「三田学会雑誌」95巻4号（2003年1月）

研究ノート

貨幣的経済成長モデルにおける定常状態の存在について

邵　宜航*

（初稿受付2002年6月5日，
査読を経て掲載決定2002年11月21日）

1　はじめに

貨幣成長率の変化が実物経済にどのような影響を与えるかという問題が，貨幣の超中立性の問題として，さまざまな形で研究されてきた。中でも，Tobin (1965) は新古典派成長理論の枠組で資産としての貨幣を導入することにより簡明な理論的解釈を与えた。しかし，Tobinのモデルでは，貨幣需要にはミクロ的な基礎付けがなく，貨幣がいったい何の役割を果たしているのか不明確という欠点がある。そこで，Sidrauski (1967) は，貨幣を効用関数に導入して，経済主体の最適化行動の下で，貨幣の超中立性を考察した。その結果，長期定常状態における資本・労働比率が貨幣の増加率から独立しているという，実物経済への貨幣の超中立性が示された。現在，このSidrauskiモデルは，マクロ経済学における貨幣の存在を明示的に扱う最も代表的なモデルの一つである。

しかし，その貨幣の超中立性はモデルの設定に強く依存している。モデル設定を修正すれば貨幣供給の増加率の変化が実物経済に影響を及ぼすことが，それ以降の研究により，指摘されている。例えば，弾力的な労働供給を取り入れること［Brock (1974)］，貨幣を生産要素として取り扱うこと［Fischer (1974)］，現金決済に限定する（cash-in-advance）こと［Stockman (1981)］，などにより，貨幣の超中立性は成立しなくなる。さらに，Fischer (1979)，Cohen (1985) やAsako (1983) などの研究は，相対的危険回避度一定など特定の効用関数の下，Sidrauskiモデルにおいても，定常状態に向かう移行過程では超中立性は一般に成立しないことを示して

＊　本稿の執筆に当たって，神谷傳造教授，伊藤幹夫助教授および本誌のレフェリーから貴重な助言・コメントを頂いた，記して謝意を表したい。無論，本稿におけるいかなる誤りも筆者の責任である。

いる。

以上の研究を含む，貨幣の超中立性に関する従来の多くの理論研究では，与えられた貨幣増加率に対して，定常状態の存在を暗黙に想定し，定常状態と定常状態への移行過程における貨幣増加率変化の実物経済に対する影響に注目している。ところが，貨幣的経済成長モデルにおいては，与えられた貨幣増加率に対して，実物経済の定常状態はつねに存在するかとの問題を扱うことはほとんどなかった。もし，定常状態の存在自体が貨幣の供給率にも依存するなら，定常状態における貨幣供給率変化の実物経済に対する影響を考察するとき，定常状態が存在するような貨幣増加率の変化範囲も検討しなければならない。とくに，定常状態に対応する貨幣増加率が一意であるとき，定常状態における実物消費や資本ストックなどの決定が貨幣増加率に依存しなくでも，事実上，貨幣増加率の変化は実物経済に影響を与える。

貨幣供給率と定常状態の存在との関係について，上述の Brock (1974) は言及していたが，それに関する結論は効用関数が実質貨幣バランスと消費の効用に関して分離的であるとの仮定に依存しているので，分離的でない効用関数の場合には適用できない。また，Brock (1974) ではその問題に関する分析が資本ストックを考慮しない離散系のモデルで行われていた。連続的な Sidrauski 型モデルに拡張するとき，同じ分離的な効用関数を用いられても，その結論の修正が要求される（本稿の3.1節を参照されたい)。本稿では主に，貨幣の超中立性を生み出す代表的な Sidrauski (1967) モデルにおいて，成長経路を記述する動態方程式を再検討し，貨幣増加率が定常状態の存在とその達成可能性に及ぼす影響を考察する。

以下，第二節では，我々の議論の土台である Sidrauski の古典的なモデルを紹介し，そこで，最適制御問題における資本ストックと実質貨幣バランスを直接に状態変数として扱い，従来と同じ最適性条件を導く。

