Title	適応的期待と不安定性について
Sub Title	Adaptive expectation and instability
Author	加藤, 寛之(Kato, Hiroyuki)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2003
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.96, No.3 (2003. 10) ,p.443(169)- 451(177)
JaLC DOI	10.14991/001.20031001-0169
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20031001-0169

「三田学会雑誌」96巻3号（2003年10月）

研究ノート

適応的期待と不安定性について

加　藤　寛　之

（初稿受付2002年10月31日，
査読を経て掲載決定2003年6月30日）

1　序

マクロ経済の理論モデルは古典派によるものとケインズ派によるものがよく知られている。古典派が均衡の安定性を強調するのに対し，ケインズ派は不均衡の自律的回復には否定的である。また将来の予想形成の合理性についての仮定も対照的である。古典派は主に完全予見や合理的期待を想定する。そこでは予想主体はモデルを知っており，将来の均衡価格，もしくはその確率分布を正しく予想できるとされる。それに対し，ケインズ派は各主体がそれぞれ独自の血気（アニマルスピリット）を有し，それによって行動することの方に重きを置いた。(1)

古典派において，予想の正しさが均衡を保証する例として例えばFriedmanやLucasは，予想インフレ率が現実のインフレ率と一致している時は国民所得は自然失業率に対応した水準で一定であり，予想が外れたときにのみ労働市場の不均衡が生じ，国民所得は変動すると考えている。一方GrandmontやAzariadis，Guesnerie等では，完全予見や合理的期待の下でも経済は不安定になったり循環を起こしたりと複雑な動きをすることが示されているが，毎期各市場は均衡している。

一方，ケインズ派においてその動学化を試みた代表的なものはHarrodの成長理論である。Harrodは動学の原理として投資の二面性を強調し，経済は不均衡が一度起こるとますます乖離して行く，いわゆる不安定性原理を提唱した。投資の二面性とは投資が需要でありかつ供給力の増補でもあることであり，例えば超過需要の時，供給力を増やそうとして投資をすると需要を増し，ますます超過需要を生み，逆の場合は逆となる，というのが不安定性原理の基本的アイデアである。これ

（1）　IS—LMモデルに合理的期待を導入した論文にYoshikawa（1980）がある。

について数理的考察を行ったものとして例えば Rose (1959), Jorgenson (1960), Nikaido (1975, 1980), Yosida (1999) 等がある。そこで扱われている投資の決定式は上記の企業行動を記述したものだが,(2) なぜ企業が作り過ぎあるいは,生産不足を修正しないのかについてははっきりしない。この稿の目的は,不安定性原理の根拠が,投資水準を決定する企業が将来の総需要水準を予測することの困難さにあることを明らかにする事である。Harrod モデルに期待を入れたものはあまり多くないが,例えば Sen (1970) がある。そこでは期待需要成長率の上昇は企業の投資を促すが,投資の増大は総需要を押し上げるため,現実の成長率も増加する,逆の時は逆が起こる,ということが言われている。従って現実の成長率と期待成長率が異なった時,それを適応的期待形成のような修正を行い続けていけば現実の成長率は発散してしまう事が述べられている。本論文の着想は基本的にこの原理によっている。ここで適応的期待とは,過去の予想誤差を除々に修正する期待形成であり,合理的期待のようなモデルから導かれたものとは異なるものである (Muth (1960))。また二神 (1991) では,不完全競争の企業が想定する逆需要函数と真の逆需要函数との差を適応的に調節する,という形で予想が内生化されたモデルが考えられているが,不安定性を生み出す要因とはなっていない。一方,足立 (2000) では,企業の最適化から期待に依存する投資函数を導き,景気循環についての考察を与えている。本稿では投資函数および貯蓄函数の導出を主に足立 (2000) に負い,Sen (1970) の着想を下に不安定性の議論をする。また足立 (2000) では,政府支出を内生化することで景気循環の議論をしているが,これについてもモデル化をし,循環の存在を示す。

2　モデル

一種類の財を生産する代表的企業と,消費者 (労働者でもあり,資本所有者でもある) と政府がいる経済を考える。

2.1　企業行動

2.1.1　資本ストック需要

仮定 1.

