi}\lim_{h\to 0}\frac{V(W,k+h)-V(W,k)}{h}\mu_t(dW) \tag{1}$$

$$=\int_{\Phi}V_k(W,k)\mu_t(dW) \tag{2}$$

$$=\int_{\Phi}u'(W(k)-h(W)(k))W'(k)\mu_t(dW). \tag{3}$$

但し，最後の等式については，$h(W)(x)=\arg\max_y[u(W(x)-y)+\beta V(W,y)]$ としている。Benveniste and Scheinkman（1979, Theorem 1），Araujo（1991, Proposition），Stokey and Lucas（1989, Theorem 4.11）等参照。Q.E.D.

補題 3. 全ての $t\in\mathbb{N}$ について g^t は非減少函数である。

(証明) Dechert and Nishimura (1983) の Theorem 1 の前半と本質的にまったく同様である。Q.E.D.

補題 4. $\mathrm{ess.inf}_{W\in F_t}h(W)(x)<\mathrm{ess.sup}_{W\in F_t}h(W)(x)$ なる $x\in(0,\xi]$, $t\in\mathbb{N}$ に対し，

$$g^t(x)\in(\mathrm{ess.}\inf_{W\in F_t}h(W)(x),\mathrm{ess.}\sup_{W\in F_t}h(W)(x)).$$

（証明）今，$\mathrm{ess.inf}_{W\in F_t}h(W)(x)<\mathrm{ess.sup}_{W\in F_t}h(W)(x)$ なる $x\in(0,\xi]$, $t\in\mathbb{N}$ を任意に選ぶ。仮に，任意の $\mu_t(E)>0$ なる可測集合 $E\subset F_t$, 任意の $W\in E$ に対して，$h(W)(x)\leq g^t(x)$ になるとする。$\mathrm{ess.inf}_{W\in F_t}h(W)(x)<\mathrm{ess.sup}_{W\in F_t}h(W)(x)$ から，ある $\mu_t(E')>0$ なる可測集合 $E'\subset F_t$ とある $W\in E'$ に対して，$h(W)(x)<g^t(x)$ とできる。また，仮定 $\lim_{x\downarrow 0}u'(x)=\infty$ より，$h(W)\in(0,\xi)$, $W\in F_t$ である（よって $0<g^t(x)$）。$u(f(x)-\cdot)+\beta\mathcal{V}_t(\cdot)$ は微分可能なので，

$$u'(f(x)-g^t(x))\begin{cases}=\beta\int_{\Phi}V_k(W,g^t(x))\mu_t(dW) & g^t(x)<\xi\\ \geq\beta\int_{\Phi}V_k(W,g^t(x))\mu_t(dW) & g^t(x)=\xi.\end{cases} \tag{4}$$

$u(f(x)-\cdot)+\beta V(W,\cdot)$, $W\in F_t$ は微分可能な強凹函数（u の強凹から）なので，

$$u'(f(x)-h(W)(x))=\beta V_k(W,h(W)(x)),\quad W\in F_t$$

かつ，

$$u'(f(x)-g^t(x))\begin{cases}<\beta V_k(W,g^t(x)) & h(W)(x)<g^t(x)\\ =\beta V_k(W,g^t(x)) & h(W)(x)=g^t(x)<\xi,\quad W\in F_t\end{cases} \tag{5}$$

がいえる。従って，

$$u'(f(x)-g^t(x)) < \beta \int_{\Phi} V_k(W, g^t(x))\mu_t(dW)$$

となり，矛盾。仮に，任意の $\mu_t(E) > 0$ なる可測集合 $E \subset F_t$, 任意の $W \in E$ に対して，$h(W)(x) \geq g^t(x)$ になるとした場合も同様。Q.E.D.

