Title	不確実性と資産市場均衡I
Sub Title	Uncertainty and asset market equilibrium I
Author	福岡, 正夫(Fukuoka, Masao) 須田, 伸一(Suda, Shinichi)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2004
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.97, No.1 (2004. 4) ,p.91- 128
JaLC DOI	10.14991/001.20040401-0091
Abstract	本稿は, 不確実性の存在する経済において資産市場がどれだけ完備先物市場の機能を代行しうるかを検討した資産の一般均衡理論の現況サーベイを意図したものである。まずはじめに, 資産構造がつねに完備条件を満たすという想定の下で, 資産市場均衡配分と条件付き先物市場均衡配分が一致することが示され(定理1), ついで資産構造がかならずしも完備条件を満たさない場合でも, その正則性の条件が満たされるならば, 資産市場均衡配分はほとんどつねに条件付き先物市場均衡配分と一致することが示される(定理2)。 In this study, we survey the current state of the general equilibrium theory for assets that examine how much function of a complete futures market can be substituted by the assets market in an economy where uncertainty exists. We first show that the asset market equilibrium allocation and the conditional futures market equilibrium allocation conform to each other, when the asset structure meets the completeness condition (Theorem 1), and then that the assets market equilibrium allocation almost always conforms to the conditional futures market equilibrium allocation, though its asset structure does not necessarily meet the completion condition, so long as the regularity condition is met (Theorem 2).
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20040401-0091

不確実性と資産市場均衡Ⅰ

Uncertainty and Asset Market Equilibrium I

福岡　正夫(Masao Fukuoka)
須田　伸一(Shinichi Suda)

本稿は，不確実性の存在する経済において資産市場がどれだけ完備先物市場の機能を代行しうるかを検討した資産の一般均衡理論の現況サーベイを意図したものである。まずはじめに，資産構造がつねに完備条件を満たすという想定の下で，資産市場均衡配分と条件付き先物市場均衡配分が一致することが示され（定理 1），ついで資産構造がかならずしも完備条件を満たさない場合でも，その正則性の条件が満たされるならば，資産市場均衡配分はほとんどつねに条件付き先物市場均衡配分と一致することが示される（定理 2）。

Abstract

In this study, we survey the current state of the general equilibrium theory for assets that examine how much function of a complete futures market can be substituted by the assets market in an economy where uncertainty exists. We first show that the asset market equilibrium allocation and the conditional futures market equilibrium allocation conform to each other, when the asset structure meets the completeness condition (Theorem 1), and then that the assets market equilibrium allocation almost always conforms to the conditional futures market equilibrium allocation, though its asset structure does not necessarily meet the completion condition, so long as the regularity condition is met (Theorem 2).

「三田学会雑誌」97 巻 1 号（2004 年 4 月）

不確実性と資産市場均衡 I

福　岡　正　夫
須　田　伸　一

要　　旨

本稿は，不確実性の存在する経済において資産市場がどれだけ完備先物市場の機能を代行しうるかを検討した資産の一般均衡理論の現況サーベイを意図したものである。まずはじめに，資産構造がつねに完備条件を満たすという想定の下で，資産市場均衡配分と条件付き先物市場均衡配分が一致することが示され（定理 1），ついで資産構造がかならずしも完備条件を満たさない場合でも，その正則性の条件が満たされるならば，資産市場均衡配分はほとんどつねに条件付き先物市場均衡配分と一致することが示される（定理 2）。

キーワード

資産市場均衡，条件付き先物市場均衡，資産構造の完備性・不完備性，実物資産構造の正則性，生成的に完備な資産市場，パレート最適性

1

本稿は近来進展の目ざましい資産市場の一般均衡理論とりわけ不完備資産市場理論の現況のサーベイを意図したものである。同じ目的のために書かれた優れたサーベイ論文としてはすでにマギル＝シェイファー[(1)]などがあり，さらに若干の解説書[(2)]も公刊されているが，邦語文献はほとんど見当らず[(3)]，また上記の参考文献の場合も推論の運びなどにいくばくかの数理の補足が望まれる箇所が散見されるので，われわれの目下の作業もあながち無益ではなかろうと思われる。以下そのような点を

(1)　M. Magill and W. Shafer, “Incomplete Markets”, Chap.30 in *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. IV, W. Hildenbrand and H. Sonnenschein, eds., 1991.

(2)　たとえば A. Mas-Colell, M. D. Whinston, and J. R. Green, *Microeconomic Theory*, 1997, Chap.19, M. Magill and M. Quinzii, *Theory of Incomplete Markets*, Vol. I, 1998, A. Villanacci, L. Carosi, P. Benevieri, and A. Battinelli, *Differential Topology and General Equilibrium with Complete and Incomplete Markets*, 2002 など。

なおこの分野の進展の系譜については，上記マギル＝クインツィの著書の第 2 章以下各章末に付けられた Historical Remarks を通覧するのが有益である。

(3)　永田良『数理経済学の新展開――正則経済の理論』2001 年の第 10 章および第 11 章は数少ない事例の一つである。

考慮に入れて，主張の論証にあたっては努めて手抜きをしないように留意し，論理のギャップ埋めに煩わされることなく当該分野の諸成果が理解できるように心掛けた。

2

経済の通時的均衡をモデル化するにあたって避けることのできない重要問題の一つは，不確実性という要因をどのようにモデルに導入するかである。この点についての現代の一般均衡理論は，ほぼ半世紀前に発表されたアローの画期的な論文[(4)]に負う着想を方便として定着させており，それは今日ではよく知られているように，万物の状態（state of the world）ならびに条件付き財（contingent commodity）という一対の概念からなるものである。ここで万物の状態とは将来生じるかもしれないありとあらゆる事象の組み合わせを指す概念で，そのような状態 s が複数個たとえば全部で S 個 $s = 1, 2, \cdots, S$ あるとすれば，事前にその中のどの s が起こるか分からないというのが不確実性であると考えられている。すると，いま物的属性を異にする財が L 種類 $\ell = 1, 2, \cdots, L$ あるとしたとき，条件付き財 ℓs とは状態 s が起こったとき，そしてそのときにのみ，財 ℓ 1 単位の引き渡しを約束する契約であると定義される。たとえば来年の夏が暑夏になるか冷夏になるか分からない場合，暑夏のときのビールと冷夏のときのビールは別種の財とみなすわけであって，暑夏のときのビール 1 ダースを現在，先物契約で購入したとすれば，事実暑夏になったときには当然それだけのビールが引き渡されるが，逆に冷夏になったときには何も得られない。このように条件付き財は，その取引量の符号がプラスであれば当該の事態が生じたとき当該財をそれだけ受け取れる請求権を意味し，他方その符号がマイナスであれば，逆に当該財をそれだけ引き渡す義務をあらわすと解されるのである。

さて，そのような条件付き財ごとにそれを取引する市場がすべて網羅的に存在しているとすれば誰もが現在期日 $t = 0$ においてどの条件付き財をも先物契約をつうじて一挙に取引することができ，したがって不確実性を含む経済をも伝統的なアロー＝ドブリュー流の一般均衡理論によってまったく同様に処理することができる。つまりこの場合は，財の種類数が状態数を掛けた規模に拡大するだけで，理論分析上変更を要する点は何ら生じてこないのである。しかしリアリズムの見地からす

---

(4)　K. J. Arrow, “Le rôle des valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risques”, *Econométrie, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique*, No. 40, CNRS, 1953, 英訳は “The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-bearing”, *Review of Economic Studies*, April 1964.

同様な条件付き財の定式化については，また G. Debreu, *Theory of Value*, 1959, Chap.7 および “Economics of Uncertainty”, *Mathematical Economics*, 1983, Chap.8（“Une Economie de l’Incertain”, *Economie Appliquée*, 1960 の英訳。なおこの論文は 1953 年の同題の草稿 “Une Economie de l’Incertain”, Electricité de France にもとづくものである。）をも参照。

れば，それほどまで完備した先物市場の制度を想定することは到底できず，したがって不確実性下の市場経済分析には新たな課題が提供されることになるのである。

同じ論文の中で，アローは状態 s が起こったときに価値尺度財 1 単位のみの引き渡しを約定する S 種類の証券を考え，あらかじめ期日 0 においてその証券による価値尺度財の先物取引をつうじて状態間・期日間の購買力移転を図ることにすれば，あとは期日 1 にいたってどの s が実現するかが判明してから L 種類の財を直物取引することで，条件付き先物市場完備の場合とまったく同等の効率的危険配分が可能となることを示しえた。つまり市場が効率的に機能する上で LS 個の先物市場の存在はかならずしも必要ではなく，事前に所得を再配分するある種の資産市場さえあるならば，そこだけに限定された先物取引と事後的な財の直物取引とに市場の機能を分割することによって，はるかに少ない市場の数で所望の目的を達成しうるという趣旨である。これはまことに先駆的な洞察であって，その後の資産市場の一般均衡分析はこのアローの卓見を礎石とすることで発展してきたといっても過言ではないのである。

以下で概観する進展の大筋としては，まず始めにアローの証券よりいっそう一般的な資産構造を想定した場合でも，それらの資産の種類が十分な数だけ，かつ十分な多様性にわたって存在し，それらをつうじて事前の状態間・期日間の所得移転が何らの制約なしに行われうるならば，原則として，資産市場均衡は条件付き先物市場均衡の場合と同様パレート最適性を満たすということが，一連の定理の形でレビューされるであろう。他方，資産市場が不完備で，事前の所得移転が無制約には行われない場合には，資産市場均衡はパレート最適性を満たさないばかりか，いっそう制約的な最適性すら満たさないという，もう反面の定理がとり上げられるであろう[(5)]。

これらの諸成果とりわけ不完備市場均衡がもつ諸性質を解明する研究は，その大部分が比較的近時の進展に属し，たかだか 80 年代の後半あたりから生み出されてきたものである。それは一般均衡理論の枠組みをより現実的な市場構造を包含する方向に拡張する営為であるばかりでなく，公共財や外部性など古くから知られた市場欠落現象（missing markets）の考察に新たなメッセージを導き入れる所業でもある。さらにまたそれは,「将来と取引する」能力が市場の不完備性によって制約される事実に鮮明な光を当てることをつうじて，マクロ経済学のミクロ的基礎をいちじるしく強化する効能をも伴っているということができよう。

3

では上述までのところを「まえおき」として，ここから本論に入る。このサーベイでは議論を単純明快にするため，もっぱら舞台を純粋交換経済の場に限定し，生産経済の考察についてはまた別

（5） 後者の点は，次稿「不確実性と資産市場均衡 II」でとり扱う。

の機会に委ねることにしたい。経済は I 人の取引主体 $i=1,2,\cdots,I$ と L 種類の財 $\ell=1,2,\cdots,L$ とから成るものとし，期間については現在期 $t=0$ と将来期 $t=1$ の 2 期モデルで考えていくことにする。期日 1 の万物の状態は互いに排他的な S 個の状態 $s=1,2,\cdots,S$ から成り，現在ではそのどれが起こるかは不明である。期日 0 の状態はすでに実現していて一意であるが，便宜上それをも $s=0$ と表記することにする。すると，状態 s の数は全部で $S+1$ 個あることになり，したがって財の種類数は $L(S+1)$ 個で，財空間は $L(S+1)$ 次元の実数空間すなわち $R^{L(S+1)}$ であらわされることになる。

各主体 i の初期賦存量ベクトルは $t=0$ については ω_0^i で一意に与えられるが，$t=1$ については $\omega_1^i=(\omega_1^i(s))_{s=1}^S$ としてランダムな形で与えられ，$\omega_1^i(s), s=1,2,\cdots,S$ のどれが実現するかは事前には分からない。以下では $\omega^i=(\omega_0^i,\omega_1^i)$ と書き，

A. 3. 1　　　$\omega^i \in R_{++}^{L(S+1)}$。

と仮定する。

各主体の選好は，消費集合 $R_+^{L(S+1)}$ に含まれる 2 期分の消費ベクトル x_0^i および $x_1^i=(x_1^i(s))_{s=1}^S$ すなわち $x^i=(x_0^i,x_1^i)$ について定義される効用関数 $u^i: R_+^{L(S+1)} \to R$ によって表示される。しばしば不確実性下の効用関数はラムゼー＝フォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン型の期待効用関数

$$u^i(x_0^i,x_1^i)=\sum_{s=1}^S \pi_s v^i(x_0^i,x_1^i(s))$$

$$\text{ここで}\pi_s\text{は状態 } s \text{ の確率で，} \pi_s>0, \sum_{s=1}^S \pi_s=1$$

とされるが，以下での議論は格別にそのような特殊な効用関数の形には依存しない[(6)]。

A. 3. 2　　　u^i はつぎの諸性質を満たす。

（1）u^i は $R_+^{L(S+1)}$ 上で連続かつ $R_{++}^{L(S+1)}$ 上で無限回連続微分可能。
（2）すべての $x^i \in R_{++}^{L(S+1)}$ について $U^i(x^i)=\{x \in R_+^{L(S+1)} \mid u^i(x) \geqq u^i(x^i)\}$ とするとき，$U^i(x^i) \subset R_{++}^{L(S+1)}$。
（3）どの $x^i \in R_{++}^{L(S+1)}$ についても $Du^i(x^i) \in R_{++}^{L(S+1)}$。
（4）どの $x^i \in R_{++}^{L(S+1)}$ についても $Du^i(x^i)h=0$ を満たすすべての $h \neq 0$ に対して $h'D^2u^i(x^i)h<0$。

（6）　したがってここでは π_s が主観的確率であるか客観的確率であるかは問う必要がなく，よって π_s を π_s^i として主体別に区別するかどうかも無関係である。またケインズやナイトのように不確実性と危険とを区別する必要もなく，本稿ではそれらの用語を無差別に使用している。

以下で考察の対象となる経済は，上記のような特性 $(u,\omega)=((u^i)_{i=1}^I,(\omega^i)_{i=1}^I)$ をもつ I 人の取引主体から構成される交換経済である。そのような経済を枠付けるいくつかの市場構造の一つとして，まず最初はアロー＝ドブリュー型の条件付き先物市場システム C をとり上げ，そのような経済 $E(C)=((u,\omega),C)$ の均衡を精確に定義することから始めよう。前述したように，条件付き財 ℓs（$\ell=1,\cdots,L,\ s=1,\cdots,S$）とは状態 s が起こったとき財 ℓ の 1 単位を取引し，ほかには何ものも授受しないことを約束する契約である。$E(C)$ では，期日 0 においてそのような条件付き先物市場がすべての ℓ,s にわたって完備していると想定されている。そこでそれらすべての条件付き財の先物価格ベクトルを $p_1=(p_1(s))_{s=1}^S$ と記し，現在財の価格ベクトル p_0 をも含めて $p=(p_0,p_1)=(p_0,(p_1(s))_{s=1}^S),p\in R_{++}^{L(S+1)}$ とすれば，条件付き先物市場均衡（Contingent Market Equilibrium）とはつぎのように定義される競争均衡である。すなわち