生産函数 $F(K,N)$ は $C^2(R^2_+, R_+)$ に属し,かつ一次同次とする。

$f(x)\equiv F\left(1,\dfrac{N}{K}\right)\left(x\equiv\dfrac{N}{K}\right)$ とおき, $f'(x)>0$, $f''(x)<0$ を仮定する。ただし K, N はそれぞれ資本ストック,労働量を表す。

Y^e を代表的企業の予想する将来需要とする。また,(w^e, r^e) を企業が予想する要素価格で,

(2) Nikaido (1980) では,

$$\left(\frac{\dot{I}}{K}\right)=\phi\left(\frac{I}{K}-\frac{sF(K,L)}{K}\right)$$

I, K, L, s, F はそれぞれ意図した投資,資本ストック,人口,貯蓄率,生産函数で,ϕ は同符号関数,「$\dot{}$」は時間微分を表す。

それぞれ予想実質賃金，予想実質資本賃貸料を表す。

w^e/r^e の下での Y^e を所与とした費用最小化から最適投入比率 $x^e = \frac{N}{K}\left(\frac{w^e}{r^e}\right)$ が求まる。F が一次同次であることから拡張経路が半直線なので x^e は生産量に依存せず，w^e/r^e に対し一意に決まる。すると，Y^e に対応する望ましい資本ストックの水準 K^e は

$$K^e \equiv \frac{1}{f(x^e)} Y^e \quad \left(f(x^e) \equiv F\left(1, \frac{N}{K}\left(\frac{w^e}{r^e}\right)\right)\right)$$

で与えられる。企業の投資は以下のように決まると考える。

$$\dot{K} \equiv I \equiv \varepsilon(K^e - K)$$

ただし，$\varepsilon \in (0, 1]$ は投資の調整速度とする。K は現在の資本ストックの水準，「$\dot{}$」は時間微分を表す。$Y = F(K, N)$ を現在の産出水準とする。よって，

$$I = \epsilon\left(\frac{1}{f(x^e)}(Y^e - Y) + \frac{1}{f(x^e)}Y - K\right),$$

$$\frac{I}{K} = \epsilon\left(\frac{1}{f(x^e)}\frac{Y}{K}\frac{Y^e - Y}{Y} + \frac{1}{f(x^e)}\frac{Y}{K} - 1\right)$$

$$= \epsilon\left(\frac{f(x)}{f(x^e)}\frac{Y^e - Y}{Y} + \frac{f(x)}{f(x^e)} - 1\right).$$

ここで予想需要成長率 $\frac{Y^e - Y}{Y}$ を g_e とおき，上記の方程式の右辺を $i(x, g_e, x^e)$ で表すことにしよう。すると，

$$\frac{I}{K} = i(x, g_e, x^e).$$

単純化のため要素価格予想を一定とし投入比率 x^e は一定の値 $x^e \equiv \bar{x} > 0$ をとるものとする。よって

$$\frac{I}{K} = i(x, g_e).$$

2.1.2 労働需要

各時刻 t において 企業は K_t を所与として次のような問題を解く。

$$\max_{N_t}[P_t F(K_t, N_t) - W_t N_t]$$

ただし，P_t，W_t はそれぞれ t 期における財の名目価格，名目賃金とする。従って t における x は K_t と W_t/P_t によって決まる。

2.2 需要側

2.2.1 貯蓄函数

総貯蓄は民間部門の貯蓄 S_p と政府部門の貯蓄 S_g から成る。これらは次で与えられる。

$$S_p = Y - T - C$$
$$S_g = T - G$$

ここで，Y，T，C，G はそれぞれ実質の国民所得，税金，消費，政府支出とする。いま，α，$\bar{C}$，τ を定数として C および T は

$$C = \alpha(Y - T) + \bar{C}, \quad T = \tau Y$$

を満たすとすれば，総貯蓄 S は，

$$S = S_p + S_g$$
$$= (1 - \alpha + \alpha\tau) Y - (\bar{C} + G).$$

そこで $a \equiv \frac{\bar{C} + G}{K}$ とおけば，

$$\frac{S}{K} = (1 - \alpha + \alpha\tau) f(x) - a$$
$$\equiv s(x, a).$$

a は政府支出と資本ストックに依存した変数で後に政府支出を内生化するとき重要な役割

を果たす。

3　動学系

実質賃金 W_t/P_t は各時点において貯蓄と投資がバランスするように決まる，とする。つまり，g_e, a, K_t を所与とし N_t が瞬時に需要に見合う生産を行うだけの量に調整されているとする。(3) よって毎期，