補題 5. $\{k_t\}_{t=1}^{\infty}$ を均衡資本経路とする。仮に $k_{\bar{t}} = k_{\bar{t}+1}$ となる $\bar{t} \in \mathbb{N}$ があれば，全ての $t \geq \bar{t}$ について，$k_t = k_{\bar{t}} > 0$ である。

（証明）$\bar{t} \in \mathbb{N}$ を，$k_{\bar{t}} = k_{\bar{t}+1}$ なるものとする。消費者は $\bar{t}$ と $\bar{t}+1$ で同一の情報を持つので，$\mathcal{V}_{\bar{t}} = \mathcal{V}_{\bar{t}+1}$ である。よって $k_{\bar{t}+1} = k_{\bar{t}+2}$。従って $\mathcal{V}_{\bar{t}+1} = \mathcal{V}_{\bar{t}+2}$ なので，$k_{\bar{t}+2} = k_{\bar{t}+3}$ となる。以下同様で，$k_t = k_{\bar{t}}$ が全ての $t \geq \bar{t}$ についていえる。また，任意の $t \geq 1$，任意の $W \in F_t$ において，$W(x) > 0$ $(x \neq 0)$ であることと，$\lim_{x \downarrow 0} u'(x) = \infty$ から，$t \geq 1$ について $k_t > 0$ でもある。Q.E.D.

補題 6. $\{k_t\}_{t=1}^{\infty}$ を均衡資本経路とする。仮に $k_{\bar{t}} = k_{\bar{t}+1}$ となる $\bar{t}$ が存在しないならば，$\{k_t\}_{t=1}^{\infty}$ は無限個の相異なる点より成る。

（証明）仮に $\{k_t\}_{t=1}^{\infty}$ が有限個の点より成るとする。$N \in \mathbb{N}$ をその個数とし，それぞれ $\{k1, k2, \cdots, kN\}$ と書くことにする。$T \in \mathbb{N}$ を，$\{k1, k2, \cdots, kN\} \subset \{k_1, k_2, \cdots, k_T\}$ となる最初の期とする。$t \geq T$ に対して消費者は同一の情報を持つ。従って，$\mathcal{V}_t = \mathcal{V}_T$ が全ての $t \geq T$ についていえる。今，(t', t'') を $t' > t'' \geq T$ で T 以降最初に $k_{t'} = k_{t''}$ となるものとする。$\mathcal{V}_{t'} = \mathcal{V}_{t''}$ より $k_{t'+1} = k_{t''+1}$。$\mathcal{V}_{t'+1} = \mathcal{V}_{t''+1}$ より $k_{t'+2} = k_{t''+2}$。以下同様にして，$t \geq t''$ について $k_{t+(t'-t'')} = k_t$ である。つまり t'' 以降は均衡資本経路は $t' - t''$ 周期である。しかし，全ての $t \geq t''$ について $g^t = g$ で，g は非減少であるから，定常状態以外では周期解は起こらない。今，$k_{\bar{t}} = k_{\bar{t}+1}$ なる $\bar{t}$ が存在しない場合を考えているので，均衡資本経路は定常状態にはない。従って，$\{k_t\}_{t=1}^{\infty}$ は有限個ではない。Q.E.D.

μ_t についての追加的仮定をしたい。例えば，均衡資本経路 $\{k_t\}_{t=1}^{\infty}$ に対し仮にある $t \in \mathbb{N}$，ある $W \in F_t$ に対して $W'(k_t) = 1/\beta$ になる時，$W'(k_t) = 1/\beta$ なる $W \in F_t$ に対し，$\mu_t(\{W\}) = 1$ だったとすれば，$k_t = k_{t+1}$ となる。例えば，これが補題 5 の条件が成立するケースである。我々はここで，$k_t = g^t(k_t)$ となるような μ_t を排除する。

仮定 2. 均衡資本経路 $\{k_t\}_{t=1}^{\infty}$ は，$k_{t+1} = k_t$ となる $t \in \mathbb{N}$ は存在しない。

補題 7. k を均衡資本経路 $\{k_t\}_{t=1}^{\infty}$ の集積点[(1)]とする。その時，$f'(k) = W'(k)$ が任意の $W \in F_\infty$ についていえる（$W \in F_\infty$ は全ての $t \in \mathbb{N}$ について $f(k_t) = W(k_t)$ が成立することを意味している）。