第三節では，第二節の Sidrauski モデルに基づき，よく用いられる相対的危険回避度一定など特定な効用関数の下で，定常状態の存在が貨幣の増加率に依存することを示し，定常状態に達成される貨幣成長率の変化可能な範囲を検討する。さらに，貨幣政策の影響と，Sidrauski モデルにおける Friedman の最適貨幣量に関する結論の妥当性について議論する。

第四節では，本稿の結論の一般性を議論し，残される問題と内生的貨幣経済成長モデルへの適用を示す。

2　Sidrauski の貨幣的経済成長モデル

Ramsey の最適成長モデルに基づく Sidrauski (1967) のモデルでは，貨幣が効用関数に導入され，経済においては，貨幣は実質的な役割を果たしている。そこで，代表的な家計の効用は

$$\int_0^\infty U(c(t), m(t))e^{-\theta t}dt \tag{1}$$

とする。c は一人当たりの消費量，m は一人当たりの実質貨幣残高である。θ が家計の

時間選好率を表し，正の実数であると仮定される。家計は実質所得を消費と資産の貯蓄に振り分け，資産を資本の形または貨幣の形で保有する。家計の予算制約は次の通りである。

$$c+\dot{k}+\dot{m}=w+rk+x-nk-\pi m-nm \quad (2)$$

k は一人当たりの資本ストック，n は人口成長率，x は政府からの一括所得移転，π はインフレ率，w は市場の賃金（労働用役の価格），r は市場の利子率（資本用役の価格）を表す。以上の全ては，θ と n を除いて，時間変数 t の関数である（以下も同様，混乱を起こさない限り，変数 t を省略する）。また，この経済の資本と実質貨幣の初期状態を

$$k(0)=k_0,\ m(0)=m_0 \quad (2_*)$$

と設定する。

家計の最適化問題は資産制約（2）の下で，効用（1）を最大化するように最適な消費と資産配分を決定する問題である。ここで，家計は正確に市場の賃金率，利子率およびインフレ率を予測できると設定するので，家計の問題には，w, r と π は既知の関数である。また，家計には，政府からの所得移転，x，も所与である。

この家計の最適制御問題において，c は制御関数で，k も m も状態変数である。最適性条件を導くため，新しい制御変数 v を導入して，

$$\dot{m}=v \quad (2a)$$

とおく。その設定の下で，上記の家計制約条件（2）は次のようになる。

$$\dot{k}=w+rk+x-c-nk-\pi m-nm-v. \quad (2b)$$

よって，家計の最適問題は以下のように定式化される。[1]

max：(1)；subject to：(2a)，(2b) と (2_*) が満たされる。

この問題の Hamiltonian 関数を次のように設定すると，

$$H=u(c,m)e^{-\theta t}+p(w+rk+x-c-nk-\pi m-nm-v)+qv$$

最大値原理によれば，以下の最適性条件が得られる（Seierstad and Sydsater (1987) を参照）。

$$H_c=U_c e^{-\theta t}-p=0$$
$$H_v=-p+q=0$$
$$-\dot{p}=H_k=p(r-n)=0$$
$$-\dot{q}=H_m=U_m e^{-\theta t}-p(\pi+n).$$

一方，企業は各時点の利潤を最大化しようとする。企業の最適行動により，完全競争均衡市場においては，次のような限界生産性原理が成り立つ。

（1） この問題では，m と k を状態変数として扱い，最適性条件を導く。この最適性条件は，m と k を c と同じく制御変数とし，$a:=k+m$ を状態変数とする制御問題の最適性条件と一致する。Blanchard＝Fischer (1989) を参照。