経済 $E(C)$ の条件付き先物市場均衡とは，下記の条件を満たす取引量 $x=((x^i)_{i=1}^I)$ と価格 p の対 (x^*,p^*) をいう。

(i) すべての取引主体 $i=1,2,\cdots,I$ について x^{i*} は

$$B(p^*,\omega^i)=\{x^i\in R_+^{L(S+1)}\mid p^{*'}(x^i-\omega^i)=0\}$$

の中で $u^i(x^i)$ を最大にしている。

(ii)
$$\sum_{i=1}^I(x^{i*}-\omega^i)=0$$

上記のところから明らかなように，条件付き先物市場均衡の定義は，財の種類が L 個から $L(S+1)$ 個に増加しただけで，他の点では何ら通常の競争均衡の定義と異なったところがない。したがって前にも述べたように，それには全般にわたって従来の競争均衡理論の推論法と帰結がそのままあてはまり，標準的な仮定 A.3.1 および A.3.2 の下では均衡の存在が保証され，かつそこでの均衡配分はパレート最適性を満たすことになる。

しかし，前にも述べたように，現実の市場構造がそれほど完備した先物市場の条件を満たすことは決してなく，すべての取引が期日 0 において one-shot の形で行われるとは考えられない。そこでつぎのステップとしては，ラドナーらの着想に倣って[(7)]市場にいくばくかの継起的な構造を導入し，まず $t=0$ においては現在の財の直物取引と資産の先物取引のみが行われ，ついで $t=1$ になってから実現した状態 s についてそれに応じた財の直物取引が行われるという 2 段構えの市場構造を考えることにする。そして価格については，前出の先物価格ベクトル p とは一応区別した意味での直物価格ベクトルを $\bar{p}$ と記す。ただし $s=0$ については，いうまでもなく $\bar{p}_0=p_0$ である。

(7) この方向への進展に先鞭をつけたのはラドナーである。R. Radner，“Existence of Equilibrium of Plan, Prices, and Price Expectations in a Sequence of Markets”，*Econometrica*, March, 1972 参照。

さてこの新市場システムにおける資産（asset）とは，状態 s が起こったとき，期日 1 において買い手が何らかの収益を受け取りうる請求権であり，そのような資産の取引を前もって期日 0 にとり行うことによって，各主体は状態間ならびに期日間で所得を移転させることが可能となるのである。話をより具体化するために，以下ではそうした資産が J 種類 $j=1,2,\cdots,J$ あり，資産 j は $t=1$ において収益 $V^j=(V^j(1),\cdots,V^j(S))$ をもたらすと想定することにしよう。そしてこれら J 個の収益ベクトルを列ベクトルとする $S\times J$ の行列を

$$V=[V^1,\cdots,V^J]=\begin{bmatrix} V^1(1) & \cdots & V^J(1) \\ \vdots & & \vdots \\ V^1(S) & \cdots & V^J(S) \end{bmatrix}$$

と書き，それを収益行列と呼ぶことにする。一方 V の各行すなわち状態 s のときそれらの資産がもたらす収益の profile を

$$V(s)=(V^1(s),\cdots,V^J(s)),\quad s=1,\cdots,S$$

と書き，$t=0$ における主体 i の資産購入量ベクトルすなわち彼のポートフォリオを $z^i=(z_1^i,\cdots,z_J^i)$ と書けば，$V(s)z^i$ が状態 s の下でポートフォリオ z^i が主体 i にもたらす収益額をあらわすことになるのである。

すると $t=0$ におけるこれら J 種類の資産の価格を $q=(q_1,q_2,\cdots,q_J)\in R^J$ と書くことで，主体 i の予算制約式は

$$\begin{aligned} \bar{p}_0'(x_0^i-\omega_0^i) &= -q'z^i \\ \bar{p}_1(s)'(x_1^i(s)-\omega_1^i(s)) &= V(s)z^i,\quad s=1,\cdots,S \end{aligned} \tag{1}$$

のようにあらわされることになろう。すなわち，主体 i は $t=0$ において資産を $q'z^i$ の額だけ購入することにより $t=1$ の所得を $V(s)z^i$ だけ変化させることができる。事前に計画を立てるときにはつぎの期の S 個の予算制約式のうちどれが現実化するか分からないから，そのすべてを考慮に入れなければならないが，つぎの期になればそのうちの 1 個が確定し，したがってそれを満たす財需要を直物市場で調達すればよいのである。前の条件付き先物市場の場合との重要な相違は，こんどの直物市場の場合は期日 1 の財はその期になって直物価格で支払いがなされるのに対して，前の条件付き先物市場の場合は期日 1 の財に対しても期日 0 において先物価格で支払いがなされなければならないという点にある。条件付き先物市場システムの場合は予算制約式が 1 本にまとめて書かれたのに対して，直物市場の場合は $S+1$ 個の予算制約式が別々に併記されなければならないのは，このためである。いま記述の便宜上

$$W(q,V)=\begin{bmatrix}-q\\V\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-q_1 & \cdots & -q_J\\ V^1(1) & \cdots & V^J(1)\\ \vdots & & \vdots\\ V^1(S) & \cdots & V^J(S)\end{bmatrix}$$

と書き，$\bar{p}$ と $(x^i-\omega^i)$ のボックス積を

$$\bar{p}'\Box(x^i-\omega^i)=(\bar{p}_0'(x_0^i-\omega_0^i),(\bar{p}_1(s)'(x_1^i(s)-\omega_1^i(s)))_{s=1}^S)$$

と定義することにすれば，上記の予算制約式 (1) はより簡単に

$$\bar{p}'\Box(x^i-\omega^i)=W(q,V)z^i$$

とまとめて書くことができる。

すると資産を導入した新しい市場経済システム $E(V)$ の下での競争均衡すなわち資産市場均衡（Asset Market Equilibrium）が，つぎのように定義できることになる。すなわち

経済 $E(V)$ における資産市場均衡とは，つぎの条件を満たす財および資産の取引量 $(x,z)=((x^i)_{i=1}^I,(z^i)_{i=1}^I)$ とそれらの価格 $(\bar{p},q)$ の対 $((x^*,z^*),(\bar{p}^*,q^*))$ である。

（i）すべての取引主体 $i=1,2,\cdots,I$ について x^{i*} は

$$\bar{B}(\bar{p}^*,q^*,\omega^i)=\{x^i\in R_+^{L(S+1)}\mid \bar{p}^{*\prime}\Box(x^i-\omega^i)=Wz^i,z^i\in R^J\}$$

の中で $u^i(x^i)$ を最大にしており，かつ $\bar{p}^{*\prime}\Box(x^{i*}-\omega^i)=Wz^{i*}$ である。

（ii）
$$\sum_{i=1}^I(x^{i*}-\omega^i)=0$$

（iii）
$$\sum_{i=1}^I z^{i*}=0$$

なお，ここで定義されている資産市場均衡においては，各主体が効用最大化を行う期日 0 の時点で期日 1 の直物市場はまだ開かれていないから，将来どの状態 s が実現するにせよ均衡直物価格 $\bar{p}_1(s)$ は正しく予想されるものと想定されていることに注意されたい。

以下の所論では，上に定義したこれら 2 種類の均衡，すなわち条件付き先物市場均衡と資産市場均衡との関係をつうじて，資産市場がもつべき市場効率化機能を究明していくことが考察の主要な眼目となる。

ところでそのように資産市場に完備先物市場の機能の代行が期待できるのは，そこでの資産取引をつうじて状態間の所得移転が可能となる点によるものであるから，それがどの程度に所望の代行

機能を果たしうるかは，可能となる所得移転の空間がどれだけの広さをもちうるかに依存する。いま V の J 個の列が張る R^S の部分空間を

$$\langle V\rangle = \{\tau \in R^S \mid \tau = Vz, z \in R^J\}$$

で記すとき，もし $\langle V\rangle$ が R^S の全空間を満たし，$\langle V\rangle = R^S$ となっているならば，そのような資産構造は完備（complete）であると呼ばれる。他方もしそれが R^S のすべてを満たしえず，$\langle V\rangle \neq R^S$ であるならば，それは不完備（incomplete）であると呼ばれる。ここで $\langle V\rangle = R^S$ という完備性の条件は $\dim \langle V\rangle = S$ ということでもあり，V の列の中に一次独立なものが S 個は存在するということであるから，さらに $\mathrm{rank}\ V = S$ という条件によって表現することもできる。いうまでもなく，そのためには $J \geqq S$ でなければならないから，これは資産の種類が少なくとも状態の数を下回らないほど多種類なくてはならないことを含意している。しかし逆に $J \geqq S$ であるからといって $\mathrm{rank}\ V = S$ の条件がかならず満たされるというわけではなく，そのためには一次独立な列あるいは行が S 個見出されるのでなくてはならない。これは資産構造が種間あるいは状態間でその程度にヴァラエティーに富んでいなければならないことと解されよう。一方，上記のところから $J < S$ であれば，資産市場はかならず不完備とならねばならない。そして前にも触れ，やがて厳密に証明するように，もし資産市場が完備であれば，資産市場均衡配分は条件付き先物市場均衡配分と一致し，資産の存在が危険配分最適化という所望の機能を果たしうることになるが，もしそれが不完備であれば，そうした役割を資産市場に期待することはできず，むしろほとんどの場合にいかなる最適性も満たされえないという帰結が生じるのである。

4

このように資産市場の効能を考察する上では，上記の意味でその構造が完備であるか不完備であるかが帰結に重要な相違をもたらすが，さらにその点を掘り下げて分析を進めるには，あらかじめ資産には名目資産と実物資産という 2 種類のものがあることを弁別しておくのでなくてはならない。ここで名目資産（nominal asset）とは，当該資産のもたらす収益が勘定の基準単位である貨幣で与えられるものをいい，実物資産（real asset）とは，それが物的な財の形で与えられるものをいう。この相違から理解されるように，名目資産の場合は前節で定義した収益行列 V がそのまま所与の資産構造とみなされるのに対して，実物資産の場合はつぎに述べるとおり話がいっそう複雑になる。

実物資産 j とは，一般には状態 $1, \cdots, S$ のいずれかに応じて期日 1 に L 種の財の物量のベクトル（列ベクトル）

$$A^j(s) = (A_1^j(s), \cdots, A_L^j(s)) \in R^L, \quad s = 1, \cdots, S$$

の引き渡しを約束する契約であると定義される。収益 $V^j(s)$ は価値額であらわされており，

$$V^j(s) = \bar{p}_1(s)' A^j(s)$$

となっているから，前記の収益行列 V は

$$V = \begin{bmatrix} \bar{p}_1(1)'A^1(1) & \cdots & \bar{p}_1(1)'A^J(1) \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{p}_1(S)'A^1(S) & \cdots & \bar{p}_1(S)'A^J(S) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{p}_1(1)' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{p}_1(2)' & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{p}_1(S)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1(1) & \cdots & A^J(1) \\ A^1(2) & \cdots & A^J(2) \\ \vdots & & \vdots \\ A^1(S) & \cdots & A^J(S) \end{bmatrix}$$

という形で書かれることになる。つまり実物資産の場合は，価値額表示の収益行列 V は $S \times LS$ の価格行列と $LS \times J$ の実物収益行列 $[A^j(s)] \equiv A$ の二つの部分に分解されるわけであって，後者を詳しく書けば

$$A = \begin{bmatrix} A^1(1) & \cdots & A^J(1) \\ \vdots & & \vdots \\ A^1(S) & \cdots & A^J(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1^1(1) \\ \vdots \\ A_L^1(1) \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} A_1^J(1) \\ \vdots \\ A_L^J(1) \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{pmatrix} A_1^1(S) \\ \vdots \\ A_L^1(S) \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} A_1^J(S) \\ \vdots \\ A_L^J(S) \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

となっており，それが所与の実物資産構造をあらわすのである。ここで注意すべきは，実物資産の場合その経済のファンダメンタルな与件となるのは V ではなくて A であり，V は価格 $\bar{p}_1 = (\bar{p}_1(s))_{s=1}^S$ に依存せざるをえないという事実である。

こうした事情に由来する実物資産システムの際立った特質は，一つには上記の事実のために $V(\bar{p}_1)$ のランクが $\bar{p}_1$ の変化によって変わるかもしれず，ある $\bar{p}_1$ については rank $V(\bar{p}_1) = S$ であっても他の $\bar{p}_1$ については rank $V(\bar{p}_1) < S$ となる可能性を排除しえないということである。のちに見るように，この点が実物資産モデルの分析を名目資産モデルのそれに比してはるかに面倒なものにする主要な理由となっており，実物資産モデルが抱える厄介さは何よりもこの点にもとづくといってよいのである。反面，実物資産モデルは，絶対価格水準の変化すなわちインフレーションやデフレーションからはいっさい影響を受けないというもう一つの特質をもっている。もし $(\bar{p}_0^*, \bar{p}_1(1)^*, \cdots, \bar{p}_1(S)^*, q^*)$ がそこでの均衡価格ベクトルであるとすれば，$\alpha_s > 0,\ s = 0, 1, \cdots, S$

とするとき，$(\alpha_0 \bar{p}_0^*, \alpha_1 \bar{p}_1(1)^*, \cdots, \alpha_S \bar{p}_1(S)^*, \alpha_0 q^*)$ もまた均衡価格ベクトルとなる。つまり価格がおしなべて 2 倍になったときには，所得もまた 2 倍になるわけで，絶対価格水準は問うところとはならない。こうした inflation-proof という特性は実物資産モデルのみがもつ特性であって，名目資産の場合はシェアされない。

なお上記のように実物資産モデルでは V が $\bar{p}_1$ に依存するといっても，これは一般論としての話であって，特殊な実物資産構造を考える場合には例外がありうる。たとえばいわゆる価値尺度財資産（numeraire asset）の事例をとり上げてみると，そこでは各資産 j が収益を価値尺度財のみを用いて引き渡されると想定されているから，第 1 財を価値尺度財とみなせば，ベクトル $A^j(s)$ は

$$A^j(s) = (A_1^j(s), 0, \cdots, 0), \quad s = 1, \cdots, S$$

という形になっており，V は

$$V(\bar{p}_1) = \begin{bmatrix} \bar{p}_{11}(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{p}_{11}(2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{p}_{11}(S) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^1(1) & \cdots & A_1^J(1) \\ A_1^1(2) & \cdots & A_1^J(2) \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^1(S) & \cdots & A_1^J(S) \end{bmatrix}$$

というはるかに簡単な形をとる。しかも当該の価値尺度財で直物価格を基準化すれば，$\bar{p}_{11}(s) = 1$，$s = 1, \cdots, S$ となるので，V はさらに簡単化されて

$$V = \begin{bmatrix} A_1^1(1) & \cdots & A_1^J(1) \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^1(S) & \cdots & A_1^J(S) \end{bmatrix}$$

となり，V したがってその各列で張られる部分空間 $\langle V \rangle$ は $\bar{p}_1 = (\bar{p}_1(s))_{s=1}^S$ からまったく独立となるのである。