$$i(x, g_e)=s(x, a)$$

が成立する。ここで考えられている調整は，超過需要の時，つまり $s<i$ の時，価格の上昇によって実質賃金が低下して N_t が増え（x が増え），超過供給の時，つまり $s>i$ の時，価格の下落によって実質賃金が増加して N_t が減る（x が減る），というものである。しかしこの過程は $i_x<s_x$ でなければ安定ではない。i や s の形状によっては与えられた (g_e, a) に対し均衡が複数存在する可能性もある，しかし以下では，安定的な均衡のみを考察の対象としよう。すなわち $i(x, g_e)=s(x, a)$ および $i_x(x, g_e)<s_x(x, a)$ を満たす (x, g_e, a) のみを考えるのである。従って，方程式

$$i(x, g_e)-s(x, a)=0$$

に対して陰函数定理を適用することができ，局所的に定義された C^2 級函数 $x(\cdot,\cdot)$ で

$$i(x(a, g_e), g_e)=s(x(a, g_e), a)$$

を満たすものが存在することが分かる。

また，$s_a(x, a)<0$，$i_{g_e}(x, g_e)>0$ であることに注意すると，以下のことが分かる。

$$x_a(g_e, a)=-\frac{-s_a(x, a)}{i_x(x, g_e)-s_x(x, a)}>0,$$

$$x_{g_e}(g_e, a)=-\frac{i_{g_e}(x, g_e)}{i_x(x, g_e)-s_x(x, a)}>0.$$

さてまず政府支出がない時にハロッドの不安定性原理に相当するものが発生することを示すことにしよう。すなわち $a=0$ の場合が考察の対象である。g_e の動学方程式は次で与えられるとする。

$$\dot{g}_e=\mu[i(x(g_e), g_e)-i(\bar{x}, g_e)].$$

ただし，$x(g_e, 0)$ を $x(g_e)$ と書くことにする。$\mu>0$ は調整速度を表す。

これは現実の需要が予想された水準よりも高いとき，g_e が増加し，現実の需要が予想された水準よりも低いときは g_e が減少することを表している。ここで $g_e=\frac{1}{\varepsilon}(1-a+a\tau)f(\bar{x})$ は $x(g_e)=\bar{x}$ の解であるから，上記動学方程式の不動点である。ここで財市場の均衡が安定であることを保証する次の条件を仮定することにしよう。

仮定 2．

$$i_x\left(\bar{x}, \frac{1}{\varepsilon}(1-a+a\tau)f(\bar{x})\right)<s_x(\bar{x}).$$

定理 1（政府支出がない時のハロッド不安定

（3）　この稿のモデルでは労働の超過供給がある状態しか見ない。つまり総需要不足から実質賃金が十分高い値に決まっているとする。従って $F_N(K, N)=W/P$ を満たす (K, N) に対し，$F(K, N)$ が生産されている。$N<$ 労働供給であり，K は常に完全雇用とする。（Nikaido（1980））

性原理)．

$\bar{C}+G=0$ とする。動学方程式

$$\dot{g}_e=\mu[\,i(x(g_e),\,g_e)-i(\bar{x},\,g_e)]$$

の不動点 $g_e=\frac{1}{\varepsilon}(1-\alpha+\alpha\tau)f(\bar{x})$ は，局所不安定(4)である。

(証明)

これは局所で定義された一次元の微分方程式なので，不動点における傾きを調べればよい。(例えば Lorenz［1］等)

$$\left.\frac{d\dot{g}_e}{dg_e}\right|_{g_e=\frac{1}{\varepsilon}(1-\alpha+\alpha\tau)f(\bar{x})}=\mu i_x x_{g_e}>0$$

従って所望の帰結を得る。(証了)