（証明）$\{t'\}$ を $\{t\}$ の部分列で，$k_{t'} \to k$ とする。$h_{t'} = k_{t'} - k$ とおく。f と W は微分可能なので，

$$f'(k) = \lim_{h\to 0} \frac{f(k+h) - f(k)}{h} \tag{6}$$

$$= \lim_{t'\to\infty} \frac{f(k+h_{t'}) - f(k)}{h_{t'}} \tag{7}$$

$$= \lim_{t'\to\infty} \frac{W(k+h_{t'}) - W(k)}{h_{t'}} \tag{8}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{W(k+h) - W(k)}{h} = W'(k) \tag{9}$$

$f(k_{t'}) = W(k_{t'})$ が任意の t' でいえており，$f(k_{t'}) \to f(k)$ かつ $W(k_{t'}) \to W(k)$ でもあるので，$f(k) = W(k)$。三番目の等号はそれによる。 Q.E.D.

以下の事実がいえる。

命題 2. （Stokey and Lucas（1989），p.135，（5）式）
任意に $t \in \mathbb{N}$，$W \in F_t$ を選ぶ。その時，$W'(x) < (>) 1/\beta$ ならば，$h(W)(x) < (>) x$。

$\{k_t\}_{t=1}^{\infty}$ を均衡資本経路とする。π を，$k_{\pi(1)} \leq k_{\pi(2)} \leq \cdots \leq k_{\pi(t)} \leq \cdots$ を満たす置換とし，$k_{\pi(t)} = x_t$，$t \in \mathbb{N}$ とする。$x_1 < x_2 \leq k^*$ がある $T > 1$ で成りたつとする。f は強凹なので，

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{1}{\beta}$$

である。任意に $t \geq T$，$W \in F_t$ をとる。$W(x_1) = f(x_1)$，$W(x_2) = f(x_2)$ であることに注意すると，W の凹性から，$x_1 + h < x_2$ となる $h (\neq 0)$ について，

$$\frac{W(x_1+h) - W(x_1)}{h} \geq \frac{W(x_2) - W(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{10}$$

$$= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{11}$$

従って，$W'(x_1) > 1/\beta$ である。従って，命題 2 から，$h(W)(x_1) > x_1$ が全ての $W \in F_t$，全ての $t \geq T$ でいえる。補題 4 から，$t \geq T$ について $g^t(x_1) > x_1$ がいえる。g^t は非減少より，x_1 は均衡資本経路の下限となる。但し $x > 0$，$W \in F_{T-1}$ に対して，$W(x) > 0$ であり，かつ $\lim_{x\downarrow 0} u'(x) = \infty$ であるから，$x_1 > 0$ であることに注意。$x_1 < x_2 < x_3 \leq k^*$ とすると，同様の議論から，x_2 が

（1） k が $\{k_t\}_{t=1}^{\infty}$ の集積点とは，$\forall \varepsilon > 0$, $\forall t \in \mathbb{N}$, $\exists \bar{t} \geq t$; $k_{\bar{t}} \in (k-\varepsilon, k+\varepsilon) \setminus \{k\}$。

均衡資本経路の下限であり，$x_1 < x_2 < \cdots x_{n-1} < x_n \leq k^*$ ならば，x_{n-1} が下限となる。逆に $k^* \leq x_{T-n} < x_{T-n-1} < \cdots < x_T$ がある $T > 1$ で成立しているとすると，同様の議論から x_{T-n-1} は均衡資本経路の上限である。ここで下限の点列を $\{k_s\}$ とし，上限の点列を $\{k_u\}$ と書くことにする。但し，$\{s\}$，$\{u\}$ はそれぞれ $\{t\}$ の部分列である。今までの議論から，$\{k_s\}$ は単調非減少で，$\{k_u\}$ は単調非増加である。それぞれの極限を，$\lim_{s\uparrow\infty} k_s = \underline{k}$，$\lim_{u\uparrow\infty} k_u = \bar{k}$ とする。仮定 2 と補題 6 から，$\{k_s\}$ か，$\{k_u\}$ のどちらかは無限個の点よりなることに注意。従って，$\underline{k}(\leq k^*)$，もしくは $\bar{k}(\geq k^*)$ のどちらかの点については集積点なので，補題 7 より f の傾きが分かる。一般性を失うことなく，$\bar{k}$ を集積点だとする。以下のことがいえる。