5

上記の所論の重要なポイントは，資産構造の完備性の条件すなわち rank $V(\bar{p}_1) = S$ という条件が資産の種類いかんによっては $\bar{p}_1$ の変化からの影響を免れないということである。前述したところを繰り返せば，ある $\bar{p}_1$ の下ではこの条件が満たされているとしても，$\bar{p}_1$ が変わればそれが満たされなくなり，ランクが落ちる可能性を排除しえないのである。以下，資産市場均衡と条件付き先物市場均衡との関係を問うにあたって，いま述べた点をめぐってわれわれはひとまず複雑な事情を回避することにし，どの $\bar{p}_1 = (\bar{p}_1(s))_{s=1}^S \in R_{++}^{LS}$ についてもつねに rank $V(\bar{p}_1) = S$ の条件が満たさ

れるといういささか強い仮定を設けて，その下では資産市場均衡の配分がつねに条件付き先物市場均衡配分と一致するというストレートな帰結を厳密な形で導いておくことにしようと思う。[8] この仮定はすぐ次節にいたって緩和するが，ここであえてそう仮定するのは，そのような状況が資産市場がもっとも充全な形で機能する理想的な事態をあらわしており，したがってなぜ資産の存在にそうした代行的役割が期待されるのかという事由の数理をもっとも明快に示しているからである。

ところでそのような形で両市場の均衡を関係づけるに先立ち，もう一点だけ資産市場均衡の事態が資産価格 $q = (q_1, \cdots, q_J)$ に対してもつ重要な含意について触れておくことにしたい。それは均衡においては q はいわゆる無裁定（no arbitrage あるいは arbitrage free）条件に服しなくてはならないという含意である。ここで q が無裁定条件に服するとは，均衡ではすべての主体 i について $Wz^i \geq 0$，すなわち $q'z^i \leqq 0$，$V(s)z^i \geqq 0$ で少なくとも一つの不等号が厳密に成り立つような事態があってはならないということである。というのは，もしそのような事態を可能にするポートフォリオ $z^i = (z^i_1, \cdots, z^i_J)$ があったとすれば，当該の主体は期日 0 の所得かあるいはある状態下の期日 1 の所得を意のままに増加することで効用をいくらでも増加することができ，均衡の定義に矛盾するからである。

そこで，もし均衡においてそのような無裁定条件が成り立たねばならないとすれば，さらにそのことの含意としてかならず $\beta'W = 0$ となるような乗数 $\beta = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_S) \in R^{S+1}_{++}$ が存在するという結果が導かれる。

補題 1　$Wz \geq 0$ を満たすような $z \in R^J$ がありえないとすれば，かならず $\beta'W = 0$ を満たす $\beta \in R^{S+1}_{++}$ が存在する。

証明

この主張の成立を示すには，つぎの形の分離定理を用いるのが便利である。[9]

分離定理　S_1 を閉凸集合，S_2 をコンパクトな凸集合とするとき，$S_1 \cap S_2 = \varnothing$ であれば，それらを分離する超平面が存在し，

すべての $x \in S_1$ に対して $p'x < \gamma$

すべての $x \in S_2$ に対して $p'x > \gamma$

となるような $p \neq 0$ と γ が存在する。

---

(8)　そのような設定については，J. Geanakoplos, “An Introduction to General Equilibrium with Incomplete Asset Markets”, *Journal of Mathematical Economics*, Vol.19, Nos 1/2, 1990, p.13 の Theorem 1 に負う。

(9)　小山昭雄『経済数学教室 3』，1994，pp.194–197 参照。

ここでの適用にあたって

$$\langle W \rangle = \{v \in R^{S+1} | v = Wz, z \in R^J\}$$

を S_1，また

$$\Delta = \{v \in R_+^{S+1} | \sum_{s=0}^{S} v_s = 1\}$$

を S_2 とすれば，補題の仮定からそれらは明らかに分離定理の仮定を満たす。よって

（イ）すべての $v \in \langle W \rangle$ に対して $\beta' v < \gamma$

（ロ）すべての $v \in \Delta$ に対して $\beta' v > \gamma$

となるような $\beta \neq 0$ と γ が存在する。

さらに $0 \in \langle W \rangle$ であるから，（イ）から $\gamma > \beta' 0 = 0$ となることがいえ，また各 $s = 1, \cdots, S$ について第 s 成分が 1，他の成分がすべて 0 であるようなベクトルを v に選べば，（ロ）から $\beta' v = \beta_s > \gamma$，$s = 1, \cdots, S$ となることがいえる。よって $\beta_s > 0$，$s = 1, \cdots, S$ すなわち β の成分はすべて厳密に正となることが分かる。

つぎにそのような β が $\beta' W = 0$ を満たすことも，下記のような推論をつうじて明らかとなる。いまかりに $\beta' W = (c_1, \cdots, c_J)$ として，ある $j = 1, \cdots, J$ について $c_j \neq 0$ であったとしてみる。すると z として第 j 成分が d，他の成分がすべて 0 のベクトルを選ぶことにより，（イ）から $\beta' W z = c_j d < \gamma$ となるのでなくてはならない。ところが d は任意の数であってよいから，$c_j > 0$ なら d を $+\infty$ の方向に十分大きくとることにより，また $c_j < 0$ なら d を $-\infty$ の方向に十分小さくとることによって，$c_j d > \gamma$ とすることができる。よって前の帰結と矛盾することになり，背理法の仮定が成り立つことはない。証了。

さて以上のような予備考察ののちに，漸く最初の基本定理を示す準備が整ったことになる。

定理 1　資産構造 V をもつ経済 $E(V)$ において，仮定 A.3.1，A.3.2 にさらに加えて，すべての $\bar{p}_1 = (\bar{p}_1(s))_{s=1}^{S} \in R_{++}^{LS}$ の下で rank $V(\bar{p}_1) = S$ の仮定が満たされているとする。すると，そこでの資産市場均衡配分は経済 $E(C)$ の条件付き先物市場均衡配分と一致する。

証明[(10)]

（1）$E(C)$ の条件付き先物市場均衡配分が $E(V)$ の資産市場均衡配分になることの証明。

（10）　マスコレル＝ウィンストン＝グリーンが価値尺度財モデルという特殊ケースについて行っている証明を，以下 mutatis mutandis に準用する。Mas-Colell, Whinston, and Green, *op.cit.*, p.705 参照。

(x^*, p^*) を所与の条件付き先物市場均衡であるとして，まず $\bar{p}^* = p^*$，そして

$$q^* = \sum_{s=1}^{S} V(s) \quad \text{すなわち} \quad q^{*'} = e'V$$

と定義する。[11] ここで e は 1 をすべての成分とする S 次元列ベクトル，したがって e' はそれを転置した行ベクトルである。すると，このような $(\bar{p}^*, q^*)$ に対して z^* が定義できて，$((x^*, z^*), (\bar{p}^*, q^*))$ が $E(V)$ の資産市場均衡の条件をことごとく満たすことが示されればよい。

以下記号を簡単化するために，各個人 i について状態間の所得移転ベクトル（列ベクトル）を

$$b^i = (\bar{p}_1(1)^{*'}(x_1^i(1)^* - \omega_1^i(1)), \cdots, \bar{p}_1(S)^{*'}(x_1^i(S)^* - \omega_1^i(S)))$$

と略記することにすれば，条件付き先物市場均衡の条件（i）$p^{*'}(x^i - \omega^i) = 0$ から

$$e'b^i = \sum_{s=1}^{S} \bar{p}_1(s)^{*'}(x_1^i(s)^* - \omega_1^i(s)) = -\bar{p}_0^{*'}(x_0^{i*} - \omega_0^i) \tag{2}$$

となり，他方同じく条件付き先物市場均衡の条件（ii）$\sum_{i=1}^{I}(x^{i*} - \omega^i) = 0$ から

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{I} b^i &= (\sum_{i=1}^{I} \bar{p}_1(1)^{*'}(x_1^i(1)^* - \omega_1^i(1)), \cdots, \sum_{i=1}^{I} \bar{p}_1(S)^{*'}(x_1^i(S)^* - \omega_1^i(S))) \\ &= (\bar{p}_1(1)^{*'} \sum_{i=1}^{I}(x_1^i(1)^* - \omega_1^i(1)), \cdots, \bar{p}_1(S)^{*'} \sum_{i=1}^{I}(x_1^i(S)^* - \omega_1^i(S))) \\ &= (0, \cdots, 0) \end{aligned} \tag{3}$$

となる。

ここで，仮定から rank $V = S$ であることを考慮すれば，まず $i = 1, \cdots, I-1$ について

$$b^i = Vz^{i*} \tag{4}$$

となるような $z^{i*} \in R^J$ を求めうることが，つぎのような推論をつうじて明らかとなる。事実いま上記のランク条件より，V の S 本の列ベクトルで一次独立なものが存在するから，適当に資産の番号をつけ変えれば，それら一次独立な列ベクトルからなる $S \times S$ の行列を V_{I}，残りを V_{II} として $V = [V_{\mathrm{I}} \quad V_{\mathrm{II}}]$ と書くことができ，$|V_{\mathrm{I}}| \neq 0$ であるところから，$\tilde{z}_i = V_{\mathrm{I}}^{-1} b^i$ を満たすような $\tilde{z}^i \in R^S$ を求めることができる。そこで $z^{i*} = (\tilde{z}^i(1), \cdots, \tilde{z}^i(S), 0, \cdots, 0) \in R^J$ とすれば，

$$\begin{aligned} Vz^{i*} &= [V_{\mathrm{I}} \quad V_{\mathrm{II}}] \begin{bmatrix} \tilde{z}^i \\ 0 \end{bmatrix} = V_{\mathrm{I}} \tilde{z}^i \\ &= V_{\mathrm{I}} V_{\mathrm{I}}^{-1} b^i = b^i \end{aligned}$$

（11） ここで $V = V(\bar{p}_1^*)$ である。前述したように V は $\bar{p}_1^*$ に依存するが，以下の証明においては $\bar{p}_1^*$ は固定されているので，そう略記しても問題はない。

となり，所望の z^{i*} を得ることができるのである。

さらにそのように求めた $z^{1*},\cdots,z^{I-1*}$ を用いて，z^{I*} を

$$z^{I*}=-(z^{1*}+\cdots+z^{I-1*})$$

と定義すれば，そのような z^* に対して，$((x^*,z^*),(\bar{p}^*,q^*))$ が $E(V)$ の資産市場均衡の条件を満たすことがつぎのような推論から明らかとなる。

まず，条件（iii）が満たされることは，つくり方から

$$\sum_{i=1}^{I} z^{i*}=0$$

となるので明らか。

他方，条件（ii）が満たされることも，それが条件付き先物市場均衡の場合とまったく同じ条件であるところから自明である。

最後に条件（i）についてであるが，まず，上で導いた帰結 (3) および (4) を用いれば，

$$\begin{aligned} b^I &= -(b^1+\cdots+b^{I-1}) \\ &= -(Vz^{1*}+\cdots+Vz^{I-1*}) \\ &= V(-(z^{1*}+\cdots+z^{I-1*})) \\ &= Vz^{I*} \end{aligned} \tag{5}$$

となるから，(4) と同じ関係が $i=I$ についても成り立つことが分かる。よって前記の q^* の定義から，すべての $i=1,\cdots,I$ について

$$q^{*'}z^{i*}=e'Vz^{i*}=e'b^i$$

が成り立つことになり，(2) から

$$q^{*'}z^{i*}=-\bar{p}_0^{*'}(x_0^{i*}-\omega_0^i)$$

となることが知られる。そしてまた (4) と (5) から，すべての $i=1,\cdots,I$ について

$$\begin{aligned} &(\bar{p}_1(1)^{*'}(x_1^i(1)^*-\omega_1^i(1)),\cdots,\bar{p}_1(S)^{*'}(x_1^i(S)^*-\omega_1^i(S))) \\ =\ &(V(1)z^{i*},\cdots,V(S)z^{i*}) \end{aligned}$$

となっているから，これで $((x^*,z^*),(\bar{p}^*,q^*))$ においては資産市場均衡の予算制約式がすべて満たされることが明らかとなった。

それゆえ，あと残された課題としては，x^{i*} が予算集合 $\bar{B}(\bar{p}^*, q^*, \omega^i)$ の中で u^i を最大にしていることさえ示せばよいわけである。このことを示すには，結局 $\bar{B}(\bar{p}^*, q^*, \omega^i) \subset B(p^*, \omega^i)$ となることのみを示せばよい。というのは，仮定により x^{i*} は $B(p^*, \omega^i)$ の中で u^i を最大にしているから，$x^{i*} \in \bar{B}(\bar{p}^*, q^*, \omega^i)$ であることがすでに示されている以上，$\bar{B}(\bar{p}^*, q^*, \omega^i)$ が $B(p^*, \omega^i)$ より小さいことさえ示されれば，x^{i*} は $\bar{B}(\bar{p}^*, q^*, \omega^i)$ の中でも u^i を最大化していることになるのである。そこで上記の主張を示すために，任意に $x^i \in \bar{B}(\bar{p}^*, q^*, \omega^i)$ を選んでみる。すると

$$\bar{p}_1(s)^{*'}(x_1^i(s) - \omega_1^i(s)) = V(s)z^i, \qquad s = 1, \cdots, S$$

であるところから，

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{S} \bar{p}_1(s)^{*'}(x_1^i(s) - \omega_1^i(s)) = \sum_{s=1}^{S} V(s)z^i \\
&= \sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{J} V^j(s)z_j^i = \sum_{j=1}^{J}\sum_{s=1}^{S} V^j(s)z_j^i \\
&= \sum_{j=1}^{J} q_j^* z_j^i = q^{*'} z^i = -\bar{p}_0^{*'}(x_0^i - \omega_0^i)
\end{aligned}$$

すなわち

$$\bar{p}_0^{*'}(x_0^i - \omega_0^i) + \sum_{s=1}^{S} \bar{p}_1(s)^{*'}(x_1^i(s) - \omega_1^i(s)) = 0$$

となり，$\bar{p}^* = p^*$ であるから，

$$x^i \in B(p^*, \omega^i)$$

という所望の結果が導かれたことになる。

こうして目下の想定の下では，(x^*, p^*) が $E(C)$ の条件付き先物市場均衡であれば，資産価格 $q^* \in R^J$ とポートフォリオ $z^* \in R^{JI}$ が存在して，$((x^*, z^*), (\bar{p}^*, q^*))$ が $E(V)$ の資産市場均衡を構成することが示されたのである。

（2）$E(V)$ の資産市場均衡配分が $E(C)$ の条件付き先物市場均衡配分になることの証明。

出発点となる資産市場均衡を $((x^*, z^*), (\bar{p}^*, q^*))$ とする。このとき q^* は無裁定条件を満たさなくてはならないのであるから，前記補題 1 の帰結によって $\beta' W = 0$ すなわち

$$-\beta_0 q^{*\prime} + \sum_{s=1}^{S} \beta_s V(s) = 0 \tag{6}$$

を満たす $\beta = (\beta_0, (\beta_s)_{s=1}^{S}) \in R_{++}^{S+1}$ が存在する。

以下では $p^* = \beta \Box \bar{p}^*$ と定義したときに，(x^*, p^*) が条件付き先物市場均衡となることを証明する。条件（ii）については自明なので，条件（i）についてその成立を示せば足りるであろう。

