Title	均衡と時間II(承前) : 重複世代モデルの場合 その3
Sub Title	Equilibrium and time II : a model with overlapping generations part 3
Author	福岡, 正夫(Fukuoka, Masao)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2003
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.95, No.4 (2003. 1) ,p.709(75)- 742(108)
JaLC DOI	10.14991/001.20030101-0075
Abstract	キーホー＝レヴァインは、多数財を含む重複世代モデルにおいて一般には成立しないゲイルの帰結が、(1) 代表的個人の効用関数が分離可能な場合、(2) 所得効果が無視されうる場合、の二ケースについては成り立つ可能性がありうることを示した。本論文では前稿のあとを承けて彼らのこの主張を対象とし、その推論過程に若干の数理を補足とすることをつうじて、当該命題の証明をより充全なものにすることを目指したい。 Kehoe–Levine demonstrated that it is possible that Gale's conclusion, which does not generally hold true in the overlapping generation model including multiple goods, may actually hold true in the cases where: (1) a representative individual's utility function is separable and (2) the income effect can be ignored. In this study, based on the discussion developed in my previous paper, I deal with their assertion and validate the proof of the proposition in question by supplementing some mathematics to their inference process.
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20030101-0075

均衡と時間 II（承前）―重複世代モデルの場合 その 3―

Equilibrium and Time II：A Model with Overlapping Generations Part 3

福岡 正夫(Masao Fukuoka)

キーホー＝レヴァインは、多数財を含む重複世代モデルにおいて一般には成立しないゲイルの帰結が、（1） 代表的個人の効用関数が分離可能な場合、（2） 所得効果が無視されうる場合、の二ケースについては成り立つ可能性がありうることを示した。本論文では前稿のあとを承けて彼らのこの主張を対象とし、その推論過程に若干の数理を補足とすることをつうじて、当該命題の証明をより充全なものにすることを目指したい。

Abstract

Kehoe–Levine demonstrated that it is possible that Gale's conclusion, which does not generally hold true in the overlapping generation model including multiple goods, may actually hold true in the cases where: (1) a representative individual's utility function is separable and (2) the income effect can be ignored. In this study, based on the discussion developed in my previous paper, I deal with their assertion and validate the proof of the proposition in question by supplementing some mathematics to their inference process.

「三田学会雑誌」95巻4号（2003年1月）

均衡と時間II（承前）

——重複世代モデルの場合 その3*——

福 岡 正 夫

要　旨

キーホー＝レヴァインは，多数財を含む重複世代モデルにおいて一般には成立しないゲイルの帰結が，（1）代表的個人の効用関数が分離可能な場合，（2）所得効果が無視されうる場合，の二ケースについては成り立つ可能性がありうることを示した。本論文では前稿のあとを承けて彼らのこの主張を対象とし，その推論過程に若干の数理を補足することをつうじて，当該命題の証明をより充全なものにすることを目指したい。

キーワード

一般均衡理論，通時的均衡，重複世代モデル，ゲイルの帰結，分離可能効用

11

前稿の議論が解明しえたところは，一般に多数財・多数個人から成るモデルでは貨幣がない場合でも均衡の不確定性を免れることはできず，また貨幣がある場合の不確定性もその自由度が1次元にとどまるとはかぎらないということであった。つまりゲイルがかつて1財1個人のモデルについて導いた帰結はかならずしも一般には成り立たないのである。ところがその後，バラスコ＝シェルは，各期に財が多数種類存在するとしても各世代の個人が1人だけで，しかもその効用関数がコブ＝ダグラス型であるならば，ゲイルと同じ帰結が導かれることを示し，またジーナコプロス＝ポレマルカキスは，コブ＝ダグラス型の効用関数に代えて生涯期間のあいだで分離可能な効用関数を想定すれば，やはり同じ帰結が得られることを示した(46)。そしてさらにキーホー＝レヴァインは彼らの議論をより一般化し，同世代に複数の個人がいるとしても，また通時的な選好が相互に依存関係をもつとしても，それら選好の相違や依存関係がごく僅かなものであるならば，上記の結論には変わ

* 本稿は福岡正夫「均衡と時間II ——重複世代モデルの場合」，本誌2001年10月号，「均衡と時間II（承前）——重複世代モデルの場合その2」，本誌2002年10月号の続篇である。またこれらは同「均衡と時間I ——有限主体・無限計画期間モデルの場合」，本誌2001年1月号の companion piece でもある。

りがないことを明らかにした。[47] つまり彼らの示すところによれば，各世代の多数個人が「ほとんど」同型であり，彼らが「ほとんど」分離可能な効用関数をもつかぎり，多数財・多数個人のモデルであっても，なおゲイルの帰結があてはまることになるのである。本節以下では，今日までに達せられたこのような成果を前稿までの議論に接続する形でとりまとめ，その補足とすることにしたいと思う。

前稿第5節の線形化された価格方程式（5.2）をふたたび登用し，それを

$$D_2y p_{t+1} + (D_1 y + \beta D_2 z) p_t + \beta D_1 z p_{t-1} = 0 \tag{11.1}$$

の形で書くことにしよう。D_2y 非特異の仮定の下では，（11.1）は2階の定差方程式システムと解されるから，その特性行列 $R(\phi)$ を

$$R(\phi) = D_2 y \phi^2 + (D_1 y + \beta D_2 z)\phi + \beta D_1 z \tag{11.2}$$

と定義すれば，固有値は特性方程式

$$|R(\phi_i)| = 0 \tag{11.3}$$

の根である。そしてそれらに対応する固有ベクトルは，f_i を $R(\phi_i)f_i = 0$，$f_i \neq 0$ を満たす l 次元列ベクトルとするとき，$(f_i, \phi_i f_i)$ の形であらわされる。この点は，上記の定差方程式をそれと同値の前稿（5.3）すなわち

$$q_t = G q_{t-1}$$

$$q_t = \begin{bmatrix} p_t \\ p_{t+1} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\beta D_2 y^{-1} D_1 z & -D_2 y^{-1}(D_1 y + \beta D_2 z) \end{bmatrix} \tag{11,4}$$

の形に転換して考えると分かりやすいであろう。この式の特性方程式はいうまでもなく $|G - \phi I| = 0$ で示されるが，実は前記の $|R(\phi_i)| = 0$ はこれと同値であり，そのいずれを解いてもまったく同じ固有根の得られることが，ただちに分かる。事実いま簡単化のため

$$-\beta D_2 y^{-1} D_1 z = G_{21}$$
$$-D_2 y^{-1}(D_1 y + \beta D_2 z) = G_{22}$$

---

(46) Y. Balasko and K. Shell, “The Overlapping Generations Model. III. The Case of Log-Linear Utility Functions”, *Journal of Economic Theory*, February 1981. J. D. Geanakoplos and H. M. Polemarchakis, “Intertemporally Separable, Overlapping-Generations Economies”, *Journal of Economic Theory*, December 1984.

(47) T. J. Kehoe and D. K. Levine, “Intertemporal Separability in Overlapping-Generations Models”, *Journal of Economic Theory*, December 1984.

とおけば,

$$G-\phi I=\begin{bmatrix}-\phi I & I \\ G_{21} & G_{22}-\phi I\end{bmatrix}$$

となるから,

$$|G-\phi I|=|-\phi I|\,|G_{22}-\phi I-G_{21}(-\phi I)^{-1}I|$$

のように分解できる[(48)]。そこで G_{21}, G_{22} をもとの表現に直し $|G-\phi I|=0$ であることを考慮すれば,

$$|-\phi I|\,|-D_2y^{-1}(D_1y+\beta D_2z)-\phi I-\phi^{-1}\beta D_2y^{-1}D_1z|=0$$

を得,さらに $|-\phi I|\neq 0$, $|-\phi D_2y|\neq 0$ であることを考慮して,上式を前者で割り,前に後者を掛ければ,

$$\begin{aligned}&|-\phi D_2y|\,|-D_2y^{-1}(D_1y+\beta D_2z)-\phi I-\phi^{-1}\beta D_2y^{-1}D_1z|\\&=|\phi(D_1y+\beta D_2z)+\phi^2D_2y+\beta D_1z|=0\end{aligned}$$

を得る。これは (11.3) にほかならないから,$|R(\phi_i)|=0$ は $|G-\phi I|=0$ と同値であることが判明した。

つぎに $|R(\phi_i)|=0$ の下で $f_i\in R^l$, $f_i\neq 0$ が $R(\phi_i)f_i=0$ を満たせば,(f_i, ϕ_if_i) が ϕ_i に対応する G の固有ベクトルになること,すなわち

$$G\begin{bmatrix}f_i\\ \phi_if_i\end{bmatrix}=\phi_i\begin{bmatrix}f_i\\ \phi_if_i\end{bmatrix}$$

となることを示す。まず左辺を計算すると

$$G\begin{bmatrix}f_i\\ \phi_if_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & I\\ -\beta D_2y^{-1}D_1z & -D_2y^{-1}(D_1y+\beta D_2z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_i\\ \phi_if_i\end{bmatrix}$$

---

(48) 一般に行列 A について

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix},\ \text{ここで } A_{11}, A_{22} \text{ は正方行列}$$

で,$|A_{11}|\neq 0$ であれば

$$|A|=|A_{11}|\,|A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$$

である。この点については P. J. Dhrymes, *Mathematics for Econometrics*, 1978, 2nd ed., 1984, p.37 参照。

$$=\begin{bmatrix} \phi_i f_i \\ -\beta D_2 y^{-1} D_1 z f_i - D_2 y^{-1}(D_1 y + \beta D_2 z)\phi_i f_i \end{bmatrix}$$

となるが，仮定から $R(\phi_i)f_i=0$ であるから，(11.2) から

$$D_2 y \phi_i^2 f_i + (D_1 y + \beta D_2 z)\phi_i f_i + \beta D_1 z f_i = 0,$$

ゆえに左から $D_2 y^{-1}$ を掛けることにより

$$\phi_i^2 f_i = -D_2 y^{-1}(D_1 y + \beta D_2 z)\phi_i f_i - \beta D_2 y^{-1} D_1 z f_i$$

となる。これを前に導いた結果に代入すれば,

$$G\begin{bmatrix} f_i \\ \phi_i f_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_i f_i \\ \phi_i^2 f_i \end{bmatrix}$$

となり，右辺の ϕ_i を括り出すことで所期の結果を得る。

ところで，すでに見たように，名目的恒常状態では $\beta=1$ となり，それを除いた固有根の数はたかだか $2l-1$ 個となるから，$|\phi_i|<\beta$ を満たす根の数 l_s も $2l-1$ 個が上限となる。他方，実質的恒常状態の場合はこれとは異なり，一般には $\beta\neq 1$ で，しかも 1 そのものもまた根となる。しかし，前節で見たとおり，1 という根は実質的な経路を考えるかぎりまったくその動きには関与しないので[49]，これら β と 1 を除いた根の数はたかだか $2l-2$ 個で，それらのうち $|\phi_i|<\beta$ を満たす根の数 $\bar{l}_s$ の上限もまた $2l-2$ 個となる。

ここで以下での考察をつうじて枢要な役割を演じる固有根の「分割」("split") という概念に定義を下しておこう。固有根システムが分割されるとは，β ならびに 1 を除いた固有根のうち $l-1$ 個が半径 β の円内に入り，残りの $l-1$ 個がその円外に出ること，つまりそのような意味で安定な根と不安定な根がちょうど半々になること，を指している。またいっそう極端な事態を考え，β 円のなかに入る根がすべて 0 そのものになる場合には，これを固有根システムが「精確に分割」("exactly split") される事態と呼ぶ。いうまでもなく後者は前者のスペシャル・ケースにほかならない[50]。

さていま定義されたような意味で当該経済の固有根システムが分割されたとしてみよう。すると,

(49) ただし当該の実質的恒常状態の近傍で名目的な初期条件から出発するときには，根 1 は経路の動きを律する力をもつ。もし $\beta>1$ なら，その経路は当該の実質的恒常状態に収束し，貨幣は漸近的に無価値となっていく。他方 $\beta<1$ なら，その経路は決して当該実質恒常状態に近づかないであろう。