補題 8. $\bar{k} = k^*$ である。

（証明）今，$\bar{k} > k^*$ とする。$k_u \downarrow \bar{k}\,(u \uparrow \infty)$ であることに注意。初めに以下のことを示す: 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，以下のような $u_0 \in \mathbb{N}$ が存在する;

$$|W_u'(\bar{k}) - \frac{W_u(k_u) - W_u(\bar{k})}{k_u - \bar{k}}| < \varepsilon, \quad u \geq u_0, W_u \in F_u. \tag{†}$$

仮に，ある $\varepsilon > 0$ と，ある $\{u\}$ の部分列（一般性を失うことなく $\{u\}$ と書く）と，$W_u \in F_u$ を適当に選んで，

$$|W_u'(\bar{k}) - \frac{W_u(k_u) - W_u(\bar{k})}{k_u - \bar{k}}| \geq \varepsilon$$

とできたとしよう。W_u は凹函数なので，

$$W_u'(\bar{k}) \geq \frac{W_u(k_u) - W_u(\bar{k})}{k_u - \bar{k}} \geq W_u'(k_u).$$

従って，

$$W_u'(\bar{k}) - W_u'(k_u) \tag{12}$$
$$= W_u'(\bar{k}) - \frac{W_u(k_u) - W_u(\bar{k})}{k_u - \bar{k}} + \frac{W_u(k_u) - W_u(\bar{k})}{k_u - \bar{k}} - W_u'(k_u) \tag{13}$$
$$\geq \varepsilon, \qquad u \geq u_0 \tag{14}$$

$k_u \downarrow \bar{k}$ より，

$$\frac{W_u'(\bar{k}) - W_u'(k_u)}{\bar{k} - k_u} \downarrow -\infty \quad (u \uparrow \infty)$$

これは Φ の定義に矛盾。(†) が示せた。補題 7 から，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $u_1 \in \mathbb{N}$ をとって，

$$|f'(\bar{k}) - \frac{W_u(k_u) - W_u(\bar{k})}{k_u - \bar{k}}| < \varepsilon, \quad u \geq u_1, W_u \in F_u \tag{††}$$

とできる。よって，(†) と (††) から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\bar{u} \in \mathbb{N}$ が存在し，

$$|W_u'(\bar{k}) - f'(\bar{k})| < \varepsilon, \quad u \geq \bar{u}, W_u \in F_u$$

とできる。$\bar{k} > k^*$ から $f'(\bar{k}) < 1/\beta$ である。よって，$\bar{u}_0$ が存在して，

$$\sup_{u \geq \bar{u}_0} \sup_{W_u \in F_u} W_u'(\bar{k}) < \frac{1}{\beta}.$$

ここで，$t \geq \bar{u}_0$ に対し $F_t \subset F_{\bar{u}_0}$ であるから，結局，

$$\sup_{t \geq \bar{u}_0} \sup_{W_t \in F_t} W_t'(\bar{k}) < \frac{1}{\beta}.$$

従って，

$$\sup_{t \geq \bar{u}_0} \sup_{W_t \in F_t} h(W_t)(\bar{k}) < \bar{k}.$$

補題 4 から，

$$\sup_{t \geq \bar{u}_0} g^t(\bar{k}) < \bar{k}.$$

g^t は非減少なので，

$$\sup_{t \geq \bar{u}_0} g^t(x) \leq \sup_{t \geq \bar{u}_0} g^t(\bar{k}) < \bar{k}, \quad x \leq \bar{k}.$$