事実まず資産市場均衡の予算制約式から

$$\bar{p}^{*}\square(x^{i*}-\omega^{i})=Wz^{i*}$$

すなわち

$$\begin{aligned}\bar{p}_0^{*'}(x_0^{i*}-\omega_0^{i}) &= -q^{*'}z^{i*}\\ \bar{p}_1(s)^{*'}(x_1^{i}(s)^{*}-\omega_1^{i}(s)) &= V(s)z^{i*},\quad s=1,\cdots,S\end{aligned}$$

の関係が成立している。そこでこれら各式の両辺に $\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_S$ をそれぞれ掛けて，足し合わせれば，

$$\begin{aligned}&\beta_0\bar{p}_0^{*'}(x_0^{i*}-\omega_0^{i})+\sum_{s=1}^{S}\beta_s\bar{p}_1(s)^{*'}(x_1^{i}(s)^{*}-\omega_1^{i}(s))\\ &=(-\beta_0q^{*'}+\sum_{s=1}^{S}\beta_sV(s))z^{i*}\end{aligned}\tag{7}$$

を得る。ところが上に導いた (6) により，(7) の右辺は 0 となる。よってその左辺もまた 0 となり，定義から $p^{*}=\beta\square\bar{p}^{*}$ であることを考えれば，

$$p_0^{*'}(x_0^{i*}-\omega_0^{i})+\sum_{s=1}^{S}p_1(s)^{*'}(x_1^{i}(s)^{*}-\omega_1^{i}(s))=0$$

すなわち

$$p^{*'}(x^{i*}-\omega^{i})=0$$

となる。これで x^{i*} は条件付き先物市場均衡の予算制約式を満たしていることが明らかとなった。

そこで最後に x^{i*} は当該の制約条件を満たす予算集合 $B(p^{*},\omega^{i})$ の中で効用 u^{i} を最大化していることを示すことにしよう。x^{i*} は $\bar{B}(\bar{p}^{*},q^{*},\omega^{i})$ の中で u^{i} を最大にしており，また $x^{i*}\in B(p^{*},\omega^{i})$ となることはすでに分かっているわけであるから，こんどは $B(p^{*},\omega^{i})\subset\bar{B}(\bar{p}^{*},q^{*},\omega^{i})$ となることさえ示せばよい。そこで任意の $x^{i}\in B(p^{*},\omega^{i})$ について $x^{i}\in\bar{B}(\bar{p}^{*},q^{*},\omega^{i})$ となっていることを以下で示す。まず仮定から $p^{*'}(x^{i}-\omega^{i})=0$ すなわち

$$\beta_0\bar{p}_0^{*'}(x_0^{i}-\omega_0^{i})=-\sum_{s=1}^{S}\beta_s\bar{p}_1(s)^{*'}(x_1^{i}(s)-\omega_1^{i}(s))$$

という等式が成り立っている。また rank $V=S$ という仮定から，前に示したように

$$\bar{p}_1(s)^{*'}(x_1^{i}(s)-\omega_1^{i}(s))=V(s)z^{i}$$

となるような z^{i} のあることが保証される。すると (6) が成り立っていれば

$$\begin{aligned}\beta_0q^{*'}z^{i} &= \sum_{s=1}^{S}\beta_sV(s)z^{i}=\sum_{s=1}^{S}\beta_s\bar{p}_1(s)^{*'}(x_1^{i}(s)-\omega_1^{i}(s))\\ &= -\beta_0\bar{p}_0^{*'}(x_0^{i}-\omega_0^{i})\end{aligned}$$

となるので，x^i は資産市場均衡の予算制約条件を全部満たしていること，すなわち $x^i \in \bar{B}(\bar{p}^*, q^*, \omega^i)$ となること，が示されたことになる。

これで $E(V)$ の資産市場均衡の配分は $E(C)$ の条件付き先物市場均衡の配分にもなっていることが証明された。証了。

ここで経済を各主体の初期賦存量ベクトル $\omega = (\omega^1, \cdots, \omega^I)$ でパラメタライズし[12]，経済 ω における条件付き先物市場均衡配分の集合を $X_C^*(\omega)$ で，また資産市場均衡配分の集合を $X_V^*(\omega)$ であらわせば，上記の定理の帰結は，完備資産市場すなわち rank $V(\bar{p}_1) = S$ for all $\bar{p}_1 \in R_{++}^{LS}$ の想定の下では，すべての $\omega \in R_{++}^{L(S+1)I}$ に対して $X_C^*(\omega) \subset X_V^*(\omega)$，$X_V^*(\omega) \subset X_C^*(\omega)$ のいずれもが成り立つこと，すなわち $X_C^*(\omega) = X_V^*(\omega)$ が成り立つことといい換えられるであろう。

ところで条件付き先物市場経済 $E(C)$ においては，標準的な仮定 A.3.1 および A.3.2 の下で $X_C^*(\omega) \neq \varnothing$ となることが従来からよく知られている。ゆえに上記の一方の帰結から $X_C^*(\omega) \subset X_V^*(\omega)$ となることが分かれば，前記の仮定の下では資産市場均衡もまた存在することが保証されたことになる。他方，$X_C^*(\omega)$ に含まれる均衡配分がすべてパレート最適性を満たすことも従来からよく知られたところであるから，もう一方の帰結から $X_V^*(\omega) \subset X_C^*(\omega)$ となることが分かれば，やはり前記の仮定の下では資産市場の均衡配分もまたすべてパレート最適性を満たすことが知られたわけである。

よってどの価格の下でも資産市場が完備であるという仮定，すなわち rank $V(\bar{p}_1) = S$ for all $\bar{p}_1 \in R_{++}^{LS}$ という仮定が満たされていれば，すべての条件付き財ごとに先物市場が完備していなくても，資産市場と L 個の直物市場があるだけで，均衡の存在と最適性のいずれもが保証されることが知られたのである。

6

ただ前節の議論が立脚する rank $V(\bar{p}_1) = S$ for all $\bar{p}_1 \in R_{++}^{LS}$ という仮定は，きわめて強い仮定である。前にも述べたように，名目資産モデルや価値尺度財モデルの場合は V が $\bar{p}_1$ から独立の形で与えられるから rank $V(\bar{p}_1)$ はすべての $\bar{p}_1$ に対して不変であるが，一般的な実物資産モデルの場合は $\bar{p}_1$ が変わることで rank $V(\bar{p}_1)$ は影響を受け，ある価格の下では rank $V(\bar{p}_1) = S$ であっても，他の価格の下では rank $V(\bar{p}_1) < S$ となる可能性を除くことができない。

よく知られたハートの反例[13]は V のこのランク条件の変化に由来するもので，彼は一つには $X_V^*(\omega)$

(12) 経済を特徴づけるパラメターは，この他にも各主体の効用関数 u があるが，本稿では u はつねに固定されているものと考える。

(13) O. D. Hart,"On the Optimality of Equilibrium when the Market Structure is Incomplete", *Journal of Economic Theory*, December 1975. ここでの議論との関連では，とりわけ pp.427ff の

が空となるような，したがって $X_C^*(\omega) \not\subset X_V^*(\omega)$ となるような初期賦存量と資産構造をもつ経済の事例を提供し，またもう一つには $X_V^*(\omega)$ に属する均衡配分がパレート最適性を満たさないような，したがって $X_V^*(\omega) \not\subset X_C^*(\omega)$ となるような経済の事例を提供した。

では問題の仮定を多少とも緩め，それにもかかわらず資産市場均衡と条件付き先物市場均衡とのあいだになお緊密な関係が保たれることを主張することができるであろうか。この方向に議論を進めるにあたって顕著な貢献を加えたのはマギル＝シェイファー(14)であり，彼らは価値額表示の収益行列 V に完備の条件を課する代わりに，実物表示の収益行列 A についてそれが正則であるという条件を課し，後者が資産市場均衡の配分と条件付き先物市場均衡の配分とが生成的（generically）に一致するための十分条件となるばかりでなく，また必要条件ともなることを示しえた。

ここで実物資産構造 A が正則（regular）であるとは，それぞれの $s=1,\cdots,S$ について $L\times J$ の行列 $A(s)=[A^1(s)\cdots A^J(s)]$ からある行 $A_{\ell(s)}(s)=[A^1_{\ell(s)}(s)\cdots A^J_{\ell(s)}(s)]$ を選んで（相異なる s について違う財の番号を選んでもよい），$(A_{\ell(s)}(s))_{s=1}^S$ が一次独立となるようにできることをいう(15)。それができるためには明らかに $J \geqq S$ でなければならないから，この条件はやはり資産の種類数が状態数に対して十分に大きいことを意味している。また選ばれた S 個の行が一次独立でなければならないということは，それらの資産の profile が状態間で十分ヴァラエティーをもたねばならないことでもあると解されよう。ただ，$J \geqq S$ は V が完備性を満たすための必要条件であるから，A の正則性は V の完備性の必要条件は満たすが，逆に A が正則であるからといって V の完備性の条件すなわち rank $V(\bar{p}_1)=S$ が満たされるとはかぎらないことに注意しなくてはならない。その意味において A の正則性の条件は前節の rank $V(\bar{p}_1)=S$ for *all* $\bar{p}_1 \in R^{LS}_{++}$ の条件よりもはるかに弱く，事実きわめて興味深いことには，それは rank $V(\bar{p}_1)=S$ for *some* $\bar{p}_1 \in R^{LS}_{++}$ という条件と同値なのである。

補題 2　資産構造 A が正則であることは，rank $V(\bar{p}_1)=S$ for some $\bar{p}_1 \in R^{LS}_{++}$ であることと等値である。

証明(16)

Example 1 および pp.433ff の Example 2 参照。

(14) M. J. P. Magill and W. J. Shafer, “Characterisation of Generically Complete Real Asset Structures”, *Journal of Mathematical Economics*, Vol.19, 1990, Nos 1/2.

(15) A の正則性の定義については，Magill and Shafer, *op.cit.*, p.174, *ditto*, “Incomplete Markets”, pp.1540–1541 参照。

(16) この命題については，Magill and Shafer, *op.cit.*, p.174, Proposition 1, 証明については pp.191–192 参照。ただし彼らの証明は多期間モデルについてなされているため，ここでのわれわれの目的にとっては不必要に煩雑である。以下においてははるかに簡明な 2 期間モデル用の証明を示しておくこ

（1）A が正則であれば，rank $V(\bar{p}_1) = S$ for some $\bar{p}_1 \in R^{LS}_{++}$ となることの証明。

A が正則であるとは，定義からすべての $s = 1, 2, \cdots, S$ について

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A^1_{\ell(1)}(1) & \cdots & A^J_{\ell(1)}(1) \\ A^1_{\ell(2)}(2) & \cdots & A^J_{\ell(2)}(2) \\ \vdots & & \vdots \\ A^1_{\ell(S)}(S) & \cdots & A^J_{\ell(S)}(S) \end{bmatrix} = S$$

となるような財番号 $\ell(s)$ を s ごとに選びうるということである。そこでまず

$$\bar{p}_1(s)^e = (0, \cdots, 0, \overset{\ell(s)\text{ 番目}}{1}, 0, \cdots, 0), \quad s = 1, \cdots, S$$

とすると，

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1(1)^e & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{p}_1(2)^e & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{p}_1(S)^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1(1) & \cdots & A^J(1) \\ A^1(2) & \cdots & A^J(2) \\ \vdots & & \vdots \\ A^1(S) & \cdots & A^J(S) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} A^1_{\ell(1)}(1) & \cdots & A^J_{\ell(1)}(1) \\ A^1_{\ell(2)}(2) & \cdots & A^J_{\ell(2)}(2) \\ \vdots & & \vdots \\ A^1_{\ell(S)}(S) & \cdots & A^J_{\ell(S)}(S) \end{bmatrix}$$

となり，左辺の行列のランクは上記のところから S である。よって十分に小さく $\epsilon > 0$ を選べば

$$\bar{p}_1(s) = \bar{p}_1(s)^e + (\epsilon, \cdots, \epsilon)$$

としても

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{p}_1(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{p}_1(2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{p}_1(S) \end{bmatrix} A = \text{rank } V(\bar{p}_1) = S$$

となることに変わりはなく，上記のランク条件を満たす $\bar{p}_1 \in R^{LS}_{++}$ の存在が示されたことになる。

とにした。

（2）rank $V(\bar{p}_1) = S$ for some $\bar{p}_1 \in R_{++}^{LS}$ であれば A が正則となることの証明。

$$V(\bar{p}_1) = \begin{bmatrix} \bar{p}_1(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{p}_1(2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{p}_1(S) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1(1) & \cdots & A^J(1) \\ A^1(2) & \cdots & A^J(2) \\ \vdots & & \vdots \\ A^1(S) & \cdots & A^J(S) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \sum_{\ell=1}^L \bar{p}_{\ell 1}(1) A_\ell^1(1) & \cdots & \sum_{\ell=1}^L \bar{p}_{\ell 1}(1) A_\ell^J(1) \\ \sum_{\ell=1}^L \bar{p}_{\ell 1}(2) A_\ell^1(2) & \cdots & \sum_{\ell=1}^L \bar{p}_{\ell 1}(2) A_\ell^J(2) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{\ell=1}^L \bar{p}_{\ell 1}(S) A_\ell^1(S) & \cdots & \sum_{\ell=1}^L \bar{p}_{\ell 1}(S) A_\ell^J(S) \end{bmatrix}$$

に含まれている $\bar{p}_1(s)$，$s = 1, 2, \cdots, S$ が仮定のランク条件を満たす $\bar{p}_1$ であるとすれば，rank $V(\bar{p}_1) = S$ であるところから，最右辺の $S \times J$ 行列から S 本の一次独立な列ベクトルを選ぶことができる。そこで一般性を失うことなく，左寄り第 1 列から第 S 列までが当該の列ベクトルであるとして，それらからつくられる $S \times S$ の行列を $\tilde{V}(\bar{p}_1)$，それらに応じて並べかえた $A_\ell(s)$ の成分の最初の S 個からなる列ベクトルを $(\tilde{A}_\ell^1(s), \cdots, \tilde{A}_\ell^S(s))$ のように書けば，

$$\tilde{V}(\bar{p}_1) = \begin{bmatrix} \sum_{\ell=1}^L \bar{p}_{\ell 1}(1) \tilde{A}_\ell^1(1) & \cdots & \sum_{\ell=1}^L \bar{p}_{\ell 1}(1) \tilde{A}_\ell^S(1) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{\ell=1}^L \bar{p}_{\ell 1}(S) \tilde{A}_\ell^1(S) & \cdots & \sum_{\ell=1}^L \bar{p}_{\ell 1}(S) \tilde{A}_\ell^S(S) \end{bmatrix}$$