(50) これらの定義については，Kehoe and Levine, *op. cit.*, pp.219-220 参照。

まず実質的恒常状態の下では $\bar{l}_s=l-1$，また $(2l-2)-\bar{l}_s=l-1$ となり，いずれにせよ前節の末尾に述べた確定性の条件が満たされることになる。他方，名目的恒常状態の下では，l_s の上限が $2l-1$ となるので，分割の仮定から $l-1$ 個が安定根，$l-1$ 個が不安定根となるときには，1個だけそのいずれとも分からない根が残される。が，もしそれが安定根であれば $l_s=(l-1)+1=l$ となり，不安定根であれば $l_s=l-1$ となる。ゆえに後者であれば前々節の確定性の条件が満たされるが，前者であれば $l_s>l-1$ となって不確定性を免れない。しかしその場合も $l_s-(l-1)=1$ であるから，不確定性の次元はたかだか1であって，それを越えることはない。以上を要するに，分割の条件が満たされるかぎり，実質的恒常状態下の相対価格はかならず局所一意となって確定し，一方名目的恒常状態下にあっては不確定性が生じうるが，その次元は1を越えず，絶対価格水準のみが不定となるにすぎない。すなわちゲイルの結果が保証されるのである。

こうして固有根システムがたまたま分割条件を満たすならば，単一財モデルでのゲイルの帰結が多数財モデルでも少なくとも局所的には生きる結果となる。ゆえに以下での課題は，つまるところ選好の分離可能性という経済的条件が上記の分割性を保証する根拠となることを示す点に絞られるであろう。つづく手順としては，まず各世代が1人の代表的個人から成る経済を想定して，彼の効用関数が通時的分離可能性を満たすとすれば，精確な分割性の条件が「近似的」に満たされることを証明する。そののちに前述したキーホー＝レヴァインの着想に倣って，そのような経済に perturbation を加え，その近傍の経済を考えた場合に，そこでは各世代が多数人から成るとしても彼らの選好の差違が小さいものであれば，また各人の効用関数が通時的依存関係をもつとしてもその程度が小さいものであれば，本来の分割性条件が満たされることを証明する。

以下しばらくの議論は，その前半の課題すなわち各期多数財・各世代1個人から成り，その代表的個人の効用関数が通時的分離可能性を満たす経済において，精確な分割性条件が「近似的」に成り立つことの証明に当てられる。そのための推論のなかで重要な意義をもつのは，分離可能な効用の下では行列 D_2y および D_1z が一般の場合とは違ってフルランクにはならず，ランク1になるという事実である。さしあたってはまずそのことを示す準備作業をクリアしておくことにしよう。

代表的個人の効用関数を純取引量の関数として $u(y,z)$ であらわし，それについては定石の標準的仮定（連続性，微分可能性など）はすべて満たされているものとする。予算制約式を $p'_t y+p'_{t+1}z=0$ とすれば，よく知られた第1階の最大化条件

$$\begin{aligned} &D_1u-\lambda p_t=0\\ &D_2u-\lambda p_{t+1}=0 \qquad\qquad (11.5)\\ &p'_t y+p'_{t+1}z=0 \end{aligned}$$

が，ある $\lambda>0$ について成立する。ここで断るまでもなく D_1u，D_2u はそれぞれ y，z の各成分に関する u の偏導関数の列ベクトルである。これら（11.5）の式を p_t や p_{t+1} について偏微分し，陰

関数の定理を用いれば，y や z の価格に関する偏導関数が計算できるが，いまたとえば D_2y，D_2z および $D_2\lambda$ について示せば

$$\begin{bmatrix} D_2y \\ D_2z \\ D_2\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^2u & D_{12}^2u & -p_t \\ D_{21}^2u & D_{22}^2u & -p_{t+1} \\ p_t' & p_{t+1}' & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda I \\ -z' \end{bmatrix}$$

のようであり，ここで右辺の D_{11}^2u，D_{12}^2u などはそれぞれ (y_i, y_j)，(y_i, z_j) に関する u の第 2 階偏導関数から成る $l\times l$ の行列である。いま

$$\begin{bmatrix} D_{11}^2u & D_{12}^2u & -p_t \\ D_{21}^2u & D_{22}^2u & -p_{t+1} \\ p_t' & p_{t+1}' & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A & B & \alpha \\ C & D & \beta \\ \gamma & \delta & \varepsilon \end{bmatrix}$$

とおけば，例えば D_2y は

$$D_2y = B\lambda I - \alpha z' \tag{11.6}$$

のような形で解くことができ，したがって D_2y を求めるには，B と α を計算すればよいわけである。(51)

注記したように，この点に関するキーホー＝レヴァインの数理は理解しがたいので，煩瑣ではあるが，ここではわれわれ自身による計算プロセスを記録しておくことにする。

最初に (11.6) の α を求めることから始めると，まず逆行列の定義から

$$\begin{bmatrix} D_{11}^2u & D_{12}^2u & -p_t \\ D_{21}^2u & D_{22}^2u & -p_{t+1} \\ p_t' & p_{t+1}' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & \alpha \\ C & D & \beta \\ \gamma & \delta & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11.7}$$

であるから，

$$\begin{bmatrix} D_{11}^2u & D_{12}^2u & -p_t \\ D_{21}^2u & D_{22}^2u & -p_{t+1} \\ p_t' & p_{t+1}' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

(51) D_2y の計算については，結果のみが Kehoe and Levine, *op. cit.*, p.220 に示されている。しかし，そこにいたるまでの導出過程が不明であり，また誤算が含まれているようにも思われる。彼らの c の定義 $c=p_{t+1}-D_{21}^2up_t$ は $c=p_{t+1}-D_{21}^2uD_{11}^2u^{-1}p_t$ と改めないと，整合的な結果は得られない。

これをさらに分解すると,

$$\begin{bmatrix} D_{11}^2 u & D_{12}^2 u \\ D_{21}^2 u & D_{22}^2 u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} p_t \\ p_{t+1} \end{bmatrix}\varepsilon=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ならびに

$$(p_t' \quad p_{t+1}')\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}=1$$

となる。そこで前半部から

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D_{11}^2 u & D_{12}^2 u \\ D_{21}^2 u & D_{22}^2 u \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} p_t \\ p_{t+1} \end{bmatrix}\varepsilon$$

を求め,これを後半部に代入することによって

$$(p_t' \quad p_{t+1}')\begin{bmatrix} D_{11}^2 u & D_{12}^2 u \\ D_{21}^2 u & D_{22}^2 u \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} p_t \\ p_{t+1} \end{bmatrix}\varepsilon=1 \tag{11.8}$$

を得るが,ここでキーホー＝レヴァインに倣い,簡単化のため

$$b=(p_t' \quad p_{t+1}')\begin{bmatrix} D_{11}^2 u & D_{12}^2 u \\ D_{21}^2 u & D_{22}^2 u \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} p_t \\ p_{t+1} \end{bmatrix}$$

とおけば,

$$b\varepsilon=1 \quad \text{あるいは} \quad \varepsilon=\frac{1}{b}$$

となり,よってこれを前の (α, β) の式に代入して

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}=\frac{1}{b}\begin{bmatrix} D_{11}^2 u & D_{12}^2 u \\ D_{21}^2 u & D_{22}^2 u \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} p_t \\ p_{t+1} \end{bmatrix} \tag{11.9}$$

を得る。さて

$$\begin{bmatrix} D_{11}^2 u & D_{12}^2 u \\ D_{21}^2 u & D_{22}^2 u \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

とおき,

$$B_{11}=(D_{11}^2u-D_{12}^2uD_{22}^2u^{-1}D_{21}^2u)^{-1}$$
$$B_{12}=-D_{11}^2u^{-1}D_{12}^2u(D_{22}^2u-D_{21}^2uD_{11}^2u^{-1}D_{12}^2u)^{-1}$$
$$B_{21}=-D_{22}^2u^{-1}D_{21}^2u(D_{11}^2u-D_{12}^2uD_{22}^2u^{-1}D_{21}^2u)^{-1}$$
$$B_{22}=(D_{22}^2u-D_{21}^2uD_{11}^2u^{-1}D_{12}^2u)^{-1}$$

が成り立つことに注目すれば,[52] (11.9) から

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{b}(B_{11}p_t+B_{12}p_{t+1})\\ &= \frac{1}{b}[(D_{11}^2u-D_{12}^2uD_{22}^2u^{-1}D_{21}^2u)^{-1}p_t-D_{11}^2u^{-1}D_{12}^2u(D_{22}^2u-D_{21}^2uD_{11}^2u^{-1}D_{12}^2u)^{-1}p_{t+1}],\end{aligned}$$

よってふたたびキーホー＝レヴァインに倣い

$$A=(D_{22}^2u-D_{21}^2uD_{11}^2u^{-1}D_{12}^2u)^{-1}$$

とおくことにより, α が

$$\alpha = \frac{1}{b}[(D_{11}^2u-D_{12}^2uD_{22}^2u^{-1}D_{21}^2u)^{-1}p_t-D_{11}^2u^{-1}D_{12}^2uAp_{t+1}] \tag{11.10}$$

のように求められる。

つぎに同じ要領で B を求めたい。(11.7) からこんどは B に関連する部分をとり出すと,

$$\begin{bmatrix} D_{11}^2u & D_{12}^2u & -p_t \\ D_{21}^2u & D_{22}^2u & -p_{t+1} \\ p_t' & p_{t+1}' & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B \\ D \\ \delta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix},$$

(52) 一般に

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \text{ここで } A_{11}, A_{22} \text{ は正方行列}$$

で, $|A_{11}|\neq 0, |A_{22}|\neq 0$ であれば,

$$B=A^{-1}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \text{とするとき,}$$

$$B_{11}=(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$$
$$B_{12}=-A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$$
$$B_{21}=-A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$$
$$B_{22}=(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}。$$

Dhrymes, *op. cit.*, pp.37-38 参照。

やはりこれを分解して

$$\begin{bmatrix} D_{11}^2 u & D_{12}^2 u \\ D_{21}^2 u & D_{22}^2 u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_t \\ p_{t+1} \end{bmatrix} \delta = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

および

$$(p_t' \quad p_{t+1}') \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = 0.$$

そこで前と同様，前半部から

$$\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^2 u & D_{12}^2 u \\ D_{21}^2 u & D_{22}^2 u \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_t \\ p_{t+1} \end{bmatrix} \delta \right\} \tag{11.11}$$

を求め，これを後半分に代入すれば

$$(p_t' \quad p_{t+1}') \begin{bmatrix} D_{11}^2 u & D_{12}^2 u \\ D_{21}^2 u & D_{22}^2 u \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_t \\ p_{t+1} \end{bmatrix} \delta \right\} = 0 \tag{11.12}$$

を得，ゆえに b の定義から

$$(p_t' \quad p_{t+1}') \begin{bmatrix} D_{11}^2 u & D_{12}^2 u \\ D_{21}^2 u & D_{22}^2 u \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} + b\delta = 0$$

となって，

$$\delta = -\frac{1}{b}(p_t' \quad p_{t+1}') \begin{bmatrix} D_{11}^2 u & D_{12}^2 u \\ D_{21}^2 u & D_{22}^2 u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

を得る。この式に前の結果を利用すれば，δ の値が

$$\begin{aligned} \delta &= -\frac{1}{b}(p_t' \quad p_{t+1}') \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{b}(p_t' \quad p_{t+1}') \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{b}(p_t' \quad p_{t+1}') \begin{bmatrix} -D_{11}^2 u^{-1} D_{12}^2 u A \\ A \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{b}(p_t' D_{11}^2 u^{-1} D_{12}^2 u A - p_{t+1}' A) \end{aligned}$$

のように求められる。そこで（11.11）を

$$\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t \\ p_{t+1} \end{bmatrix} \delta$$

と書き換えて，そこから B を

$$B = B_{12} + (B_{11} \quad B_{12}) \begin{bmatrix} p_t \\ p_{t+1} \end{bmatrix} \delta$$