$$\left.\begin{array}{l} r=f(k) \\ w=f(k)-kf_k(k) \end{array}\right\}$$

$f(k)$ はこの経済の生産関数を表し，凸かつ二階連続微分可能と仮定される。

企業の最適性条件と上記の家計の最適性条件および予算制約式から，以下の二式が得られる。

$$\dot{k}+\dot{m}=f(k)+x-c-nk-(\pi+n)m \quad (3)$$

$$-\frac{U_{cc}\dot{c}+U_{cm}\dot{m}}{U_c}=f_k-n-\theta \quad (4)$$

また，M を名目貨幣保有，P を価格水準，N を総人口数とすると，$m=\dfrac{M}{PN}$ である。この式を時間に対する微分すると，

$$\dot{m}=\frac{\dot{M}}{M}m-\frac{\dot{P}}{P}m-nm \quad (5)$$

となる。$\delta:=\dfrac{\dot{M}}{M}$ は名目貨幣の成長率であり，政府の貨幣供給の増加率である。(5) 式により貨幣の供給関数が決まる。

完全予見の仮定により，$\pi=\dfrac{\dot{P}}{P}$。また，政府からの一括所得移転 x は貨幣発行の収入 δm に等しいので，(3) から，次の資源配分式を得る。

$$\dot{k}=f(k)-c-nk. \quad (6)$$

定常状態

実物経済と実質貨幣の定常状態においては，$\dot{c}=\dot{k}=\dot{m}=0$ となるので，(6) と (4) から

$$f_k(k^*)=n+\theta$$
$$c^*=f(k^*)-nk^*$$

となる。定常状態の消費 c^* と資本ストックの水準 k^* が貨幣の増加率とインフレ率に依存しないことに注意しよう。

移行過程の動学

一方，貨幣の増加率の変化が定常状態に移行する過程における資本と消費の経路に影響を与えることも指摘されている。

Fischer (1979) は，相対的危険回避度を 1 でない定数とする効用関数のもとで，定常状態の近傍で資本，実質貨幣，消費の動態を記述する微分方程式を線形近似して，貨幣増加率の変化がその線形微分方程式の特性根との関連を調べた。さらに，資本，実質貨幣，消費の動態方程式をその特性根を用いて表し，貨幣成長率の増大が資本貯蓄を加速させることを示している。詳細については次節で議論する。

以上，Sidrauski モデルから導かれた，よく知られている結論である。しかし，上述の分析は，与えられた貨幣成長率に対して，定常状態が存在することを前提としている。任意の与えられた貨幣の成長率に対して，経済が定常状態に辿り着くか？　また，実質貨幣保有量の変動に関係なく，実物経済だけの定常状態に達成できるか？　などの問題はまだ不明確である。以下，これらの問題について検討する。

3　貨幣増加率と定常状態

上記の Sidrauski モデルの最適性条件から，次の式を得る。

$$U_m=(f_k+\pi)U_c \quad (7)$$

この式は家計の貨幣需要の陰関数表示と見なすことができる。均衡状態では，(7) の貨幣需要 m は (5) の貨幣供給 m と一致するので，

$$\dot{m}=\delta m+f_k m-nm-\frac{U_m}{U_c}m. \tag{8}$$

となる。故に，与えられた貨幣の成長率 δ に対して，この経済の最適成長経路が三つの動学方程式 (4)，(6)，(8) と初期条件 (2_*) および横断条件[2]によって定まる。

この貨幣経済においては，資本と実質貨幣の初期保有量，k_0, m_0, が共に所与である。初期の消費 $c(0)$ が消費経路と共に，与えられた貨幣供給の増加率 δ の下で，上記の動学方程式を満たすように選ばれる。また，その三つの方程式はインフレ率 π に依存していないことが分かる。この経済システムで，インフレ率が，賃金率や利子率と同様に経済の需給を均衡させるように調節することが前提となる。

一般的に，その三つの連立方程式の定常解（ある時刻から定常になる）と，貨幣成長率との関連を調べるのは困難である。次に，よく用いられる幾つかの特定効用関数の下で，貨幣の増加率が定常状態の存在に対する影響を調べてみる。以下の分析では，貨幣増加率が一定であると仮定する。