となる。ここで上式の両辺の行列式を考えることにすれば，まずつくり方から

$$|\tilde{V}(\bar{p}_1)| \neq 0$$

であるから，右辺の行列式もまた $\neq 0$ となるほかはない。ところがそれを変形すると，

$$\begin{vmatrix} \sum_{\ell=1}^L \bar{p}_{\ell 1}(1) \tilde{A}_\ell^1(1) & \cdots & \sum_{\ell=1}^L \bar{p}_{\ell 1}(1) \tilde{A}_\ell^S(1) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{\ell=1}^L \bar{p}_{\ell 1}(S) \tilde{A}_\ell^1(S) & \cdots & \sum_{\ell=1}^L \bar{p}_{\ell 1}(S) \tilde{A}_\ell^S(S) \end{vmatrix}$$
$$= \sum_{\ell(1)=1}^L \bar{p}_{\ell(1)1}(1) \sum_{\ell(2)=1}^L \bar{p}_{\ell(2)1}(2) \cdots \sum_{\ell(S)=1}^L \bar{p}_{\ell(S)1}(S) \begin{vmatrix} \tilde{A}_{\ell(1)}^1(1) & \cdots & \tilde{A}_{\ell(1)}^S(1) \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{A}_{\ell(S)}^1(S) & \cdots & \tilde{A}_{\ell(S)}^S(S) \end{vmatrix}$$

となるので，上記の帰結から少なくとも一つの $(\ell(1), \ell(2), \cdots, \ell(S))$ の組み合わせに対しては

$$\begin{vmatrix} \tilde{A}^1_{\ell(1)}(1) & \cdots & \tilde{A}^S_{\ell(1)}(1) \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{A}^1_{\ell(S)}(S) & \cdots & \tilde{A}^S_{\ell(S)}(S) \end{vmatrix} \neq 0$$

となるのでなくてはならず，これはそれら S 個の行ベクトル $\tilde{A}_{\ell(s)}(s) = (\tilde{A}^1_{\ell(s)}(s), \cdots, \tilde{A}^S_{\ell(s)}(s))$，$s = 1, \cdots, S$ が一次独立であるということにほかならない。ところがそのそれぞれの S 個の成分に残余の $J - S$ 個の成分を付加して $A_{\ell(s)}(s) = (\tilde{A}_{\ell(s)}(s), \tilde{\tilde{A}}_{\ell(s)}(s))$ としても，$A_{\ell(s)}(s)$，$s = 1, \cdots, S$ がやはり一次独立となることに変わりはない。ゆえに上記の帰結により，$A(1), \cdots, A(S)$ のそれぞれから 1 個ずつ行ベクトル $A_{\ell(1)}(1), \cdots, A_{\ell(S)}(S)$ を選んでそれらが一次独立となるようにできることが知られたわけであり，正則性の定義から A は正則となる。証了。

さてつぎに資産市場均衡の配分と条件付き先物市場均衡の配分が「生成的に」一致するとは，それらが経済のパラメター ω の全空間 $R^{L(S+1)I}_{++}$ において一致するとはかぎらないが，その開稠密かつ補集合が測度ゼロとなるような部分集合において一致するということをいっている。換言すれば，それらの配分はある ω の下では一致しないかもしれないが，そのような ω をもつ経済の集合は全経済の集合の中で閉かつ測度ゼロとなるという意味でほとんど無視しうるということである。ゆえに，もし A の正則性の仮定の下で前記の主張が証明されるならば，前記のハートの二つの反例はいずれも A の正則性を満たす事例であるところから，「きわめてありそうにない」事例であることになろう。

定理 2　資産構造 A をもつ経済 $E(A)$ において，仮定 A.3.1，A.3.2 にさらに加え，A が正則であると仮定されれば，そこでの資産市場均衡配分は生成的に経済 $E(C)$ の条件付き先物市場均衡配分と一致する。

証明(17)

（1）$E(C)$ の条件付き先物市場均衡配分が生成的に $E(A)$ の資産市場均衡配分になることの証明。

当該の条件付き先物市場均衡が rank $V(p_1^*) = S$ を満たす p_1^* を与える場合には，定理 1 とまったく同様の推論を用いることで，その条件付き先物市場均衡の配分は資産市場均衡配分となっていることがいえる。したがって以下の所論では，条件付き先物市場均衡が rank $V(p_1^*) < S$ となるよう

（17） Magill and Shafer, *op.cit.*, p.175, Theorem 1，証明は pp.182ff. また *ditto*, “Incomplete Markets”, pp.1541–1546, Theorem 1, 3 および 5 をも参照。なお前記したように，マギル＝シェイファーは A の正則性が，二つの均衡配分が生成的に一致するための必要条件ともなることを示しているが，本稿ではその点については立ち入らない。

な p_1^* を与える経済があったとして，そのような経済の集合が全経済の集合の中では閉かつ測度ゼロにしかならないことを示すことにしたい。

そのための手順として，はじめにまず

$$K_1 = \{p_1 \in R^{LS} | \ \mathrm{rank}\ V(p_1) < S\}$$

とするとき，A が正則であれば，K_1 は R^{LS} において測度ゼロの閉集合となることを示す。

$$V(p_1) = \begin{bmatrix} p_1(1)A^1(1) & \cdots & p_1(1)A^J(1) \\ \vdots & & \vdots \\ p_1(S)A^1(S) & \cdots & p_1(S)A^J(S) \end{bmatrix}$$

であるから，その各行は $p_1 = (p_1(s))_{s=1}^S$ の線形写像 $L_S : R^{LS} \to R^J$，$s = 1, \cdots, S$ と考えることができる。そこで

$$V(p_1) = \begin{bmatrix} L_1(p_1) \\ L_2(p_1) \\ \vdots \\ L_S(p_1) \end{bmatrix}$$

と書き，

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \{p_1 \in R^{LS} | \ \mathrm{rank}\ V(p_1) = S\} \\ &= \{p_1 \in R^{LS} | \ (L_s(p_1))_{s=1}^S \text{は一次独立}\ \} \end{aligned}$$

と定義すれば，それに対してつぎの補題を適用することができる。[18]

補題 3　$L_s : R^{LS} \to R^J$，$s = 1, \cdots, S$ を線形写像とし，$\mathscr{L} = \{p_1 \in R^{LS} | (L_s(p_1))_{s=1}^S$は一次独立 $\}$ とすれば，$\mathscr{L}$ は開集合，かつ $\mathscr{L} \neq \varnothing$ であれば，$\mathscr{L}^C$ は $LS-1$ 次元多様体の有限個の和集合に含まれる。

証明

この補題の証明は逆像定理を用いて三つの系を導くことから成るが，推論が多少長くなるので，末尾第 7 節に回す。

定理の仮定から A が正則であれば，補題 2 で示したように rank $V(p_1) = S$ for some $p_1 \in R_{++}^{LS}$ であり，$\mathscr{L} \neq \varnothing$ である。そして $\mathscr{L}$ の定義から $\mathscr{L}^C = K_1$ にほかならないから，補題 3 の帰結から

(18)　以下で考える多様体は，すべて有限次元の C^∞ 級多様体とする。

K_1 は閉集合となり，かつそれは $LS-1$ 次元多様体の有限個の和集合に含まれることになる。ところが R^{LS} の中の $LS-1$ 次元多様体の測度はゼロであるから，[19] それらの有限個の和集合の測度もまたゼロとなる。よってその部分集合である K_1 の測度もゼロとなる。そして

$$K = R^L \times K_1$$

とすれば，明らかに K もまた測度ゼロの閉集合となる。[20]

これで rank $V(p_1) < S$ となるような価格の集合は $R^{L(S+1)}$ において測度ゼロの閉集合になることが示されたので，そのことからこの K に含まれる価格を均衡価格とするような経済 ω の集合が全経済の集合の中で測度ゼロの閉集合になるという所望の結果を導き出すことにしたい。

まず $E(C)$ における各個別主体の需要関数を $f^i(p, p\,\omega^i)$, $i = 1, \cdots, I$ で記し，社会的超過需要関数を

$$F(p, \omega^1, \cdots, \omega^I) = \sum_{i=1}^{I}(f^i(p, p\,\omega^i) - \omega^i)$$

で定義する。すると市場均衡条件は $F(p,\omega) = 0$ となるが，よく知られているようにワルラス法則から独立な方程式の数は 1 個だけ減るから，当該の条件は $\hat{F} = (F_1, \cdots, F_{L(S+1)-1})$, $\hat{F}(p,\omega) = 0$ として示せばよく，同時にまた価格 p についても以下ではそれを基準化した価格集合 $\hat{P} = \{p \in R^{L(S+1)}_{++} |\, p_{10} = 1\}$ に限定して考えていけばよいことになる。

さて，正則経済の理論によれば，経済全体の集合を $\Omega = R^{L(S+1)I}_{++}$ とするとき，$\omega \in \Omega$ が正則であるとは，$\hat{F}(p,\omega) = 0$ を満たすすべての p について rank $D_p\hat{F}(p,\omega) = L(S+1) - 1$ の条件が満たされることである。そのような正則経済の集合を Ω_R で記せば，ドブリュー以来よく知られてきたように，Ω_R は Ω の中でフル・メジャー[21]の開集合となる。さらに，$\bar{\omega}$ を Ω_R から任意に選べば，$\bar{\omega}$ の近傍 $U_{\bar{\omega}}$ が存在し，その $U_{\bar{\omega}}$ に含まれるすべての ω についてそれぞれ均衡価格を対応させる，すなわち $\hat{F}(\psi^j(\omega), \omega) = 0$ を満たす無限回連続微分可能な関数 $\psi^j : U_{\bar{\omega}} \to \hat{P}, j = 1, \cdots, r$ が存在することも同様によく知られている。ここで r が $\bar{\omega}$ に対応する均衡点の個数であることはいうまでもない。すると $\hat{F}(\psi^j(\omega), \omega) = 0$ を ω で微分することにより $D_p\hat{F} \cdot D_\omega\psi^j + D_\omega\hat{F} = 0$ が得られ，$\bar{\omega} \in \Omega_R$ であるところから $D_p\hat{F}$ には逆行列 $(D_p\hat{F})^{-1}$ が存在するから

$$D_\omega\psi^j = -(D_p\hat{F})^{-1}D_\omega\hat{F}$$

となる。ところが右辺の $D_\omega\hat{F}$ のランクは $L(S+1) - 1$ となり，[22] この行列に正則行列 $-(D_p\hat{F})^{-1}$

(19) たとえば，V. Guillemin and A. Pollack, *Defferential Topology*, 1974, Ch.1, §7, Exercises, 3, 三村 護 訳『微分位相幾何学』，1998, 第 1 章第 7 節，演習問題 3 参照。

(20) たとえば，Guillemin and Pollack, *op.cit.*, Ch.1, §7, Exercises, 2, 三村 訳，第 1 章第 7 節，練習問題 2 参照。

(21) 補集合の測度が 0 となることを以下フル・メジャーと略記する。

(22) Mas-Colell, Whinston, and Green, *op.cit.*, p.596, Proposition 17. D.4。

を掛けてもランクは変わらないので

$$\text{rank } D_\omega \psi^j = L(S+1) - 1 \tag{8}$$

となることが分かる。

ここで均衡価格が K に含まれるような $\omega \in U_{\bar{\omega}}$ の集合を

$$(\psi^j)^{-1}(K) = \{\omega \in U_{\bar{\omega}} | \psi^j(\omega) \in K\}$$

のように定義する。すると，(8) がいえていればつぎの補題を用いることができ，$(\psi^j)^{-1}(K)$ が測度ゼロの閉集合となることを示すことができるのである。

補題 4　$U_{\bar{\omega}} \subset R^{L(S+1)I}$ が開集合で，$\psi^j : U_{\bar{\omega}} \to \mathbb{R}^{L(S+1)-1}$ は沈め込みであるとする。そのとき $K \subset R^{L(S+1)-1}$ が測度ゼロの閉集合であるならば，$(\psi^j)^{-1}(K)$ は測度ゼロの閉集合となる。

証明

この補題の証明も，補題 3 の場合と同様，最後の第 7 節に回す。

上記補題の条件の中で $\psi^j : U_{\bar{\omega}} \to R^{L(S+1)-1}$ が沈め込みであるというのは $D_\omega \psi^j : U_{\bar{\omega}} \to R^{L(S+1)-1}$ が上への写像であるということであり, さらにそれはすべての $\omega \in U_{\bar{\omega}}$ について rank $D_\omega \psi^j = L(S+1) - 1$ ということと等義である。よって (8) によりこの補題が使えることになるのである。なお K は $R^{L(S+1)}$ において測度ゼロの閉集合なので，価格を基準化した $R^{L(S+1)-1}$ においてもやはり測度ゼロの閉集合となっている。

ここで $U_{\bar{\omega}}$ の中で均衡価格が K に含まれないほうの経済の集合を

$$U'_{\bar{\omega}} = U_{\bar{\omega}} \setminus \bigcup_{j=1}^{r} (\psi^j)^{-1}(K)$$

と定義する。すると $U'_{\bar{\omega}}$ は補題 4 より $U_{\bar{\omega}}$ の中でフル・メジャーの開集合になっている。そして作り方から明らかに，そこに含まれる ω の下では，均衡価格はすべて rank $V(p_1) = S$ の条件を満たすものばかりとなる。

以上を準備として, 証明を完成させる最後の詰めにとりかかることにしよう。まずは $\bar{\omega}_k \in \varOmega_R$, $k = 1, 2, \cdots$ と，そのそれぞれの近傍 $U_{\bar{\omega}_k}$ を適当に選ぶことによって，第二可算公理より

$$\varOmega_R = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{\bar{\omega}_k}$$

とできることに注意する。一方前記の $U'_{\bar{\omega}_k}$ を用いて

$$\varOmega' = \bigcup_{k=1}^{\infty} U'_{\bar{\omega}_k}$$

と定義すれば，

$$
\begin{aligned}
\Omega' &= \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(U_{\bar{\omega}_k}\setminus\bigcup_{j=1}^{r_k}(\psi^j)^{-1}(K)\right)\\
&\supset \bigcup_{k=1}^{\infty}U_{\bar{\omega}_k}\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{r_k}(\psi^j)^{-1}(K)\\
&= \Omega_R\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{r_k}(\psi^j)^{-1}(K)
\end{aligned}
$$

となるので，$\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{r_k}(\psi^j)^{-1}(K)$ が $R^{L(S+1)I}$ において測度ゼロであることより，Ω' は Ω_R の中でフル・メジャーの開集合となる。そして前述のように Ω_R が Ω の中でフル・メジャーの開集合なので，それらを合わせて考えれば Ω' が Ω の中でフル・メジャーの開集合になることがいえる。そして定義により Ω' に含まれる ω での均衡価格は決して K に含まれることはなく，すべて rank $V(p_1)=S$ の条件を満たしている。

よって，A が正則ならフル・メジャーの経済の開集合 $\Omega'\subset\Omega$ が存在し，そこでは条件付き先物市場の均衡がかならず資産市場均衡になっていることが証明された。

（2）$E(A)$ の資産市場均衡配分が生成的に $E(C)$ の条件付き先物市場均衡配分になることの証明。

所与の資産市場均衡を $((x^*,z^*),(\bar{p}^*,q^*))$ と記す。そこでも rank $V(\bar{p}_1^*)=S$ となっていれば，前の場合と同様，x^* は条件付き先物市場の均衡配分となっていることになる。ゆえに以下ではもっぱら rank $V(\bar{p}_1^*)<S$ となるような事態を考え，均衡価格としてそのような $\bar{p}_1^*$ をもつ経済があったとしても，その集合は閉かつ測度ゼロにしかならないことを示す。