として求め，上記の諸結果をその右辺に適用すれば

$$\begin{aligned} B &= -D_{11}^2 u^{-1} D_{12}^2 uA + [(D_{11}^2 u - D_{12}^2 u D_{22}^2 u^{-1} D_{21}^2 u)^{-1} \quad -D_{11}^2 u^{-1} D_{12}^2 uA] \begin{bmatrix} p_t \\ p_{t+1} \end{bmatrix} \delta \\ &= -D_{11}^2 u^{-1} D_{12}^2 uA \\ &\quad + [(D_{11}^2 u - D_{12}^2 u D_{22}^2 u^{-1} D_{21}^2 u)^{-1} p_t - D_{11}^2 u^{-1} D_{12}^2 uA p_{t+1}] (\frac{1}{b} p_t' D_{11}^2 u^{-1} D_{12}^2 uA - \frac{1}{b} p_{t+1}' A) \end{aligned} \tag{11.13}$$

という結果を得る。

ところで（11.10）や（11.13）の右辺には $(D_{11}^2 u - D_{12}^2 u D_{22}^2 u^{-1} D_{21}^2 u)^{-1}$ という項が含まれており，計算上不便であるので，それをさらに分解する方策を考える。前記の定義により

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}^2 u & D_{12}^2 u \\ D_{21}^2 u & D_{22}^2 u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

であるから，

$$B_{11} D_{11}^2 u + B_{12} D_{21}^2 u = I$$

すなわち

$$(D_{11}^2 u - D_{12}^2 u D_{22}^2 u^{-1} D_{21}^2 u)^{-1} D_{11}^2 u - D_{11}^2 u^{-1} D_{12}^2 uA D_{21}^2 u = I$$

となり，ゆえにこの関係から

$$\begin{aligned} &(D_{11}^2 u - D_{12}^2 u D_{22}^2 u^{-1} D_{21}^2 u)^{-1} \\ &= (D_{11}^2 u^{-1} D_{12}^2 uA D_{21}^2 u + I) D_{11}^2 u^{-1} \\ &= D_{11}^2 u^{-1} D_{12}^2 uA D_{21}^2 u D_{11}^2 u^{-1} + D_{11}^2 u^{-1} \end{aligned}$$

という結果が導かれる。よって a と B の最終的表現はこの結果を代入して

$$\alpha=\frac{1}{b}[(D_{11}^2u^{-1}D_{12}^2uAD_{21}^2uD_{11}^2u^{-1}+D_{11}^2u^{-1})p_t-D_{11}^2u^{-1}D_{12}^2uAp_{t+1}] \tag{11.14}$$

$$\begin{aligned}B=&-D_{11}^2u^{-1}D_{12}^2uA+[(D_{11}^2u^{-1}D_{12}^2uAD_{21}^2uD_{11}^2u^{-1}+D_{11}^2u^{-1})p_t\\&-D_{11}^2u^{-1}D_{12}^2uAp_{t+1}](\frac{1}{b}p_t'D_{11}^2u^{-1}D_{12}^2uA-\frac{1}{b}p_{t+1}'A)\end{aligned} \tag{11.15}$$

ということになる。

ようやくここまでの計算で α と B が求められたので，それを（11.6）に用いることにより，つぎのように D_2y が求められる。すなわち

$$\begin{aligned}D_2y=&-\lambda D_{11}^2u^{-1}D_{12}^2uA\\&+[\frac{\lambda}{b}(D_{11}^2u^{-1}D_{12}^2uAD_{21}^2uD_{11}^2u^{-1}+D_{11}^2u^{-1})p_t\\&-\frac{\lambda}{b}(D_{11}^2u^{-1}D_{12}^2uA)p_{t+1}](p_t'D_{11}^2u^{-1}D_{12}^2uA-p_{t+1}'A)\\&-\frac{1}{b}(D_{11}^2u^{-1}D_{12}^2uAD_{21}^2uD_{11}^2u^{-1}+D_{11}^2u^{-1})p_tz'\\&+\frac{1}{b}D_{11}^2u^{-1}D_{12}^2uAp_{t+1}z'\end{aligned} \tag{11.16}$$

である。そこでつぎの手順として，これを以下の推論に便利な形に整頓することを考える。ポイントは右辺をまず $-D_{11}^2u^{-1}$ で括ったのち，さらに残りを D_{12}^2uA で括れる項と括れない項に分けることで，すると

$$\begin{aligned}J=&\lambda I-\frac{\lambda}{b}D_{21}^2uD_{11}^2u^{-1}p_tp_t'D_{11}^2u^{-1}D_{12}^2uA\\&+\frac{\lambda}{b}D_{21}^2uD_{11}^2u^{-1}p_tp_{t+1}'A\\&+\frac{\lambda}{b}p_{t+1}p_t'D_{11}^2u^{-1}D_{12}^2uA-\frac{\lambda}{b}p_{t+1}p_{t+1}'A\\&+\frac{1}{b}D_{21}^2uD_{11}^2u^{-1}p_tz'-\frac{1}{b}p_{t+1}z'\\K=&-\lambda p_t'D_{11}^2u^{-1}D_{12}^2uA+\lambda p_{t+1}'A+z'\end{aligned}$$

とおくことにより，（11.16）は

$$D_2y=-D_{11}^2u^{-1}(D_{12}^2uAJ+\frac{1}{b}p_tK) \tag{11.17}$$

のような便利な形にまとめて書けることになる。[53] ここでのちの議論のため，J は $l\times l$ の行列であり，K は $1\times l$ の行ベクトルであることに注目しておこう。

さて，効用関数に関する通時的な分離可能性の仮定を，キーホー＝レヴァインどおりに

$$u(y,z)=v(h(y),g(z)) \tag{11.18}$$

の形で設定することにしよう。すると前記の第１階条件は

$$D_1u=\frac{\partial v}{\partial h}Dh=\lambda p_t$$

$$D_2u=\frac{\partial v}{\partial g}Dg=\lambda p_{t+1}$$

のように書かれることになり，ここで Dh, Dg はそれぞれ y, z の各成分で h, g を微分して得られる偏導関数の列ベクトルである。いま記号を簡略化して $\partial v/\partial h=s$, $\partial v/\partial g=t$ と記せば，上記のところから

$$D_{12}^2u=D_{12}^2vDhDg'=\frac{\lambda^2}{st}D_{12}^2vp_tp'_{t+1} \tag{11.19}$$

となる。ゆえに分離可能効用の仮定の下では（11.19）を（11.17）に代入することによって，D_2y は

$$D_2y=-D_{11}^2u^{-1}p_t(\frac{\lambda^2}{st}D_{12}^2vp'_{t+1}AJ+\frac{1}{b}K) \tag{11.20}$$

という形をとることになる。

すると D_2y は前のようにフルランクにはならずランク１になることが，（11.20）の右辺を調べてみることからすぐ分かる。まず $D_{11}^2u^{-1}$ は $l\times l$, p_t は $l\times 1$ であるから，$D_{11}^2u^{-1}p_t$ の部分は $l\times 1$ である。また括弧のなかの D_{12}^2v はスカラー，p'_{t+1} は $1\times l$, A も J も $l\times l$, よって $p'_{t+1}AJ$ の部分は $1\times l$, K もまた $1\times l$ であり，括弧のなか全体は $1\times l$ である。つまり D_2y は $l\times 1$ のベクトル a と $1\times l$ のベクトル b' の積

$$ab'=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_l\end{bmatrix}(b_1\quad b_2\cdots\cdots b_l)$$

の形になっているわけであって，計算すれば

---

(53)（11.17）がキーホー＝レヴァインの（6）式（*op. cit.*, p.220）

$D_2y=-D_{11}^2u^{-1}(D_{12}^2uA(\lambda I-\frac{1}{b}cd')+\frac{1}{b}p_td'$　ここで $c=p_{t+1}-D_{21}^2up_t$, $d=\lambda Ac+z$

に相当する。注（52）に記したように c を修正して計算すれば，J が $\lambda I-(1/b)cd'$ に，また K が d' に一致することが容易に照合されよう。

$$\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots\cdots & a_1b_l \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots\cdots & a_2b_l \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_lb_1 & a_lb_2 & \cdots\cdots & a_lb_l \end{bmatrix} = (b_1a \quad b_2a \cdots\cdots b_la)$$

のように，まったく同一の列ベクトルにそれぞれ違うスカラーを掛けたものが各列になっているのである。これは D_2y には1次独立な列ベクトルが1個しかないことにほかならず，よって D_2y のランクは1になるのである。

面倒な計算を繰り返すことはしないが，終始同様なやり方で D_1z もまたランク1になることを確かめてみることができるであろう。念を押したい読者はみずから労をとってみていただきたい。

分離可能な効用関数の場合はこうして D_2y および D_1z のランクがいずれも1となり，そのことが，やがて示されるように，固有根システムが分割されることの根拠となるのである。これでいくばくかそのことの証明にとりかかれる段階に近づいたわけであるが，ここでつづく推論がもとづく諸仮定を明記し，それらについて二三の註釈を加えておくのが処を得ているであろう。以下の議論は，つぎの三つの新しい正則性の仮定を前提として進められる。

A.12　$D_1y+\beta D_2z$ および D_2z は非特異。

A.13　$D_2y(D_1y+\beta D_2z)^{-1}D_2y\neq 0$。

A.14　$|R(\phi)|=0$ を満たし，かつ0にも β にもひとしくない根 ϕ_2 がある。

最初の仮定の D_1y および D_2z は，それぞれ同期の価格と超過需要との関係にかかわる代替効果行列と所得効果行列の和から成っている。よく知られているように代替効果行列は負の定符号でランク l，所得効果行列はそれぞれ違うスカラーを掛けたまったく同じ列から成っているからランク1。したがってそれらの行列の和が一般に非特異であるという仮定は，さほど不当なものではないといってよかろう。

つぎの仮定は D_2y の行と $(D_1y+\beta D_2z)^{-1}D_2y$ の列の組に少なくとも一つは直交しないものがあるということであり，これまたそうした組のすべてが直交しなければならない経済的理由はとくに見当らないから，妥当なものとみなしてよいであろう。

最後の仮定は，実質的恒常状態を考えるときには一般に $\beta\neq 1$ であり，また $|R(1)|=0$ となることがワルラスの法則 $p'(D_1y+D_2y+\beta D_1z+\beta D_2z)=0,\ p'\neq 0$ から

$$|D_1y+D_2y+\beta D_1z+\beta D_2z|=|D_2y+(D_1y+\beta D_2z)+\beta D_1z|=0$$

となることによって満たされるので，$\phi_2=1$ とすれば満たされることになる。他方，名目的恒常状態の場合は $\beta=1$ となるから，上記の論理は用いられないが，1個はフリーな根があることを考慮に入れれば，自足されると考えても差し支えなかろう。

序ながら，A.14は β も 0 も $|R(\phi_i)|=0$ の根になるかのような含意で述べられているが，たとえば β が根となることについては目下の場合，D_2y が非特異という仮定の下でなされた前稿の議論は適用できない。しかし，D_2y がフルランクではないとしても，(11.1) から

$$(D_2y\beta^2+(D_1y+\beta D_2z)\beta+\beta D_1z)p=0$$

となり，よって $p\neq0$ であれば

$$|D_2y\beta^2+(D_1y+\beta D_2z)\beta+\beta D_1z|=0$$

となるので，$|R(\beta)|=0$ が成り立つことは明白である。また 0 についても $R(0)=\beta D_1z$，したがって $|R(0)|=\beta^l|D_1z|$，そして D_1z がランク 1 であることから，$|D_1z|=0$ となるので，$|R(0)|=0$ となることも明らかであろう。

12

前稿で扱った D_2y 非特異の場合は，(11.1) の左から D_2y^{-1} を掛け，その結果得られる 2 階の定差方程式システムを解いて，(p_{t-1}, p_t) に対して p_{t+1} を決定することができた。ところが目下の場合は D_2y がフルランクにはならず，従前の措置をとることができないので，あらためて (p_{t-1}, p_t) に対し (p_{t-1}, p_t, p_{t+1}) が (11.1) を解くような p_{t+1} を見出すことができるかどうか，その間（かん）の事情を仔細に検討してみる必要に迫られる。(54)