3.1　相対的危険回避度一定の効用関数の場合

まず，相対的危険回避度一定の効用関数の場合を考える。

$$U(c,m)=\frac{(c^{\alpha}m^{\beta})^{1-R}}{1-R},\ \alpha,\beta>0, \quad \alpha+\beta\leq 1 (R>0, R\neq 1) \tag{1a}$$

$$U(c,m)=\alpha\log c+\beta\log m, (R=1) \tag{1b}$$

(1a) 及び (1b) の効用関数に対して，$\frac{U_m}{U_c}=\frac{\beta c}{\alpha m}$ になる。以下，$\gamma:=\beta/\alpha$ とおく。よって，(8) の解，m, が次のようになる

$$m=e^{\int_0^t(\delta+f_k-n)dt}\left(\int_0^t(-\gamma c)e^{-\int_0^t(\delta+f_k-n)dt}dt+m_0\right). \tag{9}$$

1)　危険回避度 $R=1$ の場合

ここで，(1b) のような消費と貨幣に関する分離的な効用関数なら，$U_{cm}=0$ なので，(4) と (6) により，資本と消費の経路が貨幣に依存しないことが分かる。(9) 式より，資本と消費の定常状態においては，貨幣の動学経路が次のように定まる。

$\delta=n-f'(k_*)=-\theta$ のとき，

$$m(t)=m_0-\gamma c_* t$$

$\delta\neq n-f'(k_*)=-\theta$ のとき，

$$m(t)=\frac{\gamma c_*}{\delta+\theta}+\left(m_0-\frac{\gamma c_*}{\delta+\theta}\right)e^{(\delta+\theta)t}$$

従って，この場合においては，貨幣供給率が初期の実質貨幣バランス水準に合わせられて $\delta=\frac{\gamma c_*}{m_0}-\theta$ ように設定されるときのみ定

---

(2)　本稿の議論に対しては，横断条件を分析する必要はないので，省略する。横断条件の意義について神谷傳造 (2000) を参照されたい。

常状態は存在可能である。また，この場合，実質貨幣バランスの初期水準が定常状態の水準である。

一方，貨幣成長率 $\delta \neq \frac{\gamma c_*}{m_0} - \theta$ とき，実質貨幣が増加し続けるないしは減少し続けることになる。即ち，このとき，実質貨幣の定常状態は存在しない。さらに，この場合においては，貨幣供給率は高ければ，実質貨幣バランスの保有水準も高くなる。(7) 式により，貨幣の需給を均衡させるため，貨幣成長率が高ければ，インフレ率が逆に低くなるという特異な現象が現れる。この場合において，Brock (1974) と同様に分析すれば，長期均衡は存在しないことが分かる。

すでに序論で述べたように Brock (1974) も効用関数が分離的であるとき，離散系のモデルにおいて定常状態の存在が貨幣供給率の設定に依存することを指摘していた。しかし，モデルの設定が異なることにより，Brock (1974) の離散系モデルでは定常状態の存在が実質貨幣バランスの初期水準にも依存することは示されていなかった。また，本稿の以上の結論は，Brock (1974) の弾力的労働供給を含む連続系の貨幣成長モデルにおいても成り立つことが容易に分かる。

以上の特異現象を回避するため，理論分析では (1a) のような消費関数がより妥当であると考えられる。以下，(1a) の下で，分析を展開していく。

2）危険回避度 $R<1$ の場合

1を除く相対的危険回避度一定の効用関数の下で，経済の動態が次の二つ方程式と (6) で表せる。

$$(1-\alpha(1-R))\frac{\dot{c}}{c} - \beta(1-R)\frac{\dot{m}}{m} = f_k - n - \theta \tag{4a}$$

$$\dot{m} = \delta m + f_k m - nm - \gamma c \tag{8a}$$

ここで，この経済には，資本経路は，ある時刻 t^* から，定常状態に辿り着くと仮定，その定常値を k^* とする。(6) 式により，$c(t)$ も同時に定常状態に辿り，その値を c^* とする。時刻 t^* から，実質貨幣バランスは，(4a) と (8a) を共に満たしていることにより，

$$\begin{aligned} &m(t)(\delta+\Delta) = \gamma c^*, \\ &\Delta := f_k^* - n + \frac{f_k^* - n - \theta}{\beta(1-R)} \end{aligned} \tag{10}$$