目下の場合は，価格が変化するとき V のランクもまた変化する可能性を除けないので，価格の変わりようによっては予算集合ひいては超過需要関数に不連続性が生じる惧れがある。そこでそのような不都合を避けるために，以下では $\langle V\rangle$ の次元を $0\leqq\rho<S$ の ρ に固定して，rank ρ の $\mathscr{M}_\rho$ 均衡という人工的な媒介概念をつくり，それを証明の補助手段として用いるという工夫をする。いまそのために R^S の中で ρ 次元をもつあらゆる線形部分空間から成る集合を $G^\rho(R^S)$ であらわし，その成分となるそれぞれの ρ 次元線形部分空間を $\mathscr{V}\in G^\rho(R^S)$ と記して部分空間 $\langle V\rangle$ を $\mathscr{V}$ で代置することにすれば，補助手段となる上記 $\mathscr{M}_\rho$ 均衡はつぎのように定義される。すなわち

経済 $E(A)$ におけるランク ρ の $\mathscr{M}_\rho$ 均衡とは，下記の諸条件を満たす $(x^*,p^*,\mathscr{V}^*)\in R_+^{L(S+1)I}\times R_{++}^{L(S+1)}\times G^\rho(R^S)$ である。

（i）（a）取引主体 $i=1$ については x^{1*} は

$$
B(p^*,\omega^1)=\{x^1\in R_+^{L(S+1)}\,|\,p^{*'}(x^1-\omega^1)=0\}
$$

の中で $u^1(x^1)$ を最大にしている。

（b）取引主体 $i=2,\cdots,I$ については x^{i*} は

$$\tilde{B}(p^*, \mathscr{V}^*, \omega^i) = \left\{ x^i \in R_+^{L(S+1)} \;\middle|\; \begin{array}{l} p^{*'}(x^i - \omega^i) = 0 \\ p_1^{*'}\square(x_1^i - \omega_1^i) \in \mathscr{V}^* \end{array} \right\}$$

の中で $u^i(x^i)$ を最大にしている。

(ii)
$$\sum_{i=1}^{I}(x^{i*} - \omega^i) = 0$$

(iii)
$$\langle V(p_1^*)\rangle = \mathscr{V}^*$$

証明の手順としては，まず $((x^*, z^*), (\bar{p}^*, q^*))$ をランク ρ, $0 \leqq \rho < S$ の資産市場均衡とするとき，ある $\beta \in R_{++}^{S+1}$ が存在して，$(x^*, p^*, \langle V(p_1^*)\rangle)$, $p^* = \beta\square\bar{p}^*$ が上記の $\mathscr{M}_\rho$ 均衡となることを示す。

事実，資産市場均衡での主体 1 のラグランジュ乗数を $\lambda^1 = (\lambda_0^1, \lambda_1^1, \cdots, \lambda_S^1)$ とし，それを用いて $\beta = \lambda^1$ と定義してしまえば，$(x^*, p^*, \langle V(p_1^*)\rangle)$, $p^* = \beta\square\bar{p}^*$ が $\mathscr{M}_\rho$ 均衡になるのである。

なぜなら，主体 1 の最大化問題は $\bar{B}(\bar{p}^*, q^*, \omega^1)$ の中で $u^1(x^1)$ を最大にすることなので，その問題のラグランジュ式はつぎのように書くことができる。

$$\begin{aligned} L^1 \;=\; & u^1(x^1) - \lambda_0^1[q^{*'}z^1 + \bar{p}_0^{*'}(x_0^1 - \omega_0^1)] \\ & - \sum_{s=1}^{S}\lambda_s^1[-V(s, \bar{p}_1^*)z^1 + \bar{p}_1^*(s)'(x_1^1(s) - \omega_1^1(s))] \end{aligned} \tag{9}$$

したがって，その 1 階の条件より

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^1(x^{1*}, z^{1*}, \lambda^1)}{\partial x_{\ell 0}^1} &= \frac{\partial u^1}{\partial x_{\ell 0}^1} - \lambda_0^1\bar{p}_{\ell 0}^* = 0,\ \ell = 1, \cdots, L \\ \frac{\partial L^1(x^{1*}, z^{1*}, \lambda^1)}{\partial x_{\ell 1}^1(s)} &= \frac{\partial u^1}{\partial x_{\ell 1}^1(s)} - \lambda_s^1\bar{p}_{\ell 1}(s)^* = 0 \\ & \qquad \ell = 1, \cdots, L,\ s = 1, \cdots, S \end{aligned} \tag{10}$$

が成り立っているので，$Du^1(x^{1*}) \in R_{++}^{L(S+1)}$, $\bar{p}^* \in R_{++}^{L(S+1)}$ であるところから，$\beta \in R_{++}^{S+1}$ が成り立つことは明らかである。また仮定から $\dim\langle V(\bar{p}_1^*)\rangle = \rho$ であるから，$\beta\square\bar{p}^* = p^*$ であることを考えれば，$\dim\langle V(p_1^*)\rangle = \rho$ となることも明らか。ゆえに $\mathscr{V}^* = \langle V(p_1^*)\rangle$ と定義すれば，$\mathscr{M}_\rho$ 均衡の条件（iii）はおのずから満たされる。また条件（ii）はもともと両均衡で共通であるから，あとは当該の資産市場均衡が上記条件（i）の（a）と（b）をともに満たすことが示されればよい。

そこで最初に（i）（a）の成立を示すことから始めるが，そのためには x^{1*} が $\bar{B}(\bar{p}^*, q^*, \omega^1)$ の中で $u^1(x^1)$ を最大化していれば，同じく $B(p^*, \omega^1)$ の中でも $u^1(x^1)$ を最大化していることを示せばよい。いま $p^* = \beta\square\bar{p}^*$, $\beta = \lambda^1$ であることを考慮すれば，後者の問題のラグランジュ式は，μ をラグランジュ乗数として

$$
\begin{aligned}
\Lambda^1 &= u^1(x^1) - \mu(p^{*'}(x^1 - \omega^1)) \\
&= u^1(x^1) - \mu[\lambda_0^1 \bar{p}_0^{*'}(x_0^1 - \omega_0^1) \\
&\qquad + \sum_{s=1}^{S} \lambda_s^1 \bar{p}_1(s)^{*'}(x_1^1(s) - \omega_1^1(s))]
\end{aligned}
$$

と書けるから，上記の帰結を示すには，x^{1*} の点で

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \Lambda^1(x^{1*},\mu)}{\partial x_{\ell 0}^1} = \frac{\partial u^1(x^{1*})}{\partial x_{\ell 0}^1} - \mu\lambda_0^1 \bar{p}_{\ell 0}^* = 0, \quad \ell = 1,\cdots,L \\
&\frac{\partial \Lambda^1(x^{1*},\mu)}{\partial x_{\ell 1}^1(s)} = \frac{\partial u^1(x^{1*})}{\partial x_{\ell 1}^1(s)} - \mu\lambda_0^1 \bar{p}_{\ell 1}(s)^* = 0, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \ell = 1,\cdots,L,\ s = 1,\cdots,S \\
&\frac{\partial \Lambda^1(x^{1*},\mu)}{\partial \mu} = p^{*'}(x^{1*} - \omega^1) = 0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

をすべて満たすような μ が存在することを示せば足りる。

ところが（10）が成り立っているから，μ を 1 とすれば，（11）のはじめの 2 組の条件が満たされることは明らかである。つぎに予算制約式 $p^{*'}(x^{1*} - \omega^1) = 0$ の成立を示すために，（9）から z^1 に関する 1 階の条件を求めれば，

$$
\frac{\partial L^1(x^{1*}, z^{1*}, \lambda^1)}{\partial z_j^1} = -\lambda_0^1 q_j^* + \lambda_s^1 V^j(s, \bar{p}_1^*) = 0,\ j = 1,\cdots,J
$$

となり，これは資産市場均衡においては

$$
(\lambda_0^1, \lambda_1^1, \cdots, \lambda_S^1)
\begin{bmatrix}
-q_1^* & \cdots & -q_J^* \\
V^1(1,\bar{p}_1^*) & \cdots & V^J(1,\bar{p}_1^*) \\
\vdots & & \vdots \\
V^1(S,\bar{p}_1^*) & \cdots & V^J(S,\bar{p}_1^*)
\end{bmatrix} = 0
$$

すなわち

$$
\lambda^1 W(q^*, V(\bar{p}_1^*)) = 0
$$

が成り立つことを意味している。この条件を用いれば，定理 1 の証明（2）でやったのとまったく同じ推論で，資産市場均衡の予算制約式 $\bar{p}^{*'}\Box(x^{1*} - \omega^1) = Wz^{1*}$ から $p^{*'}(x^{1*} - \omega^1) = 0$ が導かれることは明らかであろう。よって $\mu = 1$ に対して x^{1*} は 1 階の条件（11）をことごとく満たしていることになり，(i)（a）の成り立つことが判明した。

そこでつぎに (i) (b) のほうも成り立つことを示す。そのためには，$\bar{B}(\bar{p}^*, q^*, \omega^i) = \tilde{B}(p^*, \mathscr{V}^*, \omega^i)$ となることを示せば十分である。まず $x^i \in \bar{B}(\bar{p}^*, q^*, \omega^i)$ とすれば，$\bar{p}^{*'}\Box(x^i - \omega^i) = Wz^i$ の条件より，(a) と同様にして $p^{*'}(x^i - \omega^i) = 0$ となることが分かる。また $\bar{p}_1(s)^{*'}(x_1^i(s) - \omega_1^i(s)) = V(s, \bar{p}_1^*)z^i$ であるところから $p_1(s)^{*'}(x_1^i(s) - \omega_1^i(s)) = \lambda_s V(s, \bar{p}_1^*)z^i$ となるので，$p_1^{*'}\Box(x_1^i - \omega_1^i) = V(p_1^*)z^i$ す

なわち $p_1^{*'}\square(x_1^i-\omega_1^i)\in\langle V(p_1^*)\rangle$ となり，$p_1^{*'}\square(x_1^i-\omega_1^i)\in\mathscr{V}^*$ となることも明らかである。よって $\bar{B}(\bar{p}^*,q^*,\omega^i)\subset\tilde{B}(p^*,\mathscr{V}^*,\omega^i)$ となることが示された。

一方 $x^i\in\tilde{B}(p^*,\mathscr{V}^*,\omega^i)$ とすれば，$p^{*'}(x^i-\omega^i)=0$ であるところから

$$\lambda_0^1\bar{p}_0^{*'}(x_0^i-\omega_0^i)+\sum_{s=1}^{S}\lambda_s^1\bar{p}_1(s)^{*'}(x_1^i(s)-\omega_1^i(s))=0 \tag{12}$$

が成り立ち，また $p_1^{*'}\square(x_1^i-\omega_1^i)\in\mathscr{V}^*=\langle V(p_1^*)\rangle$ であるところから

$$\begin{aligned}\lambda_1^1\bar{p}_1(1)^{*'}(x_1^i(1)-\omega_1^i(1))&=\lambda_1^1V(1,\bar{p}_1^*)z^i\\ &\vdots\\ \lambda_S^1\bar{p}_1(S)^{*'}(x_1^i(S)-\omega_1^i(S))&=\lambda_S^1V(S,\bar{p}_1^*)z^i\end{aligned} \tag{13}$$

を満たす $z^i\in R^J$ が存在することになる。すると，まず（13）からただちに

$$\bar{p}_1(s)^{*'}(x_1^i(s)-\omega_1^i(s))=V(s,\bar{p}_1^*)z^i,\ s=1,\cdots,S$$

が得られ，さらに（12），（13）および前に示した $\lambda^1W=0$ から

$$\begin{aligned}\lambda_0^1\bar{p}_0^{*'}(x_0^i-\omega_0^i)&=-\sum_{s=1}^{S}\lambda_s^1\bar{p}_1(s)^{*'}(x_1^i(s)-\omega_1^i(s))\\ &=-\sum_{s=1}^{S}\lambda_s^1V(s,\bar{p}_1^*)z^i=-\lambda_0^1q^{*'}z^i\end{aligned}$$

となって，

$$\bar{p}_0^{*'}(x_0^i-\omega_0^i)=-q^{*\prime}z^i$$

が導かれる。これで $\tilde{B}(p^*,\mathscr{V}^*,\omega^i)\subset\bar{B}(\bar{p}^*,q^*,\omega^i)$ となることが示された。

よって前半の帰結と併せて $\bar{B}(\bar{p}^*,q^*,\omega^i)$ と $\tilde{B}(p^*,\mathscr{V}^*,\omega^i)$ はまったく同一の集合に帰着し，x^{i*} が前者の中で $u^i(x^i)$ を最大にしていれば，後者の中でも $u^i(x^i)$ を最大にしていることになる。

以上の推論をつうじて，$((x^*,z^*),(\bar{p}^*,q^*))$ がランク ρ の資産市場均衡であれば，$p^*=\lambda^1\square\bar{p}^*$ とすることによって，$(x^*,p^*,\langle V(p_1^*)\rangle)$ がランク ρ の $\mathscr{M}_\rho$ 均衡になることが示された。

つづくステップとしては，そのようなランク ρ の $\mathscr{M}_\rho$ 均衡においては独立な方程式の数が変数の数を上回ること，それゆえに生成的には解をもちえないことを示したい。前の議論に準じて主体 1 の需要関数を $f^1(p,\omega^1)$，主体 $i=2,\cdots,I$ の需要関数を $f^i(p,\mathscr{V},\omega^i)$ とし，社会的な超過需要関数を $F(p,\mathscr{V},\omega^1,\cdots,\omega^I)=f^1(p,\omega^1)-\omega^1+\sum_{i=2}^{I}(f^i(p,\mathscr{V},\omega^i)-\omega^i)$ とするとき，$\mathscr{M}_\rho$ の均衡方程式は

$$
\begin{aligned}
&F(p, \mathscr{V}, \omega) = 0 \\
&\langle V(p_1) \rangle = \mathscr{V} \\
&\text{rank } V(p_1) = \rho < S
\end{aligned}
\tag{14}
$$

であらわされる。

ここで上記の目標を達成するための手順として，K_1 をやはり前に準じ

$$K_1 = \{p_1 \in R^{LS} | \text{rank } V(p_1) < S\}$$

と定義することにしよう。補題 3 のすぐあとで示したように，A が正則であれば K_1 は $LS-1$ 次元多様体の有限個の和集合に含まれることになるから，それら有限個の $LS-1$ 次元多様体を $M_k, k = 1, \cdots, r$ とすることによって

$$K_1 \subset \bigcup_{k=1}^{r} M_k$$

と書くことができる。これら M_k のそれぞれに含まれる p_1 について，さらに V を

$$V = \begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \end{bmatrix}, \text{ここで } V_\alpha \text{は } (S-\rho) \times J,\ V_\beta \text{は } \rho \times J$$