まず前にも想定したように (ϕ_i, f_i) が $R(\phi_i)f_i=0$ を満たしているとすれば，$R(\phi_i)$ の定義から

$$(D_2y\phi_i^2+(D_1y+\beta D_2z)\phi_i+\beta D_1z)f_i=0$$

となるから，任意のスカラー α_i を掛けても

$$\alpha_iD_2y\phi_i^2f_i+\alpha_i(D_1y+\beta D_2z)\phi_if_i+\alpha_i\beta D_1zf_i=0$$

となり，したがってこれを任意個数の i について集計すれば

$$\sum_i\alpha_iD_2y\phi_i^2f_i+\sum_i\alpha_i(D_1y+\beta D_2z)\phi_if_i+\sum_i\alpha_i\beta D_1zf_i=0,$$

そこで i に関係しない部分を前に出すことにより

$$D_2y\sum_i\alpha_i\phi_i^2f_i+(D_1y+\beta D_2z)\sum_i\alpha_i\phi_if_i+\beta D_1z\sum_i\alpha_if_i=0 \tag{12.1}$$

(54) 以下の議論については，Kehoe and Levine, *op. cit.*, pp.222-223 参照。

という式が成り立つことになる。この式はもし $p_{t-1}=\sum_i \alpha_i f_i$, $p_t=\sum_i \alpha_i \phi_i f_i$ であるとすれば，$p_{t+1}=\sum_i \alpha_i \phi_i^2 f_i$ が（11.1）の解となること，あるいは同じことになるが，$(p_{t-1}, p_t)=\sum_i \alpha_i(f_i, \phi_i f_i)$ であるとすれば，$(p_t, p_{t+1})=\sum_i \alpha_i(\phi_i f_i, \phi_i^2 f_i)$ が（11.1）を解くことを意味している。よっていまある p_{t+1} に対して (p_{t-1}, p_t, p_{t+1}) が（11.1）を解くような (p_{t-1}, p_t) の空間を Q_L と定義すれば，上記の議論から

$$\sum_i \alpha_i(f_i, \phi_i f_i)\in Q_L$$

となることが分かる。

ところで $(p_{t-1}, p_t), (p'_{t-1}, p'_t)\in Q_L$ とすれば $(p_{t-1}+p'_{t-1}, p_t+p'_t)\in Q_L$ となること，またすべての $(p_{t-1}, p_t)\in Q_L$, $c\in Q_L$ に対して $(cp_{t-1}, cp_t)\in Q_L$ となることが容易に確かめられるから，Q_L は R^{2l} の線形部分空間であり，したがってその次元を考えることができる。以下では rank $D_2y=1$ であるならば，かならず dim $Q_L=l+1$ になることをまず示す。

事実 rank $D_2y=1$ であれば，ある l 次元列ベクトル d とスカラー $1, c_2, \cdots\cdots, c_l$ を用いて $D_2y=(d \quad c_2d \ \cdots\cdots \ c_ld)$ のように書けるので，任意の l 次元列ベクトル x に対して

$$\begin{aligned}
D_2yx &=(d \quad c_2d \ \cdots\cdots \ c_ld)x \\
&=dx_1+c_2dx_2+ \ \cdots\cdots \ +c_ldx_l \\
&=(x_1+c_2x_2+ \ \cdots\cdots \ +c_lx_l)d \\
&=d \text{ のスカラー倍}
\end{aligned}$$

となり，D_2yx は x をどのように動かしてもスカラーの部分が変わるだけで，ある直線上を動くにすぎないことが分かる。つまり

$$\mathrm{Im}\, D_2y=\{D_2yx|x\in R^l\}$$

とすれば，Im D_2y がその直線に該当し dim Im $D_2y=1$ である。よって上記の Im D_2y の定義の x を p_{t+1} と考え，p_{t+1} の張る空間を R^l そのものと考えれば dim $D_2yR^l=1$ となるのである。

そこでつぎに dim $D_2yR^l=1$ であることから dim $Q_L=l+1$ になることを導く推論となる。そのために仮定 A.12を用いて，（11.1）を

$$p_t=-(D_1y+\beta D_2z)^{-1}(D_2yp_{t+1}+\beta D_1zp_{t-1}) \tag{12.2}$$

と書き換え，

$$\begin{aligned}
-(D_1y+\beta D_2z)^{-1}&=M \\
-\beta(D_1y+\beta D_2z)^{-1}D_1z&=N
\end{aligned}$$

とおいて,

$$p_t = MD_2yp_{t+1} + Np_{t-1} \tag{12.3}$$

の形で用いることにする。いま $e_i, i=1, \cdots\cdots, l$ をそれぞれ R^l の単位列ベクトルすなわち1を第 i 成分，0をそれ以外の成分とする l 次元列ベクトルとし，また $\mathrm{Im}\, D_2y$ の原点以外の任意の点を基底に選んで，それを $\bar{x}$ とする。するとこれらを用いて

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ Ne_1 \end{bmatrix} \in R^{2l},\ \cdots\cdots,\ \begin{bmatrix} e_l \\ Ne_l \end{bmatrix} \in R^{2l},\ \begin{bmatrix} 0 \\ M\bar{x} \end{bmatrix} \in R^{2l}$$

のような $l+1$ 個の列ベクトルをつくってみるとき，もしこれらのベクトルが Q_L の基底になることが示されれば，基底の個数すなわち次元であるところから，$\dim Q_L = l+1$ という所期の結果が導かれることになるのである。

よってこの結果を得るためには，上記 $l+1$ 個のベクトルが Q_L の基底になること，すなわち

（イ） 上記のベクトルが1次独立であること。

（ロ） 任意の $(p_{t-1}, p_t) \in Q_L$ に対してある $\gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_l, \gamma_{l+1}$ が存在して

$$\begin{bmatrix} p_{t-1} \\ p_t \end{bmatrix} = \gamma_1 \begin{bmatrix} e_1 \\ Ne_1 \end{bmatrix} + \cdots\cdots + \gamma_l \begin{bmatrix} e_l \\ Ne_l \end{bmatrix} + \gamma_{l+1} \begin{bmatrix} 0 \\ M\bar{x} \end{bmatrix}$$

となること。

（ハ） 逆に任意の $\gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_l, \gamma_{l+1}$ に対して

$$\gamma_1 \begin{bmatrix} e_1 \\ Ne_1 \end{bmatrix} + \cdots\cdots + \gamma_l \begin{bmatrix} e_l \\ Ne_l \end{bmatrix} + \gamma_{l+1} \begin{bmatrix} 0 \\ M\bar{x} \end{bmatrix} \in Q_L$$

となること，あるいは同じことになるが

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ Ne_1 \end{bmatrix} \in Q_L,\ \cdots\cdots,\ \begin{bmatrix} e_l \\ Ne_l \end{bmatrix} \in Q_L,\ \begin{bmatrix} 0 \\ M\bar{x} \end{bmatrix} \in Q_L$$

となること。

を示せばよいわけである。以下しばらくの議論はそのための推論である。

（イ）の証明。

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} e_1 \\ Ne_1 \end{bmatrix} + \cdots\cdots + \alpha_l \begin{bmatrix} e_l \\ Ne_l \end{bmatrix} + \alpha_{l+1} \begin{bmatrix} 0 \\ M\bar{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であるとすれば，$\alpha_1=\cdots\cdots=\alpha_l=\alpha_{l+1}=0$ になることを示せばよい。まず 1 行目から l 行目までについて $\alpha_1=0, \cdots\cdots, \alpha_l=0$ となることは，$e_1, \cdots\cdots, e_l$ の定義からただちに明らか。そこでこの結果を上の式に用いれば，

$$\alpha_{l+1}\begin{bmatrix} 0 \\ M\bar{x} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となり，$\alpha_{l+1}M\bar{x}=0$ となる。ここで M の定義に戻れば，$-M=(D_1y+\beta D_2z)^{-1}$，ゆえに $(-M)^{-1}=D_1y+\beta D_2z$ であるから，仮定A.12から $(-M)^{-1}$ は非特異。そこで $|(-M)^{-1}|\neq 0$，すなわち $|-M|\neq 0$ となり，$|M|\neq 0$ となる。するとこの結果から $M\bar{x}\neq 0$ となることがただちに分かる。なぜなら，もし $M\bar{x}=0$ であるとすれば，上に示したところから $\bar{x}=M^{-1}0=0$ となり，$\bar{x}\neq 0$ に矛盾するからである。よって $\alpha_{l+1}M\bar{x}=0$ から $\alpha_{l+1}=0$ とならねばならず，これで $\alpha_1=\cdots\cdots=\alpha_l=\alpha_{l+1}=0$ となることが示された。

（ロ）の証明。まず任意に $(p_{t-1}, p_t)\in Q_L$ をとると，Q_L の定義から，ある p_{t+1} が存在して (p_{t-1}, p_t, p_{t+1}) は（11.1）を満たし，これは（12.2）あるいは（12.3）を満たすことと同値である。いまその右辺第 1 項に注目すれば，$D_2yp_{t+1}\in \mathrm{Im}\, D_2y$ であることから，ある $\gamma_{l+1}\in R^l$ をとって $D_2yp_{t+1}=\gamma_{l+1}\bar{x}$ とすることができる。つぎに第 2 項に注目すれば，やはりある $\gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_l$ をとって $p_{t-1}=\sum_{i=1}^{l}\gamma_i e_i$ とすることができる。すると（12.3）から

$$p_t=\gamma_{l+1}M\bar{x}+\sum_{i=1}^{l}\gamma_i Ne_i$$

となり，以上で

$$p_{t-1}=\gamma_1e_1+\cdots\cdots+\gamma_le_l$$
$$p_t=\gamma_1Ne_1+\cdots\cdots+\gamma_lNe_l+\gamma_{l+1}M\bar{x}$$

となることが知られた。そこでこれをまとめて書けば

$$\begin{bmatrix} p_{t-1} \\ p_t \end{bmatrix}=\gamma_1\begin{bmatrix} e_1 \\ Ne_1 \end{bmatrix}+\cdots\cdots+\gamma_l\begin{bmatrix} e_l \\ Ne_l \end{bmatrix}+\gamma_{l+1}\begin{bmatrix} 0 \\ M\bar{x} \end{bmatrix}$$

となり，（ロ）が示された。

（ハ）の証明。まず $(e_1, Ne_1)\in Q_L$ となることを示す。いま $p_{t+1}=0$ とし，$p_{t-1}=e_1, p_t=Ne_1$ とすれば，$D_2yp_{t+1}=0$ であるから，

$$p_t=Ne_1=-\beta(D_1y+\beta D_2z)^{-1}D_1zp_{t-1}=-(D_1y+\beta D_2z)^{-1}(D_2yp_{t+1}+\beta D_1zp_{t-1})$$

となって，（12.2）すなわち（11.1）が満たされることになる。よって上に設定した (p_{t-1}, p_t, p_{t+1})

は（11.1）を満たすことが知られ，$(p_{t-1}, p_t)\in Q_L$ すなわち $(e_1, Ne_1)\in Q_L$ となる。

あと $e_2, \cdots\cdots, e_l$ についてもまったく同様に考えられるから，$(e_i, Ne_i)\in Q_L$, $i=2, \cdots\cdots, l$ となることも明らか。

そこで最後に $(0, M\bar{x})\in Q_L$ となることを示そう。$\bar{x}\in \mathrm{Im}\, D_2y$ であるところから，ある p_{t+1} が存在して，$\bar{x}=D_2yp_{t+1}$ となる。よって $p_{t-1}=0, p_t=M\bar{x}$ とすれば，

$$p_t=M\bar{x}=-(D_1y+\beta D_2z)^{-1}D_2yp_{t+1}=-(D_1y+\beta D_2z)^{-1}(D_2yp_{t+1}+\beta D_1zp_{t-1})$$

となり，（12.2）が成立するので，前と同様上に定めた (p_{t-1}, p_t, p_{t+1}) は（11.1）を満たす。ゆえに $(p_{t-1}, p_t)\in Q_L$ すなわち $(0, M\bar{x})\in Q_L$ となることが判明した。

これで $\dim Q_L=l+1$ の証明を終えたので，つぎは（11.1）が p_{t+1} について解けるための条件が

$$(p_{t-1}, p_t)\in \mathrm{span}\{(f_1, \phi_1f_1), (f_2, \phi_2f_2), \cdots\cdots, (f_{l+1}, \phi_{l+1}f_{l+1})\}$$