注意． この定理の結論は投資の二面性と企業の予想の合理性の欠如に本質的に依存している。企業は現実の需要が予想より高いとそれに合わせようと予想を上方に修正し，投資を増やす。その時，総需要も増やしてしまい結果的に想像していた需要よりもますます高い需要が実現してしまう。逆の場合は逆である。この過程の繰り返しで不安定性が発生する。

次に $a\neq 0$ の場合を考える。ここで労働市場について考える。仮定 1 より $F_{NK}(K,N)\left(=-\frac{N}{K^2}f''(x)\right)>0$ なので，労働需要曲線 $F_N(K,N)=\frac{W}{P}$ は K が増加するとき右へシフトする。$F_N(K,N)=f'\left(\frac{N}{K}\right)$ なので，K が $\frac{\dot{K}}{K}$ の率で増加するとき，N も同じ比率 $\frac{\dot{N}}{N}=\frac{\dot{K}}{K}$ で増加すれば，$F_N(K,N)$ は不変であり $\frac{\dot{K}}{K}=\frac{\dot{N}}{N}$ の率で労働需要曲線は右へシフトする。逆のときは左へシフトする。労働供給は人口全体とし，人口成長率を定数 $g_n>0$ とする。$\frac{\dot{K}}{K}=i(x(g_e,\,a),\,g_e)$ なので，政府は，$g_n>i(x(g_e,\,a),\,g_e)$ ならば非自発的失業が増加すると判断し，$g_n<i(x(g_e,\,a),\,g_e)$ のときはやがて非自発的失業は減少していくだろうと判断するとする。

政府支出 G の動学方程式を以下のように定める。

$$\frac{\dot{G}}{\bar{C}+G}=\beta(g_n-i(x(g_e,\,a),\,g_e))$$

a の動学方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\dot{a}}{a}&=\frac{\dot{G}}{\bar{C}+G}-\frac{\dot{K}}{K}\\&=\beta(g_n-i(x(g_e,\,a),\,g_e))-i(x(g_e,\,a),\,g_e).\end{aligned}$$

よって

$$\dot{a}=a(\beta g_n-(1+\beta)i(x(g_e,\,a),\,g_e)),$$

ただし，調整速度を表す $\beta>0$ は定数。

4　Hopf 分岐の存在

以下のような動学系を考える。

$$\begin{cases}\dot{g}_e=\mu[\,i(x(g_e,\,a),\,g_e)-i(\bar{x},\,g_e)]\\ \dot{a}=a(\beta g_n-(1+\beta)i(x(g_e,\,a),\,g_e))\end{cases}$$

(4)　一般に微分方程式 $\dot{x}=f(x)$ の不動点 x^* が局所不安定とは

$$\exists\,\delta>0\quad \forall\,\xi(\|\xi-x^*\|<\delta)\quad \exists\,\bar{t}\geq t_0\quad \|\phi(t,\xi)-x^*\|\geq\delta\quad \forall\,t\geq\bar{t}$$

ここで $\phi(t,\xi)$ は (t_0,ξ) を初期値とする $\dot{x}=f(x)$ の解とする。

仮定 3．

$$(1-\alpha+\alpha\tau)f(\bar{x})-\frac{\beta}{1+\beta}g_n>0$$

これは上記動学系の不動点が第１象限の内点になるための条件であり，β が十分小さければ成り立つ。いま，関数 H を $H(g_e, a, \mu)=(\mu[i(x(g_e, a), g_e)-i(\bar{x}, g_e)], a(\beta g_n-(1+\beta)i(x(g_e, a), g_e)))$ と定義しよう。すると上記の微分方程式は

$$(\dot{g}_e, \dot{a})=H(g_e, a, \mu)$$

と記される。

$i\left(\bar{x}, \frac{\beta}{\varepsilon(1+\beta)}g_n\right)=s\left(\bar{x}, (1-\alpha+\alpha\tau)f(\bar{x})-\frac{\beta}{1+\beta}g_n\right)=\frac{\beta}{1+\beta}g_n$ より $(a^0, g_e^0)=\left((1-\alpha+\alpha\tau)f(\bar{x})-\frac{\beta}{1+\beta}g_n, \frac{\beta}{\varepsilon(1+\beta)}g_n\right)$ はこの微分方程式の不動点であることがわかる。財市場の均衡が安定的であることを保証するために以下を仮定する。