従って, 仮にある $t_1 \geq \bar{u_0}$ が存在して, $k_{t_1} \leq \bar{k}$ とできたとすれば, $g^{t_1}(k_{t_1}) < \bar{k}$, さらに $g^{t_1+1}(g^{t_1}(k_{t_1}))$ $< \bar{k} \cdots$ となり，$k_t < \bar{k}$ が全ての $t \geq t_1$ でいえる。これは $\bar{k}$ を上限列 $\{k_u\}$ の集積点としたことに矛盾する。よって，$\bar{k} < k_t$ が全ての $t \geq \bar{u}_0$ で成立。従って，

$$\lim_{t \to \infty} k_t = \bar{k} \tag{**}$$

ここで，任意の $t \geq \bar{u}_0$ で，適当な $W_t \in F_t$ に対し，$\bar{k} \leq h(W_t)(k_t)$ かつ $h(W_t)(0) = 0$ であることと，$h(W_t)$ の連続性（Berge の最大値定理から）と非減少性から，$\bar{k} = h(W_t)(y_t)$ となる $k_t \geq y_t \geq 0$ が存在する。従って，$\lim_{t \to \infty} y_t = \bar{k}$。今，1 階の条件から

$$u'(W_t(y_t) - h(W_t)(y_t)) = \beta u'(W_t(h(W_t)(y_t)) - h(W_t)(h(W_t)(y_t)))W_t'(h(W_t)(y_t))$$

が成立していることに注意。十分大きな $T \geq \bar{u}_0$ をとって，$W_t(\bar{k}) = W_t(h(W_t)(y_t)) < 1/\beta$, $t \geq T$ とする。すると，$t \geq T$ に対して，

$$u'(W_t(y_t) - h(W_t)(y_t)) < u'(W_t(h(W_t)(y_t)) - h(W_t)(h(W_t)(y_t))$$

となる。u の強凹性から，$t \geq T$ について，

$$W_t(y_t) - h(W_t)(y_t) > W_t(\bar{k}) - h(W_t)(\bar{k}).$$

今，$\bar{k} - \sup_{t \geq \bar{u}_0} \sup_{W_t \in F_t} h(W_t)(\bar{k}) = B > 0$ と置く。すると，

$$W_t(y_t) - h(W_t)(y_t) \tag{15}$$

$$> W_t(\bar{k}) - h(W_t)(\bar{k}) \tag{16}$$

$$\geq W_t(\bar{k}) - \bar{k} + B \tag{17}$$

がいえる。ここで, $W_t(y_t)$, $W_t(\bar{k})$ ともに $f(\bar{k})$ に収束することが分かるので, $f(\bar{k}) - \bar{k} \geq f(\bar{k}) - \bar{k} + B$ が成立することになり，矛盾。よって補題 8 がいえた。Q.E.D.

補題 8 の証明中の（$**$）から，結局 $\bar{k}$ は部分列の収束先であるばかりでなく，元の列の収束先になることが分かった。逆に，$\underline{k}$ が集積点としたときでも同様の証明から，$\underline{k} = k^*$ となる。従って以下の定理が成り立つ。

定理. $\{k_t\}_{t=1}^{\infty}$ を均衡資本経路とする。その時，$\lim_{t \uparrow \infty} k_t = k^*$。

k^* は，本来の収入函数の形 f で計算した，つまり合理的期待モデルにおける定常状態である（Stokey and Lucas（1989），p.136, Proposition）。集まる情報は可算個の離散点のみであるから，極限においても f そのものが特定化されるわけではない。つまり μ_∞ は，f に確率 1 をおいたディラック測度，δ_f ではない。それでも均衡資本経路は，合理期待モデルにおける定常状態と同一の点に収束する。以下の節では，無限個の相異なる情報が集まったとしても k^* へは収束しない例をあげる。