と同値になることを示す。それには $\phi_1, \phi_2, \cdots\cdots, \phi_{l+1}, f_1, f_2, \cdots\cdots, f_{l+1}$ を，$|R(\phi_i)|=0, R(\phi_i)f_i=0$ かつ $f_i\neq 0(i=1, 2, \cdots\cdots, l+1)$ を満たす実数および l 次元ベクトルとするとき，つぎの要領で事実 $(f_1, \phi_1f_1), (f_2, \phi_2f_2), \cdots\cdots, (f_{l+1}, \phi_{l+1}f_{l+1})$ がつくれることを示せばよい。

まず $\phi_1=\beta, f_1=p$ とすれば，$|R(\phi_1)|=0$ となることはすでに証明ずみ。また $R(\phi_1)f_1=0$ となることも，恒常状態 (p, β) の下で（11.1）を考えれば

$$D_2y\beta^2p+(D_1y+\beta D_2z)\beta p+\beta D_1zp=0,$$

よってこれを p で括れば $R(\beta)p=0$ となることから明らかである。$f_1=p\neq 0$ であることはいうまでもない。

つぎに ϕ_2 としては，仮定A.14で存在が保証されているところの0でも β でもない根を考える。すると同じくA.14から $|R(\phi_2)|=0$。またある $f_2\neq 0$ が存在して $R(\phi_2)f_2=0$ とできることについては，つぎのように考えれば足りる。事実，線形代数の周知の定理[(55)]から，まず $\dim\ker R(\phi_2)=l-\dim\mathrm{Im}\, R(\phi_2)$。そして $\dim\mathrm{Im}\, R(\phi_2)=\mathrm{rank}\, R(\phi_2)$ で，$|R(\phi_2)|=0$ であるところから $R(\phi_2)$ はフルランクにはなれず，$\dim\mathrm{Im}\, R(\phi_2)\leqq l-1$。ゆえに $\dim\ker R(\phi_2)\geqq 1$ となる。ここで $\ker R(\phi_2)$ の次元が1以上ということは，集合 $\{x\in R^l|R(\phi_2)x=0\}$ が少なくとも原点を通る直線を含んでいるということで，よってその直線上に原点以外の点 f_2 をとれば，$R(\phi_2)f_2=0$，$f_2\neq 0$ となって，ϕ_2 についても $|R(\phi_i)|=0$，$R(\phi_i)f_i=0$，$f_i\neq 0$ の3条件がすべて満たされることになる。

そこで最後に $\phi_3, \cdots\cdots, \phi_{l+1}$ についてであるが，まず $R(0)=\beta D_1z$ を考えると，これはランク1であるから，$\dim\ker R(0)=l-\dim\mathrm{Im}\, R(0)=l-1$ となり，$\ker R(0)$ については $l-1$ 個の基底

（55） 佐武一郎『線型代数学』，第1版，1958，第39刷，1982，p.104，定理7参照。

をとってくることができる。それらを $f_3, \cdots\cdots, f_{l+1}$ とし，ϕ_3 から ϕ_{l+1} までについては $\phi_3 = \cdots\cdots = \phi_{l+1} = 0$ とする。すると rank $R(0)=1$ であることから，$|R(0)|=0$ となるので，$|R(\phi_3)| = \cdots\cdots = |R(\phi_{l+1})|=0$。そして $f_3, \cdots\cdots, f_{l+1}$ は ker $R(0)$ からとってきているので，$R(0)f_3 = \cdots\cdots = R(0)f_{l+1} = 0$。さらに $f_3, \cdots\cdots, f_{l+1}$ は基底であるから，当然 $f_3 \neq 0, \cdots\cdots, f_{l+1} \neq 0$。ゆえに $\phi_i, i=3, \cdots\cdots, l+1$ についても $|R(\phi_i)|=0$，$R(\phi_i)f_i=0$，$f_i \neq 0$ の 3 条件がすべて満たされることが示された。

これで $l+1$ 個の $(f_i, \phi_i f_i)$ が出揃ったが，それらは 1 次独立である。事実もしそうでなかったとすれば，

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} f_1 \\ \phi_1 f_1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} f_2 \\ \phi_2 f_2 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} f_3 \\ \phi_3 f_3 \end{bmatrix} + \cdots\cdots + \alpha_l \begin{bmatrix} f_l \\ \phi_l f_l \end{bmatrix} + \alpha_{l+1} \begin{bmatrix} f_{l+1} \\ \phi_{l+1} f_{l+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となるような非ゼロのウェート $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots, \alpha_l, \alpha_{l+1}$ があることになるが，いま上式を分けて書き，ϕ_3 以下の ϕ_i がすべて 0 であることを考慮すれば

$$\begin{aligned} &\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \cdots\cdots + \alpha_l f_l + \alpha_{l+1} f_{l+1} = 0 \\ &\alpha_1 \phi_1 f_1 + \alpha_2 \phi_2 f_2 = 0 \end{aligned} \tag{12.4}$$

となる。$\phi_2 \neq 0$ であるから，下の式を ϕ_2 で割って

$$\alpha_2 f_2 = -\alpha_1 \frac{\phi_1}{\phi_2} f_1$$

を求め，それを上の式に代入すれば

$$\alpha_1 f_1 \left(1 - \frac{\phi_1}{\phi_2}\right) + \sum_{i=3}^{l+1} \alpha_i f_i = 0$$

を得，左から $D_1 z$ を掛けて

$$D_1 z \alpha_1 f_1 \left(1 - \frac{\phi_1}{\phi_2}\right) = -D_1 z \sum_{i=3}^{l+1} \alpha_i f_i = -\sum_{i=3}^{l+1} \alpha_i D_1 z f_i$$

を得る。ところが $i=3, \cdots\cdots, l+1$ については $R(0)f_i=0$ であり，$R(0)=\beta D_1 z$ であるから，$\beta D_1 z f_i = 0$，そして $\beta \neq 0$ であるから $D_1 z f_i = 0$，ゆえに上式の右辺は 0 にならなくてはならない。そこで

$$D_1 z \alpha_1 f_1 \left(1 - \frac{\phi_1}{\phi_2}\right) = 0$$

となるが，A.14によって $\phi_1 \neq \phi_2$ すなわち $1-(\phi_1/\phi_2) \neq 0$，ゆえにもし $\alpha_1 \neq 0$ であれば

$$D_1 z f_1 = 0$$

という帰結を得る。そして $\alpha_1 \neq 0$ となることは，つぎの推論から明らかである。いま $\alpha_1 = 0$ であるとすれば，(12.4) の下の式から $\alpha_2 \phi_2 f_2 = 0$，ここで $\phi_2 \neq 0$，また $f_2 \neq 0$ であるから，$\alpha_2 = 0$。よって

(12.4) の上の式から

$$\alpha_3 f_3 + \cdots\cdots + \alpha_l f_l + \alpha_{l+1} f_{l+1} = 0$$

となる。ところが $f_3, \cdots\cdots, f_{l+1}$ は 1 次独立であるから，上の式が正しければ $\alpha_3 = \cdots\cdots = \alpha_l = \alpha_{l+1} = 0$ とならねばならず，すると $i=1, 2, 3, \cdots\cdots, l+1$ のすべてについて α_i が 0 とならねばならないことになる。これはもともとの背理法の仮定に矛盾する。

さてこれで背理法の仮定の下では，$D_1 z f_1 = 0$ となることになった。すると z のゼロ次同次性から $D_1 zp + \beta D_2 zp = 0$ が成り立っているので，結局 $D_2 zp = 0$ ということにならざるを得ない。ところが A.12により $D_2 z$ は非特異であるから，$D_2 z^{-1}$ が存在し，それを上の帰結の左から掛けて $p = D_2 z^{-1} 0 = 0$，これは $p \neq 0$ に矛盾する。

ここまでの議論で，$i=1, 2, \cdots\cdots, l+1$ のすべてについて $|R(\phi_i)| = 0$，$R(\phi_i) f_i = 0$，$f_i \neq 0$ を満たす ϕ_i，f_i が存在し，しかも $(f_1, \phi_1 f_1), (f_2, \phi_2 f_2), \cdots\cdots, (f_{l+1}, \phi_{l+1} f_{l+1})$ は 1 次独立となることが示された。$R(\phi_i) f_i = 0$ であるなら $(f_i, \phi_i f_i)$ の張る空間が Q_L に含まれることはすでに証明ずみであるから，ここで存在が確認された上記 $l+1$ 個のベクトルの張る空間もまた当然 Q_L に含まれる。しかもそれら $l+1$ 個のベクトルが 1 次独立であるならば，それらが張る空間の次元もまた $l+1$ である。この帰結を，すでに示した $\dim Q_L$ もまた $l+1$ であることと考え合わせれば，結局これら二つの空間は同じ次元をもつことが分かり，これはそれらが同一の空間に帰することを意味するのである。

上記の結果が保証されれば，(11.1) が p_{t+1} について解けるための必要十分条件が

$$(p_{t-1}, p_t) \in \mathrm{span}\{(f_1, \phi_1 f_1), (f_2, \phi_2 f_2); \cdots\cdots, (f_{l+1}, \phi_{l+1} f_{l+1})\}$$

であらわされることも，容易に理解されよう。(p_{t-1}, p_t) が上記の空間に含まれるとすれば，$(p_{t-1}, p_t) \in Q_L$ となるから，(p_{t-1}, p_t, p_{t+1}) が (11.1) の解となるような p_{t+1} が存在することは自明である。また逆にそのような p_{t+1} が存在すれば，$(p_{t-1}, p_t) \in Q_L$ となるから，その (p_{t-1}, p_t) はまた $(f_1, \phi_1 f_1), (f_2, \phi_2 f_2), \cdots\cdots, (f_{l+1}, \phi_{l+1} f_{l+1})$ の張る空間にも含まれることになるのである。

実はそのような p_{t+1} が一意となることも，つぎのような推論をつうじて証明できる。いまこの点を示すために，(11.1) を解く解が p_{t+1} のほかにもあったと想定し，それを $\tilde{p}_{t+1}$ としてみよう。(p_{t-1}, p_t, p_{t+1})，$(p_{t-1}, p_t, \tilde{p}_{t+1})$ をそれぞれ (11.1) に挿入して，その差をとれば，

$$D_2 y \tilde{p}_{t+1} - D_2 y p_{t+1} = 0$$

となるから，$\tilde{p}_{t+1} - p_{t+1} = \eta \neq 0$ とおけば，

$$D_2 y \eta = 0 \qquad (12.5)$$

を得る。Q_L は線形空間であるから，$(p_t, p_{t+1}) \in Q_L$，$(p_t, \tilde{p}_{t+1}) \in Q_L$ であれば当然 $(0, \eta) \in Q_L$ でも

あり，したがって$(p_{t-1}, p_t)=(0, \eta)$に対して（11.1）式を満たすp_{t+1}が存在する。すなわち

$$D_2yx=-(D_1y+\beta D_2z)\eta \tag{12.6}$$

を満たすベクトルxがあるのでなくてはならない。ところが仮定A.12から$D_1y+\beta D_2z$は非特異であるから，左から$D_2y(D_1y+\beta D_2z)^{-1}$を掛ければ

$$D_2y(D_1y+\beta D_2z)^{-1}D_2yx=-D_2y\eta$$

となり，ゆえに（12.5）から

$$D_2y(D_1y+\beta D_2z)^{-1}D_2yx=0 \tag{12.7}$$

となる。するとふたたび$D_1y+\beta D_2z$が非特異であるところから，

$$D_2yx\neq 0 \tag{12.8}$$

となるのでなくてはならない。なぜなら，もし$D_2yx=0$であれば，$(D_1y+\beta D_2y)\eta=0$とならねばならず，左から$(D_1y+\beta D_2y)^{-1}$を掛けることにより$\eta=0$となって，$\eta\neq 0$に矛盾するからである。