仮定 4．

$$i_x\left(\bar{x}, \frac{\beta}{\varepsilon(1+\beta)}g_n\right)<$$
$$s_x\left(\bar{x}, (1-\alpha+\alpha\tau)f(\bar{x})-\frac{\beta}{1+\beta}g_n\right).$$

以下では，次のような形の定理を使う。

ホップ分岐定理（Lorenz [1], Marsden and McCradken [3], Wiggins [6] 等）

$\dot{x}=X(x, \mu)$ を $C^k(R^2\times R, R^2)(k\geq 2)$ の函数とする。$X(0, \mu)=0$ が全ての $\mu\in R$ において成り立ち，$D_xX(0, \mu)$ が二つの互いに共役な複素数の固有値 $z_{\pm}(\mu)=\alpha(\mu)\pm i\beta(\mu)$ を持ち，$\alpha(0)=0, \alpha'(0)\neq 0$ かつ $\beta(0)>0$ であるならば，適当な $\varepsilon>0$ と C^{k-1} 函数 $\mu^*:(-\varepsilon, \varepsilon)\to R$ が存在し $\mu^*(0)=0$ で各 $x_1\in(0, \varepsilon)$ に対し，$X(\cdot, \mu^*(x_1))$ は周期 $2\pi/\beta(0)$ の近傍の周期解を持つ。

定理 2（Hopf 分岐の存在）．

$\mu^*\equiv a^0(1+\beta)x_a/x_{g_e}$ とする。

適当な $\varepsilon>0$ と C^1 級函数 $\mu^*:(a^0-\varepsilon, a^0+\varepsilon)\to R$ が存在し，$\mu^*(a^0)=\mu^*$ かつ各 $a_1\in(a^0, a^0+\varepsilon)$ について，$H(\cdot, \cdot, \mu^*(a_1))$ は，点 $\left(a_1, \frac{\beta}{\varepsilon(1+\beta)}g_n\right)\in R^2$ を通り，$\left(a^0, \frac{\beta}{\varepsilon(1+\beta)}g_n\right)$ を内部に含むような閉軌道を解としてもつ。

（証明）

以下の３つのホップ分岐定理の条件を確認すればよい。

１．$H\in C^2$。

生産函数 F が C^2 級であることから，i や s も定義より C^2 級である。陰函数定理により x も C^2 級である。よって $H\in C^2$。

２．任意の $\mu>0$ について $H\left(\frac{\beta}{\varepsilon(1+\beta)}g_n, a^0, \mu\right)=0$。

これは定義より自明。

３．$D_{(g_e,a)}H\left(\frac{\beta}{\varepsilon(1+\beta)}g_n, a^0, \mu^*\right)$ は二つの互いに共役な複素数の固有値 $z(\mu)$ をもち，$Rez(\mu^*)=0$ でかつ $\left.\frac{dRez(\mu)}{d\mu}\right|_{\mu=\mu^*}\neq 0$ である。

$$D_{(g_e,a)}H\left(\frac{\beta}{\varepsilon(1+\beta)}g_n, a^0, \mu\right)$$

$$=\begin{pmatrix} \mu(i_x x_{g_e}+i_{g_e}-\varepsilon) & \mu i_x x_a \\ -a^0(1+\beta)(i_x x_{g_e}+i_{g_e}) & \beta g_n-(1+\beta)i\left(x\left(\frac{\beta}{\varepsilon(1+\beta)}g_n, a^0\right), \frac{\beta}{\varepsilon(1+\beta)}g_n\right)-a^0(1+\beta)(i_x x_a) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \mu i_x x_{g_e} & \mu i_x x_a \\ -a^0(1+\beta)(i_x x_{g_e}+\varepsilon) & -a^0(1+\beta) i_x x_a \end{pmatrix}.$$