4. 反例

ここでは，予想する函数 W が凹ではあるが，微分不可能なケースを考え，無限個の相異なる点が集まっても k^* に収束しない例をあげる。

$x^* \in (0, \xi)$ を，$f'(x^*) < 1/\beta < f(x^*)/x^*$ を満たすものとする。$a = f(x^*)/x^*$ とおく。予想函数を以下のようにする。

$$W(x) = \begin{cases} ax & 0 \leq x \leq x^* \\ f(x) & x^* \leq x \leq \xi. \end{cases} \tag{18}$$

$\lim_{h\uparrow 0}(W(x^*+h)-W(x^*))/h = a \neq f'(x^*) = \lim_{h\downarrow 0}(W(x^*+h)-W(x^*))/h$ であることに注意。$1/\beta \in \partial W(x^*)$（$\partial$ は劣微分）より，$x^* = \arg\max_x[\beta W(x)-x]$ である。よって，x^* は最適問題; $\max\sum_{t=1}^{\infty}\beta^{t-1}u(W(k_t)-k_{t+1})$ の唯一の 0 以外の定常解であり，仮に初期点 k_1 を $x^* < k_1$ ととると，最適経路 $\{k_t\}_{t=1}^{\infty}$ は，全ての $t \in \mathbb{N}$ で $W(k_t) = f(k_t)$，かつ $k_t \downarrow x^*$ となる（Kamihigashi and Roy（2003），Proposition 3.1, Proposition 3.3）。よって，$W \in F_\infty$ である。従って，すべての $t \in \mathbb{N}$ について $\mu_t = \delta_W$ とすれば，最適経路 $\{k_t\}_{t=1}^{\infty}$ は均衡資本経路であり，x^* に収束することがいえる。しかし $f'(x^*) < 1/\beta$ であるから，x^* はもとの合理的期待モデルにおける定常状態とは別のものである。

（経済学部研究助手）

参 考 文 献

Araujo, A.（1991）“The once but not twice differentiability of the policy function” *Econometrica*, 59, 1383-1393.

Becker, R.（1980）“On the long-run steady state in a simple dynamic model of equilibrium with heterogeneous households” *Quarterly Journal of Economics*, 95, 375-382.

Benveniste, L. M. and J. A. Scheinkman（1979）“On the differentiability of the value function in dynamic economic models of economics” *Econometrica*, 47, 727-732.

Bewley, T.（1982）“An integration of equilibrium theory and turnpike theory” *Journal of Mathematical Economics*, 10, 233-267.

Cass, D.（1966）“Optimal growth in an aggregate model of capital accumulation” *Econometrica*, 32, 833-850.

Dechert, R. and K. Nishimura（1983）“A complete characterization of optimal growth paths in an aggregate model with a nonconcave production function” *Journal of Economic Theory*, 31, 332-354.

Easley, D. and N. M. Kiefer（1988）“Controlling a stochastic process with unknown parameters” *Econometrica*, 56, 1045-1064.

Kamihigashi, T. and S. Roy（2003）“A nonsmooth, nonconvex model of optimal growth” *Discussion Paper, Kobe Univercity.*

Koopmans, T. C.（1965）“On the concept of optimal economic growth” *The Econometric Approach to Development Planning*, Chicago: Rand MacNally.

Nagatani, K.（1970）“A note on Professor Tobin's ‘Money and economic growth’ ” *Econometrica*, 38, 171-175.

Ohyama, M.（1989）“On the stability properties of the long-run stationary equilibrium in macrodynamic models under perfect foresight and static expectations” *Economics Letters*, 31, 299-301.

Sargent, T. J. and N. Wallace（1973）“The stability of models of money and growth with perfect foresight” *Econometrica*, 41, 1043-1048.

Ramsey, F.（1928）“A mathematical theory of savings” *Economic Journal*, 38, 543-559.

Stokey, N. L. and R. E. Lucas（1989）*Recursive Methods in Economic Dynamics*, Cambridge: Harvard University Press.

Tobin, J.（1965）“Money and economic growth” *Econometrica*, 33, 671-684.