そこでいま示したように$D_2yx\neq 0$になるとすれば，$D_2y(D_1y+\beta D_2z)^{-1}D_2y=0$となることがつぎのような推論から明らかとなる。まずD_2yはランク1であるから，

$$D_2y=(\bar{x}, \alpha_2\bar{x}, \cdots\cdots, \alpha_l\bar{x})$$

のような形に書くことができる。すると

$$\begin{aligned} D_2yx &=(\bar{x}, \alpha_2\bar{x}, \cdots\cdots, \alpha_l\bar{x})\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_l \end{bmatrix} \\ &=x_1\bar{x}+\alpha_2x_2\bar{x}+\cdots\cdots+\alpha_lx_l\bar{x} \\ &=\left(\sum_{i=1}^{l}\alpha_ix_i\right)\bar{x}\overset{(12.8)}{\neq}0 \end{aligned}$$

となるから，

$$\sum_{i=1}^{l}\alpha_ix_i\neq 0$$

となるのではなくてはならない。ところが（12.7）から

$$D_2y(D_1y+\beta D_2z)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{l}\alpha_ix_i\right)\bar{x}=0$$

となるから，上記の結果を使ってこれを $\sum_{i=1}^{l}\alpha_i x_i$ で割れば

$$D_2y(D_1y+\beta D_2z)^{-1}\bar{x}=0 \tag{12.9}$$

となる。そこでこの結果を用いれば

$$\begin{aligned}&D_2y(D_1y+\beta D_2z)^{-1}D_2y\\&=D_2y(D_1y+\beta D_2z)^{-1}(\bar{x},\alpha_2\bar{x},\cdots\cdots,\alpha_l\bar{x})\\&=(D_2y(D_1y+\beta D_2z)^{-1}\bar{x},\alpha_2D_2y(D_1y+\beta D_2z)^{-1}\bar{x},\cdots\cdots,\alpha_lD_2y(D_1y+\beta D_2z)^{-1}\bar{x})\\&\overset{(12.9)}{=}(0,0,\cdots\cdots,0)\end{aligned}$$

となり，$D_2y(D_1y+\beta D_2z)^{-1}D_2y=0$ となることが示された。

ところでこの結果は明らかに仮定 A.13に矛盾する。よって $\eta\neq0$ という背理法の仮定は誤っており，$\eta=0$ すなわち $\tilde{p}_{t+1}=p_{t+1}$ でなければならないことになる。

以上の長丁場の数理を踏破することで，ようやくわれわれはつぎの定理を主張できる地点に到達した。(56)

定理 7　仮定 A.12〜A.14の下で D_2y および D_1z がランク 1 をもてば，各世代が分離可能効用をもつ単一個人から成る経済は $l-1$ 個の 0 根と，β にひとしい根 ϕ_1 および仮定 A.14 で与えられる根 ϕ_2 をもち，その特性行列の行列式 $|R(\phi)|$ は $l+1$ 次の多項式となる。

証明

$0,\phi_1,\phi_2$ がそれぞれ $|R(\phi)|=0$ の根となることはすでに明らか。ゆえに 0 根の重複度数が $l-1$ となることのみを示せばよい。その推論は 2 段階から成り，まず第一のステップとして 0 根の重複度数が少なくとも $l-1$ でそれよりは少なくないことを示し，ついで第二のステップとしてはそれが多くともたかだか $l-1$ でそれを越えないことを示す。

(1)　0 根が少なくとも $l-1$ 個は存在することの証明。はじめに D_1z のゼロ空間すなわち $\{x\in R^l|D_1zx=0\}$ で定義される空間から，前に存在を確認した $l-1$ 個の 1 次独立なベクトル $f_3,\cdots\cdots,f_{l+1}$ をとり，それらに上記のゼロ空間には含まれない任意の 1 個の列ベクトル f_{l+2} をつけ足して，都合 l 個の列ベクトルから成る行列 A をつくる。すると A は 1 次独立な l 個の列から成り，非特異であるから，$|A|\neq0$。ゆえに $R(\phi)A$ を考え，$|R(\phi)A|=|R(\phi)||A|$ であることを考慮すれば，$|R(\phi)A|=0$ と $|R(\phi)|=0$ とは同値となる。そこでしばらくは $R(\phi)$ に代えて $R(\phi)A$ について議論を進めることにし，$|R(\phi)A|$ を

$$|R(\phi)A|=|D_2yA\phi^2+(D_1y+\beta D_2z)A\phi+\beta C|,$$

$$\text{ここで } C=D_1zA$$

(56)　この主張の証明については Kehoe and Levine, *op. cit.*, p.223 参照。

と書く。前記の A のつくり方から $D_1zf_3, \cdots\cdots, D_1zf_{l+1}$ はすべて0ベクトルであるから，C の最初の $l-1$ 個の列はすべて0であり，最後の第 l 列は D_1zf_{l+2} となっている。ゆえに $D_2yA\phi+(D_1y+\beta D_2z)A=[x_1, x_2, \cdots\cdots, x_l]$ と書くことにより

$$R(\phi)A=\phi[x_1, x_2, \cdots\cdots, x_l]+\beta[0, 0, \cdots\cdots, 0, D_1zf_{l+2}]$$
$$=[\phi x_1, \phi x_2, \cdots\cdots, \phi x_{l-1}, \phi x_l+\beta D_1zf_{l+2}]$$

となるから，

$$|R(\phi)A|=\phi^{l-1}|x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{l-1}, \phi x_l+\beta D_1zf_{l+2}|$$

となる。つまり

$$\tilde{C}=[x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{l-1}, \phi x_l+\beta D_1zf_{l+2}]$$

とすれば

$$|R(\phi)A|=\phi^{l-1}|\tilde{C}|$$

で，$\tilde{C}$ は $D_2yA\phi+(D_1y+\beta D_2z)A$ の最初の $l-1$ 個の列と $R(\phi)A$ の最後の列から成っているわけである。すると $|\tilde{C}|$ は ϕ の正の巾(べき)から成る多項式にほかならないから，いまそれを $g(\phi)$ であらわせば，

$$|R(\phi)A|=\phi^{l-1}g(\phi)$$

のように書け，したがってここで話を本来の $|R(\phi)|$ に戻せば，

$$|R(\phi)|=\frac{1}{|A|}\phi^{l-1}g(\phi) \tag{12.10}$$

と書けることになる。この式が成り立つことで，0根の数が少なくとも $l-1$ 個であることが示されたことになる。つまり一般に $|R(\phi)|=0$ の $l-1$ 個の根を $\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots, \psi_{l-1}$ とするとき $|R(\phi)|=c(\phi-\psi_1)(\phi-\psi_2)\cdots\cdots(\phi-\psi_{l-1})g(\phi)$ と書くことができるが，上記の式はここで $\psi_1=\psi_2=\cdots\cdots=\psi_{l-1}=0$ の場合と考えられるのである。$g(\phi)$ がさらに $\phi^r\tilde{g}(\phi)$ のように分解できれば0根の数はもっと増えるかもしれないが，すでに ϕ^{l-1} の部分がある以上，その個数が $l-1$ より減ることは決してないであろう。

なお $|R(\phi)|$ の次数でいえば，$|R(\phi)|=0$ は上記の0根のほかに二つの非ゼロの根 $\phi_1=\beta$ および ϕ_2 をもつから，

$$|R(\phi)|=\frac{1}{|A|}\phi^{l-1}(\phi-\beta)(\phi-\phi_2)\tilde{g}(\phi)$$

と書くことができ，したがって $|R(\phi)|$ は少なくとも $l+1$ 次であることになる。

(2)　0 根が多くてもたかだか $l-1$ 個を越えないことの証明。このことを示す方便として，いま時間を逆の方向に遡る「後向き」（"backward"）システムの特性行列を考え，それを $B(\gamma)=\gamma^2R(\gamma^{-1})$ と書く。定義から

$$R(\gamma^{-1})=D_2y\gamma^{-2}+(D_1y+\beta D_2z)\gamma^{-1}+\beta D_1z$$

であるから，

$$\begin{aligned}B(\gamma)&=\gamma^2(D_2y\gamma^{-2}+(D_1y+\beta D_2z)\gamma^{-1}+\beta D_1z)\\&=\beta D_1z\gamma^2+(D_1y+\beta D_2z)\gamma+D_2y\end{aligned}$$

となり，$R(\phi)$ の場合に D_2y が果たした役割が βD_1z に振り替えられていることが分かる。それゆえ βD_1z が D_2y 同様ランク 1 であることを考慮しつつ，前とまったく同様の推進を辿るならば，

$$|B(\gamma)|=c\gamma^{l-1}h(\gamma) \tag{12.11}$$

という（12.10）に準ずる式を得ることができよう。ここで $h(\gamma)$ は $g(\phi)$ と同様，γ の正の巾から成る多項式である。よって（12.11）から $|B(\gamma)|=0$ は少なくとも $l-1$ 個の 0 根をもつという前に準ずる帰結が導かれる。

この帰結を用いて，$|R(\phi)|=0$ がたかだか $l-1$ 個の 0 根をもつという所望の結論にいたるのが以下での所論の目標である。まず $|B(\gamma)|$ を計算すると

$$\begin{aligned}|B(\gamma)|&=|\gamma^2R(\gamma^{-1})|=\gamma^{2l}|R(\gamma^{-1})|\\&=\gamma^{2l}(a_{2l}\gamma^{-2l}+a_{2l-1}\gamma^{-(2l-1)}+a_{2l-2}\gamma^{-(2l-2)}+\cdots\cdots+a_1\beta^{-1}+a_0)\\&=a_{2l}+a_{2l-1}\gamma+a_{2l-2}\gamma^2+\cdots\cdots+a_1\gamma^{2l-1}+a_0\gamma^{2l}\end{aligned}$$

のようになっている。この式に（12.11）を用いると，$|B(\gamma)|$ には γ^{l-1} より巾の低い項は含まれていないから，$a_{2l}, a_{2l-1}, a_{2l-2}$ から少なくとも $a_{2l-(l-2)}$ までの係数はすべて 0 にならねばならないことが分かる。ここで $|R(\phi)|$ に転ずると，

$$|R(\phi)|=a_{2l}\phi^{2l}+a_{2l-1}\phi^{2l-1}+\cdots\cdots+a_{l+2}\phi^{l+2}+a_{l+1}\phi^{l+1}+\cdots\cdots+a_1\phi+a_0$$

で，$a_{l+2}=a_{2l-(l-2)}$ であるから，上の議論から少なくとも $a_{2l}, a_{2l-1}\cdots\cdots$ から a_{l+2} まではすべて 0 となり，これは $|R(\phi)|$ がたかだか $l+1$ 次の多項式

$$|R(\phi)|=a_{l+1}\phi^{l+1}+\cdots\cdots+a_1\phi+a_0$$

となることを意味している。そして $|R(\phi)|=0$ の根のなかには ϕ_1, ϕ_2 といういずれも 0 でない 2 根

が含まれているから，結局，根の数でいえば0根はたかだか $l-1$ 個であって，それを越えては存在しないことになる。

これで (1)，(2) の帰結を総合することにより，$|R(\phi)|$ は精確に $l+1$ 次の多項式となり，$|R(\phi)|=0$ には0根が精確に $l-1$ 個存在することが明らかとなった。証了。

大まかにいえばこの定理は，各世代が分離可能効用をもつ一個人から成る経済では，固有根システムが精確に分割されることを示唆するものである。というのは，それによれば当該経済の特性多項式はちょうど $l-1$ 個の0根をもっており，他方「後向き」システムの特性多項式もまた $l-1$ 個の0根をもっていて，後者に対応する「前向き」システムの $l-1$ 個の根の部分はその逆数で ∞ となるからである。しかし，このような含意は厳密には定理が対象とする経済をそれにきわめて近い経済に僅かずらした場合に下しうる解釈なのであって，当該の経済そのものについて主張できる命題ではない。というのは，定理でとり扱っている経済は D_2y および D_1z がランク1をもつdegenerateな，つまり縮退した経済であって，特性多項式の次数も $l+1$ 次，よって根の個数も $l+1$ 個でしかなく，安定な根 $l-1$ 個，不安定な根 $l-1$ 個を併せもつだけの余裕はもっていないからである。そこで上記の定理にもとづきつつ，しかも所望の結果に向けて議論を進めるには，さらにもう一歩のステップとして当該経済のまわりに D_2y および D_1z がともに非特異でフルランクをもちうるnon-degenerateな経済の開集合があることに目をつけ，そのなかから当該のdegenerateな経済に収束する経済の列をとり上げるという方便に頼るのでなくてはならない。つまり定理7の縮退経済の十分近傍にあるそれらの経済の列に限定して考えれば，そのいずれについてもつぎの定理が示すように，真に固有根システムが分割されるという帰結を導き出すことができるのである。