特性方程式は

$$Q(z)=z^2-[\mu i_x x_{g_e}-a^0(1+\beta)i_x x_a]z \\ +[\{-a^0(1+\beta)\mu(i_x x_{g_e} i_x x_a)\} \\ +\{a^0(1+\beta)\mu(i_x x_{ge}+\varepsilon)i_x x_a\}].$$

よって固有値は，

$$z(\mu)=\frac{1}{2}\{[\mu(i_x x_{g_e})-a^0(1+\beta)i_x x_a]\pm\sqrt{\Delta(\mu)}\}$$

ただし，$\Delta(\mu)=[\mu(i_x x_{g_e})-a^0(1+\beta)i_x x_a]^2-4[\{-a^0(1+\beta)\mu(i_x x_{g_e})i_x x_a\}+\{a^0(1+\beta)\mu(i_x x_{g_e}+\varepsilon)i_x x_a\}]$.

$\mu^*\equiv a^0(1+\beta)x_a/x_{g_e}$ なので，$Rez(\mu^*)=0$.

$$\Delta(\mu^*)=-4[\{-a^0(1+\beta)\mu^*(i_x x_{g_e})i_x x_a\} \\ +\{a^0(1+\beta)\mu^*(i_x x_{g_e}+\varepsilon)i_x x_a\}] \\ =-4\varepsilon[a^0(1+\beta)x_a]^2\frac{i_x}{x_{g_e}}<0.$$

適当な $\delta>0$ が存在して，$|\mu-\mu^*|<\delta$ となる任意の $\mu>0$ についても，

$$\Delta(\mu)<0$$

が成立する。

従って，$z(\mu)$ は互いに共役な複素固有値である。しかも，

$$\left.\frac{dRez(\mu)}{d\mu}\right|_{\mu=\mu^*}=\frac{1}{2}i_x x_{g_e}\neq 0.$$

よって，ホップ分岐定理の条件をすべて満たすことがわかった。（証了）

定理2により，(g_e, a) の循環を示せたので，以下がただちにいえる。

系．

現実の資本ストック成長率 $\frac{\dot{K}}{K}=i(x(g_e, a), g_e)$ は $\mu^*\equiv a^0(1+\beta)x_a/x_{g_e}$ に十分近い μ と適当な初期値に対して周期軌道を描く。

例． 生産函数を $F(K, N)=K^{1/2}N^{1/2}$ とする。$f(x)=\sqrt{x}$ なので，

$$\begin{cases} i(x, g_e)=\frac{\varepsilon}{\sqrt{x}}(g_e+1)\sqrt{x}-\varepsilon \\ s(x, a)=(1-\alpha+\alpha\tau)\sqrt{x}-a \end{cases} \tag{1}$$

となり，$i(x, g_e)=s(x, a)$ を x について解くと，$i_x<s_x$，つまり $\frac{\varepsilon}{\sqrt{x}}(g_e+1)<1-\alpha+\alpha\tau$ の仮定の下で，

$$x(a, g_e)=\left(\frac{a-\varepsilon}{1-\alpha+\alpha\tau-\frac{\varepsilon}{\sqrt{x}}(g_e+1)}\right)^2$$

となる。定理2で求めた分岐パラメーター μ^* は具体的に，

$$\mu^*=(1+\beta)\frac{\sqrt{x}}{\varepsilon}\frac{a^0}{a^0-\varepsilon} \\ \left(1-\alpha+\alpha\tau-\frac{\varepsilon}{\sqrt{x}}(g_e^0+1)\right)$$

として求まる。但し，$(a^0, g_e^0)=\left((1-\alpha+\alpha\tau)\sqrt{x}-\frac{\beta}{1+\beta}g_n, \frac{\beta}{\varepsilon(1+\beta)}g_n\right)$ である。$\frac{\varepsilon}{\sqrt{x}}(g_e^0+1)<1-\alpha+\alpha\tau$ から，$a^0-\varepsilon>0$ もいえている。よって $\mu^*>0$ である。

5　結語

最後に上記の微分方程式が周期を起こす構造について考察したい。定理1で見たように，a 項のない g_e の動学は不安定な構造を持っている。g_e の増加は x を増加させ，その増