のように分割し，rank $V_\beta(p_1) = \rho$ となるような p_1 の集合を

$$M'_k = \{p_1 \in M_k | \text{rank } V_\beta(p_1) = \rho\}$$

と定義しておく。

さて所与のランク ρ の資産市場均衡に対応する $\mathscr{M}_\rho$ 均衡 $(p^*, \mathscr{V}^*) \in R^{L(S+1)}_{++} \times G^\rho(R^S)$ が均衡方程式（14）によってあらわされるとすれば，状態 s の順序を適当に入れ替えることにより，ある $(S-\rho) \times \rho$ の行列 E が存在して，$\mathscr{M}_\rho$ 均衡はまたつぎのような方程式

$$\hat{F}(p, E, \omega) = 0, \quad [I\ E]\ V(p_1) = 0 \tag{15}$$

によってもあらわしうることになる。以下その点について若干立ち入った説明を加えておこう。

まず $\mathscr{V}$ は R^S の中の ρ 次元の線形部分空間であるから，いま $\mathscr{V}$ に直交する線形部分空間を $\mathscr{V}^\perp = \{v \in R^S | v \perp \mathscr{V}\}$ とすれば，$\mathscr{V} \in G^\rho(R^S)$ であるところから，$\mathscr{V}^\perp \in G^{S-\rho}(R^S)$ となり，よって $\mathscr{V}^\perp$ の基底として $S-\rho$ 本の一次独立なベクトルが存在することになる。いまそれらを $B_1, \cdots, B_{S-\rho} \in R^S$ と書き，それらを行ベクトルとみなしてタテに並べた行列を B と書けば，B はいうまでもなく $(S-\rho) \times S$ の行列で，

$$\mathscr{V} = \{v \in R^S | Bv = 0\}$$

となる。$B_1, \cdots, B_{S-\rho}$ は一次独立であるから，rank $B = S - \rho$ であり，よって s の順序の入れ替え，すなわち B の列順の並べ替えを行えば，$B' = [B_1\ B_2]$，ここで B_1 は $(S-\rho) \times (S-\rho)$，B_2 は $(S-\rho) \times \rho$ の行列で，$|B_1| \neq 0$，とすることができる。すると $[B_1\, B_2]v = 0$ から $B_1^{-1}[B_1\ B_2]v = 0$ となり，$[I\ \ B_1^{-1}B_2]v = 0$ となるから，$E = B_1^{-1}B_2$ とおくことによって

$$\mathscr{V} = \{v \in R^S |\ [\,I\ E\,]\ v = 0\}$$

と書きあらわすことができるのである。

上の式から $\mathscr{V}$ は E の関数とみなせるので，(14) の $F(p, \mathscr{V}, \omega)$ に $\mathscr{V}(E)$ を代入し，便宜上同じ F を使って $F(p, E, \omega) = 0$ と書いたものから余分の方程式を 1 個落せば，(15) の $\hat{F}(p, E, \omega) = 0$ を得る。また $\langle V(p_1) \rangle$ は $V(p_1)$ の列ベクトル $V^1, \cdots, V^J$ が張る空間であるから，$\langle V(p_1) \rangle = \mathscr{V} = \{v \in R^S | [I\,E]v = 0\}$ は，すべての $j = 1, \cdots, J$ について $[\,I\ E\,]\ V^j = 0$ すなわち $[\,I\ E\,]\ (V^1, \cdots, V^J) = 0$ が成り立つことにひとしく，これは (15) の第 2 式 $[I\,E]V(p_1) = 0$ が成り立つことにほかならない。

さて，(15) に登場する変数は $p = (p_0, p_1), E, \omega$ であるが，この方程式の定義域についてもう少し詳しく検討してみたい。まず E は $(S-\rho) \times \rho$ の行列なので，$E \in R^{(S-\rho)\rho}$ とみなすことができる。また $\omega \in R_{++}^{L(S+1)I}$ であることはいうまでもない。残るは p であるが，p_0 は $p_{10} = 1$ として基準化しているから $p_0 \in R_{++}^{L-1}$。よってあと検討すべきは p_1 の次元であるが，$\mathscr{M}_\rho$ 均衡の p_1 は (15) により $[I\,E]V(p_1) = 0$ を満たさなくてはならないから，

$$[\,I\ E\,] \begin{bmatrix} V_\alpha(p_1) \\ V_\beta(p_1) \end{bmatrix} = V_\alpha(p_1) + E\, V_\beta(p_1) = 0$$

となり，

$$\begin{aligned} V_\alpha\ = \begin{bmatrix} V_\alpha^1 \\ \vdots \\ V_\alpha^{S-\rho} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} E_{11} & \cdots & E_{1\rho} \\ \vdots & & \vdots \\ E_{S-\rho,1} & \cdots & E_{S-\rho,\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_\beta^1 \\ \vdots \\ V_\beta^\rho \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E_{11}V_\beta^1 + \cdots + E_{1\rho}V_\beta^\rho \\ \vdots \\ E_{S-\rho,1}V_\beta^1 + \cdots + E_{S-\rho,\rho}V_\beta^\rho \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となって，V_α の各行は V_β の行の一次結合としてあらわされる。ゆえに rank $V(p_1) = \rho$ であれば，rank $V_\beta(p_1) = \rho$ となるのでなくてはならず，前の M_k' の定義からある k に対して $p_1 \in M_k'$ となるのでなくてはならない。ところが rank $V_\beta(p_1) = \rho$ であれば $V_\beta(p_1)$ の ρ 本の行ベクトルは一次独立であり，この性質は p を少しずらしても変わることがない。ゆえに M_k' は M_k の開集合となって

おり，したがって M_k と同じ次元，すなわち $SL-1$ 次元の多様体となる。

以上の議論をまとめると，いま状態 s の適当な順序を一つ定め，k と ρ をそれぞれ一つ固定して考えるとして，$P_0 = \{p_0 \in R^L_{++} | p_{10} = 1\}$，また $G(p,E) = [I \ E] \ V(p_1)$ と書くことにすれば，（15）に登場する関数 $(\hat{F}, G)$ は $P_0 \times M'_k \times R^{(S-\rho)\rho} \times R^{L(S+1)I}_{++}$ から $R^{L-1} \times R^{SL} \times R^{J(S-\rho)}$ への関数であり，その定義域は P_0 が $L-1$ 次元，M'_k が $SL-1$ 次元，$R^{(S-\rho)\rho}$ が $(S-\rho)\rho$ 次元，$R^{L(S+1)I}_{++}$ が $L(S+1)I$ 次元であるから，定義域の次元すなわち未知数の数は，固定された ω を除いて，$L-1+SL-1+(S-\rho)\rho$ となる。これに対して方程式の数のほうは $\hat{F}=0$ の部分が $L-1+SL$ 個，$G=0$ の部分が $J(S-\rho)$ 個で，合わせて $L-1+SL+J(S-\rho)$ 個となる。ただし，目下の場合はランク ρ の均衡を考えているので J 種類の資産のうち独立なものは ρ 種類しかない。そこで，独立な方程式の数を求めるためには，$G=0$ の部分を $\rho(S-\rho)$ 個と数えなければならないが，それでも上記の式と未知数の数の勘定からは，方程式のほうが未知数よりも 1 個だけ多いという帰結が導かれる。よってランク ρ の $\mathscr{M}_\rho$ 均衡には解がないということになるのである。

尤もここで $\mathscr{M}_\rho$ 均衡には解がないという帰結は，より精確にはほとんどすべての ω に対して解がないという意味であり，この点をいっそう周到詳細に解明する上で標準的な横断性定理の援用が要請される。

そこでその横断性定理の適用であるが，目下の考察の対象となっている関数 $(\hat{F}, G)$ は $P_0 \times M'_k \times R^{(S-\rho)\rho} \times R^{L(S+1)I}$ を定義域とし，$R^{L-1} \times R^{SL} \times R^{J(S-\rho)}$ を値域としている。しかしここで G の値は実質的には $R^{J(S-\rho)}$ の全域を動くわけではなく，より限定されて $\rho(S-\rho)$ 次元多様体の中を動くと考えるのが適切である。いまそのような理解の下に横断性定理をあてはめてみると，もし上記の関数 $(\hat{F}, G)$ について $\hat{F}(p,E,\omega)=0, G(p,E)=0$ のところで $D_{(p,E,\omega)}(\hat{F}, G)$ のランクがつねに $L-1+SL+\rho(S-\rho)$ であるならば，ほとんどすべての ω に対して，$\hat{F}(p,E,\omega)=0, G(p,E)=0$ のところでは $D_{(p,E)}(\hat{F}, G)$ のランクもつねに $L-1+SL+\rho(S-\rho)$ にならねばならないというのが，当該の定理の主張となる。

よって以下ではまず上記の定理の前提が成立することを証明することにしよう。示したいことは

$$\begin{aligned} &\operatorname{rank}\ D_{(p,E,\omega)}(\hat{F}, G) \qquad (16) \\ &= \operatorname{rank} \begin{bmatrix} D_p\hat{F} & D_E\hat{F} & D_\omega\hat{F} \\ D_pG & D_EG & D_\omega G \end{bmatrix} = L-1+SL+\rho(S-\rho) \end{aligned}$$

となることである。これを示すには上記ヤコービ行列の $D_\omega\hat{F}$ と D_EG の箇所に注目して

$$\operatorname{rank}\ D_\omega\hat{F} = L-1+SL \qquad (17)$$

$$\operatorname{rank}\ D_EG = \rho(S-\rho) \qquad (18)$$

となることを示せばよい。事実いまもしこのことが示されたとすれば，$D_\omega \hat{F}$ は $L-1+SL$ 本の一次独立の列ベクトルをもち，また $D_E G$ は $\rho(S-\rho)$ 本の一次独立な列ベクトルをもつことになるから，$D_\omega G=0$ であることを考えれば，

$$\begin{bmatrix} D_E\hat{F} & D_\omega\hat{F} \\ D_E G & D_\omega G \end{bmatrix}$$

は $L-1+SL+\rho(S-\rho)$ 本の一次独立の列ベクトルをもつことになる。このことから

$$\begin{bmatrix} D_p\hat{F} & D_E\hat{F} & D_\omega\hat{F} \\ D_p G & D_E G & D_\omega G \end{bmatrix}$$

は少なくとも $L-1+SL+\rho(S-\rho)$ 本の一次独立の列ベクトルをもたねばならず，(16) から

$$\mathrm{rank}\ D_{(p,E,\omega)}(\hat{F},G) \geqq L-1+SL+\rho(S-\rho)$$

となるのでなければならないが，一方 $(\hat{F},G)$ の値域の次元は $L-1+SL+\rho(S-\rho)$ であり，上記ヤコービ行列の次元が値域のそれを越えることはありえないから，不等号が除かれて所望の帰結が得られることになるのである。

ゆえに (17)，(18) さえいえるならば，横断性定理の仮定が成り立つわけであるが，ここで (17) は，本定理の証明 (1) のときと同様のやり方で示すことができるので，あとは (18) が示されれば証明は終わる。そこで $D_E G$ を計算するために G を詳しく書くと，

$$\begin{aligned}
&G(p,E)=[I\ E]V(P_1)\\
&=[I\ E]\begin{bmatrix} V_\alpha(p_1) \\ V_\beta(p_1)\end{bmatrix}=V_\alpha(p_1)+E\,V_\beta(p_1)\\
&=V_\alpha(p_1)+\begin{bmatrix} E_{11} & \cdots & E_{1\rho} \\ \vdots & & \vdots \\ E_{S-\rho,1} & \cdots & E_{S-\rho,\rho}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} V^1(S-\rho+1) & \cdots & V^J(S-\rho+1) \\ \vdots & & \vdots \\ V^1(S) & \cdots & V^J(S)\end{bmatrix}\\
&=V_\alpha(p_1)+\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\rho} E_{1i}V^1(S-\rho+i) & \cdots & \sum_{i=1}^{\rho} E_{1i}V^J(S-\rho+i) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{\rho} E_{S-\rho,i}V^1(S-\rho+i) & \cdots & \sum_{i=1}^{\rho} E_{S-\rho,i}V^J(S-\rho+i)\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となるから，

$$D_E G = \begin{bmatrix} \begin{matrix} V^1(S-\rho+1) & \cdots & V^1(S) \\ \vdots & & \vdots \\ V^J(S-\rho+1) & \cdots & V^J(S) \end{matrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \begin{matrix} V^1(S-\rho+1) & \cdots & V^1(S) \\ \vdots & & \vdots \\ V^J(S-\rho+1) & \cdots & V^J(S) \end{matrix} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \begin{matrix} V^1(S-\rho+1) & \cdots & V^1(S) \\ \vdots & & \vdots \\ V^J(S-\rho+1) & \cdots & V^J(S) \end{matrix} \end{bmatrix}$$

となり，対角ブロックはすべて $V_\beta(p_1)$ を転置した行列となっている。ところが rank $V_\beta(p_1) = \rho$ であるから，$V_\beta(p_1)$ の ρ 本の行ベクトルすなわちそれを転置した $V_\beta(p_1)'$ の ρ 本の列ベクトルは一次独立である。そしてそれらのブロックは $S-\rho$ 個あるから，上記のところから $D_E G$ には $\rho(S-\rho)$ 本の一次独立の列ベクトルがあることになり，よって rank $D_E G = \rho(S-\rho)$ であることが明らかとなる。

こうして $(\hat{F}, G)$ については横断性定理の前提の満たされていることが示されたので，その帰結から，ほとんどすべての ω に対して $\hat{F}(p, E, \omega) = 0$, $G(p, E) = 0$ のところでは rank $D_{(p,E)}(\hat{F}, G) = L-1+SL+\rho(S-\rho)$ となっていなければならないことになる。ところが目下の場合は，ω を固定したときの方程式 $(\hat{F}, G)(p, E, \omega) = 0$ の定義域の次元は $L-1+SL-1+\rho(S-\rho)$ であり，$D_{(p,E)}(\hat{F}, G)$ のランクが $L-1+SL+\rho(S-\rho)$ になることはありえないので，横断性定理の主張から，ほとんどすべての ω に対して $(\hat{F}, G)(p, E, \omega) \neq 0$ とならねばならないことが分かるのである。

以上のところから，状態 s の順序を一つ定め，k と ρ をそれぞれ一つ固定すれば，その下ではほとんどすべての ω に対して $\mathscr{M}_\rho$ 均衡の解はありえないという帰結が導かれた。すなわちいま s の順序を σ と書き，上記の解があるような ω の集合を Ω' と書けば，$\Omega'(\sigma, k, \rho)$ は測度ゼロとなるほかはないのである。ところで σ は S 個の状態の並べ方の数，k は r 個，ρ は S 未満であるから，それらはいずれも有限個であり，したがって上記の結果が成り立てば，$\bar{\Omega} = \bigcup_{\sigma,k,\rho} \Omega'(\sigma, k, \rho)$ として，$\bar{\Omega}$ の測度もゼロとなる。またそれぞれの Ω' が閉集合であるところから，$\bar{\Omega}$ もまた閉集合である。

そこで $\Omega'' = \Omega \setminus \bar{\Omega}$ とすれば，Ω'' はフル・メジャーの開集合となる。そして Ω'' に含まれる経済の資産市場均衡ではすべて rank $V(\bar{p}_1^*) = S$ となっていることが，上記の推論をつうじて明らかであるので，これですべての $\omega \in \Omega''$ に対し資産市場均衡が条件付き先物市場均衡となるという所期の主張が示されたことになる。