が得られる。

$\delta = -\Delta$ のとき，(10) は成り立たないので，資本成長の定常状態は存在しない。

$\delta \neq -\Delta$ のとき，$m(t)$ を除く (10) のすべては定数であるので，$m(t)$ も定数になる。言い換えると，m も k と同時に定常経路を辿らなければならない。

この場合の定常状態での消費と資本ストックの水準も前節の結論と一致し，$\Delta = \theta$ となる。よって，$\delta \neq -\theta$ とき，

$$m^* = \frac{\gamma c^*}{\delta + \theta}$$

となる。また，明らかだが，正の m を保つには，$\delta > -\theta$ が必要である。以上をまとめると

「この貨幣経済には，貨幣増加率が負の時間選好率と一致するとき，資本成長の定常状態は存在しない。一方，資本の成長がある定常値に辿り着いたら，実質貨幣の成長も同時

に定常状態に到達する。」

$\delta=-\theta$ の含意を後にまた議論する。

以上で，$\delta>-\theta$ が定常状態の一つ必要条件であることが分かるが，実は，この場合，定常状態が達成可能な貨幣増加率の変化範囲が資本ストックと実質貨幣バランスの初期水準に制限されている。次に，定常状態の近傍での挙動に注目，この主張を検討する。

ここで，上記の方程式（4a），（6）と（8a）を連立して，定常状態 (c^*, m^*, k^*) の回りで線形化すると，次のようになる，

$$\begin{bmatrix} \dot{c} \\ \dot{m} \\ \dot{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\beta(1-R)(\delta+\theta)}{1-\alpha(1-R)} & \dfrac{\alpha(1-R)(\delta+\theta)^2}{1-\alpha(1-R)} & \dfrac{(1+\beta(1-R))f^*_{kk}c^*}{1-\alpha(1-R)} \\ \gamma & \delta+\theta & \dfrac{\gamma f^*_{kk}c^*}{(\delta+\theta)} \\ -1 & 0 & \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c-c^* \\ m-m^* \\ k-k^* \end{bmatrix} \tag{11}$$

ここの f^*_{kk} は $f_{kk}(k^*)$ を表す。

Fischer（1979）と Calvo（1979）の結果によれば，定常状態に収束する安定経路が上記線形微分方程式の唯一の負の特性根 λ に対応している。その特性根を用いて，（11）の解が次のように表せる。

$$k=k^*+(k_0-k^*)e^{\lambda t} \tag{11a}$$

その式から，

$$\dot{k}=-\lambda(k^*-k)$$

となる。また，（11）の特性方程式より，消費と実質貨幣の経路が

$$c=c^*+(\theta-\lambda)(k_t-k^*) \tag{11b}$$

$$m=m^*+\gamma\frac{\theta-\lambda-\dfrac{f^*_{kk}c^*}{\delta+\theta}}{\delta+\theta-\lambda}(k-k^*) \tag{11c}$$

となる。Fischer（1979）は，δ の増大（減少）がその λ の絶対値を増大（減少）させることを証明し，（11a）より，貨幣増加率の増大（減少）が資本の貯蓄速度を増大（減少）させることを示している。

ここでは，我々は Fischer（1979）の研究と異なる側面から，次のことに注意したい。上記の（11c）式から，定常状態の近傍では，実質貨幣バランスの増減が資本ストックの増減と同方向であることが分かる。即ち，もし，$k_0<(=,>)k^*$ なら $m_0<(=,>)m^*$ も成り立たなければならない。この条件と，$m^*=\dfrac{\gamma c^*}{\delta+\theta}$ により，貨幣成長率は次の条件を満たさなければならないことが分かる。

$$\left.\begin{array}{l} k_0<k^* \text{ のとき，} \delta<\dfrac{\gamma c^*}{m_0}-\theta \\ k_0=k^* \text{ のとき，} \delta=\dfrac{\gamma c^*}{m_0}-\theta \\ k_0>k^* \text{ のとき，} \delta>\dfrac{\gamma c^*}{m_0}-\theta \end{array}\right\} \tag{12}$$