加がますますg_eを増加させていく。しかし，aはそれとは逆にxがある値を越えると下がっていく構造を持っており，aの減少はxを減少させていく力を持っている。これがg_eの増加を押さえ込む役割を果たしている。aの減少の力とg_eの増加の力の兼ね合いの決め手となっているのがg_eの調整速度を表すμの大きさである。μが小さい時にはaの力が支配的となり，軌道は不動点にらせん状に引き込まれる。逆にμが大きい時はaの押さえ込む力は弱く軌道は不動点かららせん状に離れていく。分岐点μ^*の意味は，両者の力がちょうどその中間になる値がその近傍に現れるということである。閉軌道の現れるμの値がμ^*より大きい時，閉軌道が安定で不動点が不安定となる優臨界的分岐，μ^*より小さい時，閉軌道が不安定で不動点が安定となる劣臨界的分岐となる。そのどちらであるかは，より高階の符号の仮定により決まる。

なお，本稿においては，特に投資函数はカルドアや足立（2000）において要求されたような強い非線形性は必要とされていない。投資函数$i(x, g_e)$や貯蓄函数$s(x, a)$は各xでg_e，aについて線形であり，xについてはfに依存するのみである。しかし，閉軌道が存在しているならば，閉軌道を含む領域においてトレースは符号を変えるので（ベンディクソンの判定条件），体系としては強い非線形性を有しているはずである。実際，仮に投資函数$i(x, g_e)$や貯蓄函数$s(x, a)$がxについてすら線形であったとしても，xは両者が均衡するように決まるため，陰函数定理で解いた$i(x(g_e, a), g_e)$はg_eについて非線形となり，aについても，$\dot{a}$の動学式$a(\beta g_n-(1+\beta)i(x(g_e, a), g_e))$は$a$について非線形である。このように，見かけ上線形であるモデルが非線形特有の現象を生じせしめているのは，g_eの変化の影響の仕方が投資函数のみならず，貯蓄函数の形状にも依存しており，またaの変化の影響の仕方も，貯蓄函数だけでなく，投資函数の形状やaの変化率$\dot{a}/a$の動学式の形状にも依存しているというように伝播が重層的になることから，個々の函数が線形であっても体系全体としては非線形な影響の与え方になるからである。

（経済学部研究助手）

参 考 文 献

［1］ Hans-Walter Lorenz (1989) *Non linear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, Springer Verlag

［2］ Harrod, R. F. (1973) *Economic Dynamics*, London, Macmillan（宮崎義一訳『ハロッド経済動学』丸善，昭和51年）

［3］ Jorgenson, D. W. (1960) "On Stability in the Sense of Harrod", *Economica*, 27, 243-248

［4］ Marsden, J. E. and M. McCradken (1976) *The Hopf Bifurcation and its Applications*, Springer New York

［5］ Muth, J. F. (1960) "Optimal Properties of Exponentially Weighted Forecasts", *Journal of American Statistical Association*, 55, 299-306

［6］ Nikaido, H. (1975) "Factor Substitution and Harrod's Knife-Edge", *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 35, 149-154

［7］ Nikaido, H. (1980) "Harrodian Pathology of Neoclassical Growth: The

Irrelevance of Smooth Factor Substitution", *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 40, 111-134

[8] Rose, H. (1959) "The Possibility of Warranted Growth", *Economic Journal*, 69, 313-332

[9] Sen, A. (1970) *Growth Economics*, Selected Readings, Harmondsworth PenguinBooks

[10] Wiggins, S. (1990) *Introduction to Applied Nonlinear Systems and Chaos*, Springer-Verlag

[11] Yoshikawa, H. (1980) "The Effectiveness of Monetary Policy in Two Macroeconomic Models with Rational Expectations", *The Economic Studies Quarterly*, 31, 128-138

[12] Yosida, H. (1999) "Harrod's "Knife-Edge" Reconsidered: An Application of the Hopf Bifurcation Theorem and Numerical Simulations", *Journal of Macroeconomics*, 21, 537-562

[13] 足立英之 (2000)『不完全競争とマクロ動学理論』有斐閣

[14] 二神孝一 (1991) "準成長循環 ── Goodwin, Harrod ──", *The Economic Studies Quarterly*, 42, 164-173