定理8　仮定A.12～A.14を満たし，しかも各世代が分離可能効用をもつ単一個人から成る経済 E^0 を極限として，そこに収束するような経済の列 E^ν，$\nu=1, 2, \cdots\cdots$ を考え，そのそれぞれの特性方程式が0根をもたず，[57] かつそれぞれの恒常状態で評価した D_2y^ν および D_1z^ν が非特異であると仮定すれば，ν を十分大きくしたとき，E^ν の根のシステムはかならず分割条件を満たす。

証明　ここで経済が極限の縮退経済に収束するとは，より精確にいえば価格の恒常均衡値ならびにそこで評価された超過需要関数の偏導関数の値が後者のそれらに収束することをいう。ゆえに D_2y^ν や D_1z^ν が D_2y，D_1z に収束すれば，それらの連続関数である多項式 $|R^\nu(\phi)|$ および $|B^\nu(\gamma)|$ もまた $|R(\phi)|$ および $|B(\gamma)|$ に収束し，したがって $|R^\nu(\phi)|=0$ の $l-1$ 個の根および $|B^\nu(\gamma)|=0$ の $l-1$ 個の根もまた0に収束する。そして $|R^\nu(\phi)|$ の根と $|B^\nu(\gamma)|=0$ の根は互いに逆数の関係にあ

(57)　11節で示したように，特性方程式 $|R(\phi)|=0$ と $|G-\phi I|=0$ は同値となる。ゆえにここで各 E^ν の特性方程式が0根をもたないという仮定は，G が非特異という前の仮定（前稿仮定A.8）に相当するものと考えられよう。というのは，もしある i について $\phi_i=0$ とすれば，$|G|=0$ となって矛盾が生じるからである。

るから，$|B^{\nu}(\gamma)|=0$ の $l-1$ 個の根が 0 に収束することはそれらに対応する $|R^{\nu}(\phi)|=0$ の $l-1$ 個の根が ∞ に向かうことを意味している。ゆえに ν を十分大きくすれば，E^{ν} の特性方程式の $l-1$ 個の根は 0 に向かうことで確実に β 円の円内に入り，他方 $l-1$ 個の根は ∞ に向かうことで確実に β 円の円外に出ることになる。よって，そこでの固有根システムはかならず分割される結果となるのである。証了。

ところで上記の帰結は，各 E^{ν} の集計的超過需要関数が E^{0} のそれらに収束すれば成立することになっている。それゆえ各世代に複数の個人がおり，彼らの効用関数が互いに相異なっていて，しかも通時的依存関係をもっているとしても，それらが生成する超過需要関数が極限経済の代表的個人のそれに収束するかぎりにおいては，同一の結果が得られると考えてよいであろう。よって各世代が多数の個人から成る経済であっても，彼らの選好が近似したものであり，またその通時的依存関係が微小なものであれば，システムは分割され，ゲイルの帰結が成立することになるのである。

13

以上，線形化されたヴァージョンについては一応システムの分割＝ゲイルの帰結という所期の結果を導きえたので，最後のステップとして本来の非線形の経済に立ち戻り，そこでも局所的にはゲイルの帰結が成り立ちうることを示しておきたい。

定理 9　定理 8 と同じ仮定を満たす経済 E^{0} について，その恒常状態の開近傍では D_2y および D_1z のランクがいずれも 1 であるとする。するとその範囲内では，ゲイルの帰結が成立する。

証明　いま超過需要関数 $y(p_t, p_{t+1})$ について，p_t を任意に $\bar{p}_t$ に固定して，第 1 座標 $y_1(\bar{p}_t, p_{t+1})$ を一定に保つような p_{t+1} の軌跡を考えるとする。そのような「等需要量曲面」上の任意の点 $\bar{p}_{t+1}$ で，そこでの接平面 T に直交するベクトルを

$$\frac{\partial y_1}{\partial p_{t+1}}=\left(\frac{\partial y_1}{\partial p_{1,\ t+1}}, \cdots\cdots, \frac{\partial y_1}{\partial p_{l,\ t+1}}\right)$$

のようにあらわせば，T は

$$T=\left\{p\in R^{l}\middle|\frac{\partial y_1}{\partial p_{t+1}}\cdot p=0\right\}$$

$$=\left\{p\in R^{l}\middle|\left(\frac{\partial y_1}{\partial p_{1,\ t+1}}, \cdots\cdots, \frac{\partial y_1}{\partial p_{l,\ t+1}}\right)\begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_l \end{bmatrix}=0\right\}$$

と定義され，$\dim T=l-1$ である。他方 D_2y のゼロ空間を S と書き，定義から

$$S=\{p\in R^l|D_2y\cdot p=0\}$$

$$=\left\{p\in R^l\left|\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial p_{1,\ t+1}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial p_{l,\ t+1}}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial y_l}{\partial p_{1,\ t+1}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial y_l}{\partial p_{l,\ t+1}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\ \vdots\\ p_l\end{bmatrix}=0\right.\right\}$$

であることを考えれば，明らかに T より S のほうが条件が多く，したがって $T\supset S$ である。ところが次元定理により $\dim S=l-\mathrm{rank}\ D_2y$ となるから，仮定から $\mathrm{rank}\ D_2y=1$ であれば，S の次元もまた $l-1$ とならざるをえない。よって目下の仮定の下では $T=S$ となるほかはない。

つぎに同じ $p_{t+1}=\bar{p}_{t+1}$ の点で，同様に第 2 座標関数が $y_2(\bar{p}_t,\ p_{t+1})=y_2(\bar{p}_t,\ \bar{p}_{t+1})=$定数となるような p_{t+1} の軌跡を考え，ここでも $\bar{p}_{t+1}$ での接平面を T' とすれば，上記のところとまったく同じ理由で $T'=S$ となるので，$T=T'$ となる。つまり同じ点 $\bar{p}_{t+1}$ では y_1 の「等需要量曲面」と y_2 のそれとは傾斜をひとしくするのである。

そこで同じことを，p_{t+1} を動かしてその都度考えていけば，どの p_{t+1} においても y_1, y_2 の「等需要量曲面」は同じ傾斜をもつことになり，結局それらの「等需要量曲面」は全域にわたって一致しなければならないことが分かる。

以上を要するに，最初に $\bar{p}_t$ を与え，その下である y_1 の値を決めれば，その「等需要量曲面」と同じ「等需要量曲面」に応ずる y_2 の値が自動的に決まるのである。そして同様の議論は，y_2 以下の $y_i, i=3, \cdots\cdots, l$ についてもそれぞれあてはまるから，つまるところ所与の $\bar{p}_t$ の下で y_1 だけを決めれば，それに応じて

$$\begin{cases}y_2=\bar{y}_2(\bar{p}_t,\ y_1)\\ \quad\vdots\\ y_l=\bar{y}_l(\bar{p}_t,\ y_1)\end{cases}$$

のごとくに y_2 から y_l までのすべてが決まることになるのである。

この議論は当初の p_t をどこに与えても成り立つはずであるから，一般に上記の数理をつうじて

$$\begin{aligned}y(p_t,\ p_{t+1})&=\begin{bmatrix}y_1(p_t,\ p_{t+1})\\ y_2(p_t,\ p_{t+1})\\ \vdots\\ y_l(p_t,\ p_{t+1})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1(p_t,\ p_{t+1})\\ \bar{y}_2(p_t,\ y_1(p_t,\ p_{t+1}))\\ \vdots\\ \bar{y}_l(p_t,\ y_1(p_t,\ p_{t+1}))\end{bmatrix}\\ &=\bar{y}(p_t,\ y_1(p_t,\ p_{t+1}))\end{aligned}\qquad(13.1)$$

と書けることになり，$y(p_t, p_{t+1})$ は y_1 をつうじてのみ p_{t+1} に依存することが知られる。

すると市場均衡の条件 $z(p_{t-1}, p_t)+y(p_t, p_{t+1})=0$ は

$$z(p_{t-1}, p_t)+\bar{y}(p_t, y_1)=0 \tag{13.2}$$

のように書き換えられ，ここでひとまず y_1 を固定して考えれば，(13.2) を満たす (p_{t-1}, p_t) の集合は仮定 A.12から l 次元多様体となることが分かる。事実いま (13.2) の左辺を当該恒常状態の近傍で定義される関数 $f: R^{2l}_{++}\to R^l$ とみなせば，$f(p_{t-1}, p_t)=0$ を満たす (p_{t-1}, p_t) の集合についてはつぎの逆像定理が適用できる。

逆像定理　Df のランクが l であれば，逆像 $f^{-1}(\{0\})$ は $2l-l$ 次元すなわち l 次元の多様体となる。

したがって，仮定 A.12から rank $Df=l$ となることさえ確かめられれば，上記の主張が成り立つことになるのである。ところが $Df=(D_{p_{t-1}}f \quad D_{p_t}f)$ の後半部分に注目すれば，恒常状態 $(p, \beta p)$ では

$$D_{p_t}f=D_2z+\beta^{-1}D_1\bar{y}=D_2z+\beta^{-1}D_1y-\beta^{-1}Y$$

ここで

$$Y=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial p_{1,t}} & \dfrac{\partial y_1}{\partial p_{2,t}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial p_{l,t}} \\ \dfrac{\partial \bar{y}_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial p_{1,t}} & \dfrac{\partial \bar{y}_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial p_{2,t}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial \bar{y}_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial p_{l,t}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial p_{1,t}} & \dfrac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial p_{2,t}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial p_{l,t}} \end{bmatrix}$$

となり[58]，右辺の $D_2z+\beta^{-1}D_1y$ は仮定 A.12からランク l，また $-\beta^{-1}Y$ は同じ列にスカラを掛けた形になっているからランク 1 である。よって generic には，一般にそれらの和もまたランク l を維持すると考えることができ[59]，そしてこの性質はまた恒常状態の近傍についても失われることはない。ゆえに当該の近傍では rank $D_{p_t}f=l$，したがって rank $Df=l$ と考えてよいのである。

---

(58)　(13.1) から $\dfrac{\partial y_j}{\partial p_{i,t}}=\dfrac{\partial \bar{y}_j}{\partial p_{i,t}}+\dfrac{\partial \bar{y}_j}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial p_{i,t}}$ となり，$j=1$ については $\dfrac{\partial \bar{y}_1}{\partial p_{i,t}}=0, \dfrac{\partial \bar{y}_1}{\partial y_1}=1$ となる。$D_1y=\left[\dfrac{\partial y_j}{\partial p_{i,t}}\right], D_1\bar{y}=\left[\dfrac{\partial \bar{y}_j}{\partial p_{i,t}}\right]$ であるから，$D_1y=D_1\bar{y}+Y$ となる。

(59)　この主張については，またキーホー＝レヴァインが仮定 A.12（彼らの仮定（R.1））の妥当性に関連して，負定符号の行列とランク 1 の行列の和が一般には非特異になると述べていることにも注意。Kehoe and Levine, *op. cit.*, p.221 参照。

ここでこれまでパラメターとして固定していた y_1 をも動かすことにする。すると，仮定A.13から D_2y が非ゼロである以上，上記の多様体もまた y_1 の動きを受けて動くことになり[60]，したがってその次元ももう1個増えて $l+1$ となる。前節の Q_L に準じて，以下ではその $l+1$ 次元多様体を Q と書くことにする。すなわち

$$Q=\{(p_{t-1}, p_t)\in R^{2l} | \exists\, y_1, z(p_{t-1}, p_t)+\bar{y}(p_t, y_1)=0\}$$