一方，$k_0<(>)k^*$ とき，$m(t)$ を増加（減少）させるには，（8a）式により，δ は次の条件も満たすべきである。

$$\left.\begin{array}{l} k_0<k^* \text{のとき，} \delta>\dfrac{\gamma c(0)}{m_0}-f_k(k_0)+n \\ k_0>k^* \text{のとき，} \delta<\dfrac{\gamma c(0)}{m_0}-f_k(k_0)+n \end{array}\right\} \tag{12a}$$

$k_0=k^*$ のとき，(8a) からの制限が (12) の第二式と一致する。

(12)式は，貨幣成長率に対する初期状態からの制限を明示している。(12a) では，$c(0)$ の選択が δ の設定によって変わるが，k_0 と $c(0)$ が k^* と c^* の近傍にあること(3)を考えると，δ の選択可能な範囲も狭いことが分かる。故に

「初期状態の資本ストック水準が定常状態の水準に近いとき，定常状態が達成可能であるのは，貨幣増加率が (12) と (12a) を満たす範囲内にあるときのみである。」

以上の効用関数では，$U_{cm}>0$ であり，消費と貨幣保有が補完的である。以下，代替的な効用関数の場合を検討する。

3.2　完全代替効用関数の場合

いま，効用関数を次のように設定する

$$U(c,m)=\frac{(c+\lambda m)^{1-\alpha}}{1-\alpha},\ 0<\lambda<1,\ 0<\alpha<1. \tag{1c}$$

このとき，$U_m/U_c=\lambda$ ので，上記の方程式 (8) が次のようになる

$$\dot{m}=(\delta+f_k-n-\lambda)m \tag{8c}$$

一方，$\dfrac{U_{cc}}{U_c}=\dfrac{-\alpha}{c+\lambda m}$, $\dfrac{U_{cm}}{U_c}=\dfrac{-\lambda\alpha}{c+\lambda m}$ より，(4) 式が次のように変形される

$$\dot{c}+\lambda\dot{m}=-(f_k-n-\theta)\frac{c+\lambda m}{\alpha} \tag{4c}$$

上の議論と同様，仮に t^* 時刻から資本がある定常値に辿り着くとすると，その時から消費も定常になり，(8c) と (4c) より，

$$\begin{aligned} &m(t)\left(\delta+f_k-n-\lambda-\frac{f_k^*-n-\theta}{\alpha}\right) \\ &=\frac{(f_k^*-n-\theta)c^*}{\lambda\alpha} \end{aligned} \tag{13}$$

が得られる。(4c) と (8c) の下で，この方程式は，両辺が共にゼロであるときかつそのときに限り成り立つ。即ち，

$$\delta+f_k^*-n-\lambda=f_k^*-n-\theta=0 \tag{14}$$

の時のみ成立する。実は，仮に，(13) の左辺がゼロではないとすると，このとき，(13) の m 以外の全ては定数であるので，m も定数になる。$\dot{m}=0$ を (8c) と (4c) ($\dot{c}=0$ に注意) 代入すれば，(14) の結果が得られ，(13) の左辺はゼロになり，仮定と矛盾する。

いま，(14) より，$\delta=\lambda-\theta$ となる。このとき，$t>t^*$ に対して，$\dot{m}=0$。従って

「この貨幣経済においては，資本の成長がある定常値に辿り着くと，実質貨幣の成長も同時に停止する。このような定常状態は，$\delta=\lambda-\theta$ のとき且つそのときに限り，達成可能である。」

(3)　より厳密にいうと，k_0 は k^* の近傍にあるとき，$c(0)$ を c^* の近傍で選ぶようになる。このとき，上のように定まった m^* も m_0 の近傍にある。