以上 (1)，(2) の帰結を総合し，かつ $\Omega^* = \Omega' \cap \Omega''$ と定義すれば，上記のところから rank $V(\bar{p}_1) = S$ for some $\bar{p}_1 \in R_{++}^{LS}$ という目下の想定の下では，すべての $\omega \in R_{++}^{L(S+1)I}$ に対してではないが，すべての $\omega \in \Omega^*$ に対して資産市場の均衡はつねに条件付き先物市場の均衡と同一の配分を保証す

ることが明らかにされたのである。証了。

前節に倣って条件付き先物市場均衡配分の集合を $X_C^*(\omega)$ で，また資産市場均衡配分の集合を $X_A^*(\omega)$ であらわせば，上記の帰結は，すべての経済とはいえなくても，ほとんどすべての経済 $\omega \in \Omega^*$ に対して $X_A^*(\omega) = X_C^*(\omega)$ となることを意味している。また前半部の帰結によりすべての $\omega \in \Omega'$ に対して $X_C^*(\omega) \subset X_A^*(\omega)$ となるところから，前記の仮定の下ではほとんどすべての経済に対して資産市場均衡の存在もまた保証されていることになる。さらに後半部の帰結によりすべての $\omega \in \Omega''$ に対して $X_A^*(\omega) \subset X_C^*(\omega)$ となるところから，やはり前記の仮定の下ではほとんどすべての経済に対して資産市場の均衡配分もまたパレート最適性を満たすことが知られたのである。

7

本節はいわば数学付録であって，前節で用いた補題 3，4 に証明を与えることを目的としている。まず補題 3 から始め，それが逆像定理[23]から導かれることを，Magill and Shafer，“Characterisation of Generically Complete Real Asset Structures”，pp.183-184 の推論をもとにして示す。

逆像定理　M，N を多様体とし，$F : M \to N$ は C^1 級とする。もし $\bar{y}$ が F の正則値であれば，$F^{-1}(\bar{y})$ は $\dim F^{-1}(\bar{y}) = \dim M - \dim N$ であるような M の部分多様体である。

最初にまずステップ 1 として，この逆像定理にもとづき，つぎの系 1 が成り立つことを証明する。

系 1　M を多様体とし，$F : M \to R^n$ は C^1 級とする。$\bar{y} \in R^n$ のとき，もしすべての $x \in F^{-1}(\bar{y})$ について $\mathrm{rank}\ DF(x) \geqq \rho$ ならば，$F^{-1}(\bar{y})$ は次元が $\dim M - \rho$ であるような M の部分多様体の有限個の和集合に含まれる。

系 1 の証明

J を $\sharp J = \rho$ であるような $\{1, 2, \cdots, n\}$ の部分集合とする。$F(x)$ を座標ごとに $(F_i(x))_{i=1}^n$ と書き，$F_J : M \to R^\rho$ を $(F_i(x))_{i\in J}$ で定義する。$U_J = \{x \in M |\ \mathrm{rank}\ DF_J(x) = \rho\}$ とすれば，$DF_J(x)$ を行列とみたとき，その ρ 個の行ベクトルが一次独立という条件は x をわずかずらしても変わることはないから，U_J は開集合である。そこで $\bar{y}_J = (\bar{y}_i)_{i\in J}$ とし，F_J の定義域を U_J に限定して $F_J|_{U_J}$ を考えれば，$\mathrm{rank}\ DF_J(x) = \rho$ であるところから，$\bar{y}_J$ は $F_J|_{U_J}$ の正則値となっている。よって前

（23） Guillemin and Pollack, *op.cit.*, p.21, 三村 訳，p.26 参照。

記の逆像定理が使えて，$(F_J|_{U_J})^{-1}(\bar{y}_J)$ すなわち $F_J^{-1}(\bar{y}_J) \cap U_J$ は次元 dim $M - \rho$ の M の部分多様体となる。ゆえにあと $F^{-1}(\bar{y}) \subset \bigcup_J [F_J^{-1}(\bar{y}_J) \cap U_J]$ となることを示せばよい。ところが事実，すべての $x \in F^{-1}(\bar{y})$ について仮定から rank $DF(x) \geqq \rho$ であるから，明らかに rank $DF_J(x) = \rho$ となる J が存在する。すると $x \in U_J, F_J(x) = \bar{y}_J$ であるから，$x \in F_J^{-1}(\bar{y}_J) \cap U_J$。そして一つの J についてこのことが成り立つ以上は，J に関する和集合についても当然 $x \in \bigcup_J [F_J^{-1}(\bar{y}_J) \cap U_J]$ となる。証了。

ついでステップ 2 として，上記の系 1 を用い，つぎの系 2 を証明する。

系 2　$F: U \to R$, $U \subset R^M$ で U は開集合，F は C^r 級，$r \geqq 1$ とする。もし $F(x) = 0$ となるどの x についても $D^\theta F(x) \neq 0$ となるような θ, $1 \leqq \theta \leqq r$ が存在すれば，$F^{-1}(0)$ は $M - 1$ 次元の R^M の部分多様体の有限個の和集合に含まれる。

系 2 の証明

それぞれの θ, $1 \leqq \theta \leqq r$ について $U_\theta = \{x \in U | D^\theta F(x) \neq 0\}$ とすれば，U_θ は明らかに開集合である。つぎに $H_\theta : U_\theta \to R^{big}$ という関数を $H_\theta(x) = (D^j F(x))_{j=0}^{\theta-1}$ によって定義する。ここで H_θ の値域を R^{big} と書いたのは，$(D^j F(x))_{j=0}^{\theta-1} = (F(x), DF(x), D^2F(x), \cdots, D^{\theta-1}F(x))$ で，$F(x) \in R, DF(x) \in R^M, D^2F(x) \in R^{M^2}, \cdots, D^{\theta-1}F(x) \in R^{M^{\theta-1}}$ とみなして，

$$big = 1 + M + M^2 + \cdots + M^{\theta-1}$$

と略記したのである。$DH_\theta(x) = (D^j F(x))_{j=1}^{\theta}$ となることはいうまでもない。

さてつくり方からすべての $x \in U_\theta$ について $DH_\theta(x) \neq 0$ であり，よってすべての $x \in U_\theta$ について rank $DH_\theta(x) \geqq 1$ である。ここで系 1 を用い，そこでの M を U_θ に，F を H_θ に，$\bar{y}$ を 0 に見立て，しかも ρ が 1 の場合を考えるとすれば，その系の帰結によって $H_\theta^{-1}(0)$ は次元が dim $U_\theta - 1$ であるような U_θ の部分多様体の有限個の和集合に含まれることになる。dim $U_\theta = M$ なので，上記の帰結は $H_\theta^{-1}(0)$ が $M - 1$ 次元の R^M の部分多様体の有限個の和集合に含まれることと述べ換えてよい。

よってあと $F^{-1}(0) \subset \bigcup_{\theta=1}^r H_\theta^{-1}(0)$ となることを示せばよい。そこで $x \in F^{-1}(0)$ とすると，$F(x) = 0$ であるから，系の仮定から $D^\theta F(x) \neq 0$ となるような θ, $1 \leqq \theta \leqq r$ が存在する。いまそのような θ の中で最小のものを $\bar{\theta}$ とすれば，$D^{\bar{\theta}} F(x) \neq 0$。よって U_θ の定義から $x \in U_{\bar{\theta}}$ で $H_{\bar{\theta}}(x) = (F(x), DF(x), D^2F(x), \cdots, D^{\bar{\theta}-1}F(x)) = 0$ となる。したがって $x \in H_{\bar{\theta}}^{-1}(0) \subset \bigcup_{\theta=1}^r H_\theta^{-1}(0)$ となる。証了。

そこで最後にステップ 3 として，上記の系 2 を用い，つぎの系 3 を証明する。

系 3　$L_i : R^M \to R^N, i = 1, \cdots, r$ を線形写像とし，$\mathscr{L} = \{x \in R^M | (L_i(x))_{i=1}^r$が一次独立 $\}$ と定義する。そのとき $\mathscr{L}$ は開集合であり，もし $\mathscr{L} \neq \varnothing$ なら $\mathscr{L}^C$ は $M-1$ 次元の多様体の有限個の和集合に含まれる。

系 3 の証明

ある x において $(L_i(x))_{i=1}^r$ が一次独立であれば，x をわずかに動かしても一次独立の条件は満たされつづけるから，$\mathscr{L}$ が開となることは明らか。

つぎに $\mathscr{L} \neq \varnothing$ であれば，ある $\bar{x} \in \mathscr{L}$ が存在して，$\mathscr{L}$ の定義から $L_1(\bar{x}), L_2(\bar{x}), \cdots, L_r(\bar{x})$ は一次独立となる。ゆえに N 個の座標からうまく r 個を選んで各 $L_i(\bar{x})$ からその座標のみをとり出したものを $\hat{L}_i(\bar{x})$ と書き，

$$(\hat{L}_i(\bar{x}))_{i=1}^r = \begin{bmatrix} \hat{L}_1(\bar{x}) \\ \hat{L}_2(\bar{x}) \\ \vdots \\ \hat{L}_r(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

の行ベクトルが一次独立となるように $(\hat{L}_i(\bar{x}))_{i=1}^r$ をつくることができる。この $r \times r$ 行列の行列式を用いて

$$F(x) = \begin{vmatrix} \hat{L}_1(x) \\ \hat{L}_2(x) \\ \vdots \\ \hat{L}_r(x) \end{vmatrix}$$

のように $F : R^M \to R$ を定義すれば，上記のつくり方から当然 $F(\bar{x}) \neq 0$。一方 $x \notin \mathscr{L}$ のような x については $(L_i(x))_{i=1}^r$ が一次従属となるところから，$(\hat{L}_i(x))_{i=1}^r$ もまた一次従属。よって $F(x) = 0$，したがって $\mathscr{L}^C \subset F^{-1}(0)$ となる。

以下では F が系 2 の仮定をすべて満たすことを示すことにより，$F^{-1}(0)$ が $M-1$ 次元の多様体の有限個の和集合に含まれることを示し，証明を終わる。そのためには，$F(x) = 0$ を満たす x について $D^\theta F(x) \neq 0$ ならしめるような $\theta, 1 \leqq \theta \leqq r$ があることさえ示せばよい。

ところが F は一般に

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{M} b_{1i}^1 x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{M} b_{ri}^1 x_i \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{M} b_{1i}^r x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{M} b_{ri}^r x_i \end{vmatrix} \\
&= \sum_{\substack{i_1 \leqq i_2 \leqq \cdots \leqq i_r \\ i_1, i_2, \cdots, i_r \in \{1, \cdots, M\}}} B_{i_1, i_2, \cdots, i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}
\end{aligned}
$$

という形で書け，[24] ここで係数の $B_{i_1,i_2,\cdots,i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$ は $F(x)$ の r 階の導関数 $D^r F(x)$ の各項となっている。F が上のように書けるので，当然 $D^r F(x)$ は x から独立となるのでなくてはならず，よって $F(\bar{x}) \neq 0$ であるところから，$B_{i_1,i_2,\cdots,i_r}$ の少なくとも 1 個は非ゼロとなるのでなくてはならない。これで $D^r F(x) \neq 0$ となることが示された。証了。

上記系 3 の L_i を L_s に，M を LS に，N を J に，$i = 1, \cdots, r$ を $s = 1, \cdots, S$ に，x を p_1 に置き換えれば，本文の補題 3 を得る。

つづいて補題 4 の証明に移ることにする。

命題　$U \subset R^m$ を開集合とし，$\phi : U \to R^n, m \geqq n$，は無限回連続微分可能で，かつ沈め込みであるとする。このとき $K \subset R^n$ が測度ゼロの閉集合であるならば，$\phi^{-1}(K)$ は測度ゼロの閉集合となる。

証明

ϕ が連続なので，$\phi^{-1}(K)$ が閉になることは明らかである。また，局所沈め込み定理[25]により，任意の $x \in U$ に対して，

$$\psi_y^{-1} \circ \phi \circ \eta_x(u_1, u_2, \cdots, u_m) = (u_1, u_2, \cdots, u_n), \forall (u_1, u_2, \cdots, u_m) \in U'_x$$

を満たすような x のまわりの助変数化 $\eta_x : U'_x \to U$ ならびに $y = \phi(x)$ のまわりの助変数化 $\psi_y : V'_y \to R^n$ が存在する。さらに，R^m が第 2 可算公理を満たすことにより，U を可算個の $\{\eta_x(U'_x)\}$ で覆うことが可能である。したがって，任意の $x \in U$ に対し $\phi^{-1}(K) \cap \eta_x(U'_x)$ が測度ゼロとなることを示せば，命題の主張が示されることになる。

(24)　b_{jk}^i は線形写像 $\hat{L}_i$ を行列で表現したときの各要素をあらわしている。

(25)　Guillemin and Pollack, *op.cit.*, p.20, 三村 訳，p.24 参照。

事実，K が測度ゼロの閉集合であることから，$\psi_y^{-1}(K)$ もまた測度ゼロである。[26] そして，$\zeta \equiv \psi_y^{-1} \circ \phi \circ \eta_x$ とすると，

$$\zeta^{-1}(\psi_y^{-1}(K)) \subset \psi_y^{-1}(K) \times R^{m-n}$$

となるが，$\psi_y^{-1}(K) \times R^{m-n}$ が測度ゼロなので，$\zeta^{-1}(\psi_y^{-1}(K))$ もまた測度ゼロ，したがって $\eta_x(\zeta^{-1}(\psi_y^{-1}(K)))$ も測度ゼロとなる。ところが

$$\begin{aligned}&\eta_x(\zeta^{-1}(\psi_y^{-1}(K)))\\&= \eta_x \circ \eta_x^{-1} \circ \phi^{-1} \circ \psi_y \circ \psi_y^{-1}(K)\\&= \eta_x(U'_x) \cap \phi^{-1}(K \cap \psi_y(V'_y))\\&= \eta_x(U'_x) \cap \phi^{-1}(K) \cap \phi^{-1}(\psi_y(V'_y))\end{aligned}$$

となり，一方任意の $u \in U'_x$ に対して $\psi_y^{-1} \circ \phi \circ \eta_x(u)$ が定義されているので，$\phi(\eta_x(U'_x)) \subset \psi_y(V'_y)$ つまり $\eta_x(U'_x) \subset \phi^{-1}(\psi_y(V'_y))$ が成り立っている。よって

$$\eta_x(U'_x) \cap \phi^{-1}(K) \cap \phi^{-1}(\psi_y(V'_y)) = \eta_x(U'_x) \cap \phi^{-1}(K)$$

となり，前記の帰結から $\phi^{-1}(K) \cap \eta_x(U'_x)$ は測度ゼロとなる。証了。

この命題の U を $U_{\bar{\omega}}$ に，ϕ を ψ^j に，m を $L(S+1)I$ に，n を $L(S+1)I-1$ に置き換えれば，本文の補題 4 となることは明らかであろう。

（名誉教授）
（経済学部教授）

(26) 測度ゼロの集合の無限回連続微分可能な関数による像は，測度ゼロである。Guillemin and Pollack, *op.cit.*, p.204, 三村 訳，p.266 参照。