3.3 貨幣政策の影響と Friedman の最適貨幣政策について

以上の議論より，Sidrauski のモデルにおいて，定常状態の達成可能性が貨幣供給増加率，δ，の設定に強く依存していることが分かる。

相対的危険回避度が1でない定数となる効用関数の場合，初期状態の資本ストック水準が定常状態の水準より低いとき，実質貨幣残高を増大させるように貨幣の供給率をより低く設定しないと定常状態が達成されない。然し，低すぎると定常状態も達成できなくなる。逆に，初期状態の資本ストック水準が定常状態の水準を超えると，貨幣の供給率をより高く設定するべきである。また，より低い貨幣成長率は高い実質貨幣バランスをもたらすが，Fischer (1979) の結論から分かるように，定常状態に到達するまでの期間を遅らせてしまう。

一方，完全代替効用関数の場合では，定常状態をもたらす貨幣成長率は唯一なので，貨幣供給増加率，δ，の選択余地がない。それ以外の貨幣供給率を選択すると，経済の定常状態は存在しなくなる。

一般には，上記のような Sidrauski のモデルに基づき，最適貨幣政策を分析するのは困難である。従来の研究では $\delta=-\theta$ は最適な貨幣供給率であると指摘されているが，以下，それの妥当性について議論する。

(7) 式から，政府は $\pi=-f_k$ であるように貨幣供給すれば，$U_m=0$ となるので，定常状態における効用は最大になることが分かる。特に，定常状態では，(5) と (7) により最適な貨幣供給率は

$$\delta=\pi+n=-f_k+n=-\theta$$

となる。この結論は，次の Friedman の最適貨幣量説と一致するという。

「もし実質貨幣保有から効用が得られるなら，貨幣の限界効用がゼロになるまで発行するべきであり，貨幣の収益率は資本の収益率と等しくなければならない。」

この結論は，上述の特定の効用関数の場合においては，成り立たないことが明らかである。それは，理論上では $U_m=0$ との設定が満たされないからである。しかし，仮に $U_m=0$ であるような実質貨幣に対する飽きたときがあるとしても，最初の家計の最適化問題の設定によると，以上の貨幣の収益率は資本の収益率と等しいことも導けない。

第2節の家計の最適化モデルにより，家計は，貨幣を保有することから効用を引き出す。それに対して，資本を保有すること自体は効用をもたらさない。もし資本の収益率が貨幣の収益率と等しいなら，即ちインフレ率が負の利子率と同じであれば，家計に対しては，資本であれ，貨幣であれ，収益は同じである。この場合，勿論，全部の資産を貨幣で保有すれば，効用が高くなる。よって，誰も資本を保有しないことになる。故に，Sidrauski のモデルにおいては，$\pi=-f_k$ になるような貨幣供給政策は最適にならないことが分かる。

4　おわりに

貨幣の超中立性を導き出す Sidrauski モデ

ルでは，もし定常状態が存在すれば，最適条件より，定常状態での資本ストック及び消費の水準が，貨幣の存在しない古典的な Ramsey 最適成長モデルの場合と全く同じように決定されることが知られている。本稿では，同じ最適条件から，その定常状態の存在が貨幣の増加率の設定に依存していることを示した。このことにより，Sidrauski モデルにおいても，貨幣の超中立性の成立範囲が限定されていることが分かる。

本稿の Sidrauski モデルでは，特定の効用関数の下で，議論しているが，一般には，実物経済の定常状態が存在すれば，方程式（4）と（8）から，次の式が得られる

$$\frac{U_{cm}}{U_c}(\delta m+f_k m-nm-\frac{U_m}{U_c}m)=(f_k-n-\theta).$$

前節で示したように，任意の δ に対して，この式を満たす正の m が存在するとは限らない。また，我々の議論では先行研究と同じく一定の δ を設定している。もし δ が時間の関数であれば，Sidrauski モデルでは，定常な c，k に対しても，上の式を満たす m が一般には定常にならないことが分かる。この場合の定常状態での資本水準などが貨幣成長率に関連していると考えられる。

また，3.3節で議論したように，上述の貨幣経済モデルから最適貨幣供給率が導かれることはない。最適貨幣供給率を分析するには，Sidrauski モデルを拡張して，貨幣供給率，δ，を内生的な変数として扱い，政府と家計の意思決定を共に考慮する最適モデルの導入が要求される。これらの問題は今後の研究課題として残される。

一方，上述の貨幣的経済成長理論は古典派の成長モデルに基づいて発展したものである。古典派の成長モデルでは長期的に経済が定常状態に収束していく。それに対して，1980年代から，Romer（1986）と Lucas（1988）の研究をはじめとして，持続的に成長可能な経済を考察する様々な内生的成長モデルが開発されてきた。その後，貨幣の要素も内生的成長モデルに導入され，実物経済に及ぼす貨幣増加率の変化やインフレ率と財政政策などの影響が研究されている。例えば，Roubini＝Sala-i-Martin（1992, 1995）などは，内生成長モデルに Sidrauski モデルのような貨幣の役割を導入してインフレ率，財政政策と長期成長との関連を考察している。しかし，多くの内生的成長モデルは定常成長状態に注目していた。それらの成長モデルにおいては，定常成長率はたいてい所与のパラメーターによって一意に定まる。この場合，モデルにおける貨幣の役割にも依存するが定常成長状態に対応する貨幣の増加率も制限されていると考えられる。この問題について，稿を改めて検討したい。

（経済学部訪問研究員，
厦門大学経済学部助教授）

参　考　文　献

Asako, K（1983）“The Utility Function and the Superneutrality of Money on the Transition Path”, *Econometrica*, 51: 1593-1596.

Blandchard, O. J. and Stanley Fischer（1989）*Lectures on Macroeconomics*, Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Brock, W. (1974) "Money and Economic Growth: The Case of Long-run Perfect Foresight", *International Economic Review*, No. 15, pp. 750-763.

Calvo, G. (1979) "On Models of Money and Perfect Foresight", *International Economic Review*, No. 20, pp. 83-104.

Cohen, D. (1985) "Infraction, Wealth and Interest rates in an Intertemporal Optimization Model", *Journal of Monetary Economics*, No. 16, 73-85.

Fischer, S. (1974) "Money and the Production Function", *Economic Inquiry*, pp. 517-533.

Fischer, S. (1979) "Capital Accumulation on the Transition Path in a Monetray Optimizing Model", *Econometrica*, Vol. 53, No. 3, 607-622.

Lucas, Jr. R.E. (1988) "On the mechanics of economic development". *Journal of Monetary Economics* 22, 3-42.

Rebelo, S.T. (1991) "Long-run policy analysis and long-run growth". *Journal of Political Economy* 99, 500-521.

Romer, P. M. (1986) "Increasing Returns and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy*, Vol. 94, pp. 1002-1037.

Roubini, N. and X. Sala-i-Martin (1992) "Financial Repression and Economic Growth", *Journal of Devenlopment Economics*, Vol. 39, pp. 5-30.

Roubini, N. and X. Sala-i-Martin (1995) "A Growth Model of Inflation, Tax Evasion, and Financial Repression", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 35, pp. 275-310.

Seierstad, A. and K. Sydsater (1987) *Optimal Control Theory with Economic Applications*, Amsterdam: North Holland.

Stockman, A. C. (1981) "Anticipated Inflation and the Capital Stock in Cash-in-advance Economy", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 8, pp. 387-393.

Sidrauski, M. (1967) "Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy", *American Economic Review, Papers and Proceedings*, No. 57, pp. 534-544.

Tobin, J. (1965) "Money and Economic Growth", *Econometrica*, No. 33, pp. 671-687.

神谷傳造 (2000)「動学計画における横断条件について」『三田学会雑誌』Vol.93, No. 20, pp. 163-175.