であり，これは適当に y_1 を選べば均衡条件を満たす p_{t+1} が求められるような (p_{t-1}, p_t) の集合である。前節では線形化されたシステムについて Q_L から Q_L への写像を考え，それが一意写像になることを示したが，ここでは本来の非線形システムに議論を拡張し，この Q から Q への写像も恒常状態の近傍では同様に一意写像になることを示したいわけである。

そこでつぎのステップとして，$q_t=(p_t, p_{t+1})=(q_t^1, q_t^2)$ とおき，均衡条件を1階の定差方程式 $z(q_{t-1})+y(q_{t-1}^2, q_t^2)=0$, $q_t^1=q_{t-1}^2$, $t=2, 3, \cdots\cdots$ あるいは同じことであるが $z(q_t)+y(q_t^2, q_{t+1}^2)=0$, $q_{t+1}^1=q_t^2$, $t=1, 2, \cdots\cdots$ の形に書き改めることにする。これはまた $z(q_t)+\bar{y}(q_t^2, y_1)=0$, $q_{t+1}^1=q_t^2$ とも書かれるが，いまその第1座標のみをとりあげてみると，$\partial\bar{y}_1/\partial y_1\neq 0$ であれば，所与の $q_t\in Q$ に対して陰関数の定理から解 $y_1=\hat{y}(q_t)$ が求められることになる[61]。ところが，そのように $z_1(q_t)+\bar{y}_1(q_t^2, y_1)=0$ を満たす y が得られれば，前に見たように第2座標以下についても同様の条件がすべて成立するはずであるから，結局均衡条件としてはたんに

$$\begin{aligned} y_1(q_t^2, q_{t+1}^2)&=\hat{y}_1(q_t) \\ q_{t+1}^1&=q_t^2 \end{aligned} \tag{13.3}$$

とだけ書けば足りることになろう。するとやはり $q_t\in Q$ に対してこの (13.3) を解いて求められる q_{t+1} の集合は，$D_2y_1\neq 0$ であることから $l-1$ 次元多様体となるのである。

この点を明らかにするために，前と同様，関数 $f: R_{++}^{2l}\to R^{l+1}$ を

$$\begin{aligned} f_1(q_{t+1})&=y_1(q_t^2, q_{t+1}^2)-\hat{y}_1(q_t) \\ f_2(q_{t+1})&=q_{1,t+1}^1-q_{1,t}^2 \\ &\vdots \\ f_l(q_{t+1})&=q_{l,t+1}^1-q_{l,t}^2 \end{aligned} \tag{13.4}$$

(60) $D_2y\neq 0$ であれば，その要素 $\dfrac{\partial\bar{y}_i}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial p_{j,t+1}}$ はいずれも0となることはできず，したがって y_1 の動きをつうじて $\bar{y}(p_t, p_{t+1})$ はかならず動くことになる。よって逆像 $f^{-1}(\{0\})$ もまたかならず動くのである。

(61) 前述のように $\partial\bar{y}_1/\partial y_1=1$ であるから当然 $\neq 0$ で，陰関数の定理を用いることができる。

のように定義すれば，ふたたび逆像定理が使えて，Df のランクが $l+1$ なら $f^{-1}(\{0\})$ は $2l-(l+1)=l-1$ 次元の多様体となることが主張できる。ゆえに所望の帰結を得るためには，Df のランクが $l+1$ になることさえ確かめてみればよい。そこで（13.4）から Df を求めてみると

$$Df=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{l} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{l} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c} 0\ \cdots\cdots\ 0 & D_2y_1 \\ \hdashline \\ I & 0 \\ \\ \end{array}\right] \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\ \\ I\\ \\ \end{array}}\right\}l+1$$

となり，明らかに $l+1$ 個の各行は1次独立であるから，所望どおり rank $Df=l+1$ の条件が満たされているのである。

これで解 q_{t+1} の集合は $l-1$ 次元多様体となることが分かったので，それを各 q_t について $\bar{Q}(q_t)$ と書くことにする。つまり所与の q_t に対して (q_t, q_{t+1}) が均衡条件を満たすためには $q_{t+1}\in\bar{Q}(q_t)$ とならねばならないことになったわけであるが，さらにこの q_{t+1} に対して均衡条件を満たすつぎの q_{t+2} が求められるためには $q_{t+1}\in Q$ となるのでなくてはならず，よって $q_{t+1}\in Q\cap\bar{Q}(q_t)$ となるのでなくてはならない。以下ではそのような条件を満たす q_{t+1} が一意に定まること，すなわち $Q\cap\bar{Q}(q_t)$ が単一元集合となることを示したい。

そのためにはまず恒常状態 $q_t=q=(p, \beta p)$ における Q の接空間 Q_L と同じく q における $\bar{Q}(q_t)$ の接空間 $\tilde{T}$ とが1点においてのみ交わり，そのことにもとづいてそれらが横断的に交わることを示すのが事の順序となる。ところが $\bar{Q}(q_t)=\{q_{t+1}\in R^{2l}|y_1(q_t^2, q_{t+1}^2)=\hat{y}_1(q_t)$ かつ $q_{t+1}^1=q_t^2\}$ であることから

$$\tilde{T}=\left\{q_{t+1}\in R^{2l}\left|\left[\begin{array}{c:c} 0 & D_2y_1 \\ \hdashline I & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} q_{t+1}^1 \\ q_{t+1}^2 \end{bmatrix}=0\right.\right\}$$

となり，よって前出の D_2y のゼロ空間 $S=\{q_{t+1}^2\in R^l|D_2yq_{t+1}^2=0\}$ を R^{2l} に埋め込んで

$$\tilde{S}=\{(0, q_{t+1}^2)\in R^{2l}|D_2yq_{t+1}^2=0\}$$

とすれば，前とまったく同じ論法で $\tilde{T}=\tilde{S}$ となることがいえる。ゆえに以下での推論の進め方としては，まず（1）$Q_L\cap\tilde{S}=\{0\}$ となることをいい，その結果（2）Q_L と $\tilde{S}$ とが横断的に交わること，すなわち $Q_L+\tilde{S}=R^{2l}$ となること[(62)]をいえばよいのである。

（1）　$\tilde{q}\in Q_L\cap\tilde{S}$ としたとき，$\tilde{q}=0$ となることを示したい。ところが $\tilde{q}\in\tilde{S}$ であることから

---

(62)　V.Guillemin and A.Pollack, *Differential Topology*, 1974, p.29 とりわけ p.32 の Exercises, 1(b), 三村護訳『微分位相幾何学』, 1998, p.37 および p.38 参照。

$\tilde{q}=(0, \tilde{q}^2)$ であるから，$\tilde{q}^2=0$ になることを示せばよい。

事実 $\tilde{q}\in Q_L$ でもあることから，第12節で証明したように $(0, \tilde{q}^2, x)$ が均衡条件（11.1）を満たすような x があり，よって

$$D_2yx+(D_1y+\beta D_2z)\tilde{q}^2=0$$

が成立する。ゆえに仮定 A.12を用いて

$$\tilde{q}^2=-(D_1y+\beta D_2z)^{-1}D_2yx,$$

それに左から D_2y を掛けて

$$D_2y\tilde{q}^2=-D_2y(D_1y+\beta D_2z)^{-1}D_2yx$$

となるが，ふたたび $\tilde{q}\in\tilde{S}$ であることを考慮すれば $D_2y\tilde{q}^2=0$ であるから，

$$D_2y(D_1y+\beta D_2z)^{-1}D_2yx=0$$

を得る。これは第12節の（12.7）式と同じ式であるから，あとはそこで $\eta=0$ を証明したのとまったく同じ数理が適用され，$\tilde{q}^2=0$，したがって $\tilde{q}=0$ という帰結が示されたことになる。

(2)　そこでつぎに上記（1）の結果を前提として，$Q_L+\tilde{S}=R^{2l}$ となることを証明する。所望の帰結を示すには，Q_L の基底として任意に $\{v_1, v_2, \cdots\cdots, v_{l+1}\}$ を選び，また $\tilde{S}$ の基底として任意に $\{w_1, w_2, \cdots\cdots, w_{l-1}\}$ を選んだとき，$\{v_1, \cdots\cdots, v_{l+1}, w_1, \cdots\cdots, w_{l-1}\}$ が1次独立になること，すなわち

$$\sum_{i=1}^{l+1}a_iv_i+\sum_{i=1}^{l-1}b_iw_i=0$$

であれば $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_{l+1}=0,\ b_1=b_2=\cdots\cdots=b_{l-1}=0$ となることをいえばよいわけである。

事実いま $\sum_{i=1}^{l+1}a_iv_i=0, \neq 0$ の二つの場合を分けて考え，まず $\sum_{i=1}^{l+1}a_iv_i=0$ の場合をとり上げてみる。すると $\{v_1, v_2, \cdots\cdots, v_{l+1}\}$ は Q_L の基底であるから，$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_{l+1}=0$ とならねばならないが，この場合は同様に $\sum_{i=1}^{l-1}b_iw_i=0$ となるから，やはり $\{w_1, w_2, \cdots\cdots, w_{l-1}\}$ が $\tilde{S}$ の基底であるところから，$b_1=b_2=\cdots\cdots=b_{l-1}=0$ ともならねばならない。つぎにもし $\sum_{i=1}^{l+1}a_iv_i\neq 0$ であるとすれば，$-\sum_{i=1}^{l-1}b_iw_i\neq 0$ でもあり，しかも $\sum_{i=1}^{l+1}a_iv_i\in Q_L, \sum_{i=1}^{l-1}b_iw_i\in\tilde{S}$ であるから，これはさきに証明した $Q_L\cap\tilde{S}=\{0\}$ という事実に矛盾する。よって $Q_L\cap\tilde{S}=\{0\}$ の前提下では，$\sum_{i=1}^{l+1}a_iv_i\neq 0$ の場合はありえない。

以上の議論をつうじて Q_L と $\tilde{S}$，したがって Q_L とやはり q での $\overline{Q}(q_t)$ の接空間とは横断的に交わることがいえたので，q そのものにおいては Q と $\overline{Q}(q_t)$ もまた横断的に交わることになり，さらに q の近傍においても同様の帰結が成り立つことになる。

前に示したように Q の次元は $l+1$，$\bar{Q}(q_t)$ の次元は $l-1$ であるから，$Q\cap\bar{Q}(q_t)$ の次元は以上の結果から $(l+1)+(l-1)-2l=0$ となり，$Q\cap\bar{Q}(q_t)$ が単一元集合となることはもはやいうまでもないであろう。またゲイルの帰結が成り立つという主張については，目下の場合も定理 8 の議論を準用すれば足りるであろう。

14

前節までのところ，代表的個人の効用関数が分離可能である場合には，多数財モデルであってもなおゲイルの帰結が妥当するという主張を跡づけてきた。しかし，さまざまな年齢差をもつ多数個人が併存する現実を考えれば，このような想定が事実上尤もらしさを欠く憾みを否定することはできない。そこで同じ帰結を生むような，よりよい代案がないかどうかを探査してみることにも少なからぬ意義が含まれることになるであろう。キーホー＝レヴァインは，同じ論文の最後の節で，所得効果があまり大きくない事態に着目して，その場合にも同様にゲイルの帰結が成り立ちうる可能性があることを示してみせた。[63] 稿を閉じるにあたって，最後に彼らのこの貢献についても簡単に触れておくことにしたい。

いま所得効果がまったくないと想定すれば，超過需要関数の偏導関数行列は対称的となるから，

$$\begin{aligned} &D_1y+\beta D_2z=(D_1y+\beta D_2z)' \\ &D_1z=D_2y' \end{aligned} \tag{14.1}$$

の 2 条件が満たされる。前のように（11.2）の特性行列を $R(\phi)$，定理 7 の証明で用いた「後向き」システムの特性行列を $B(\gamma)=\gamma^2R(\gamma^{-1})$ と書けば，（14.1）の下では

$$\begin{aligned} R(\phi)'&=D_2y'\phi^2+(D_1y+\beta D_2z)'\phi+\beta D_1z' \\ &=D_1z\phi^2+(D_1y+\beta D_2z)\phi+\beta D_2y \end{aligned}$$

となり，一方

$$\begin{aligned} B(\beta^{-1}\phi)&=(\beta^{-1}\phi)^2R(\beta\phi^{-1}) \\ &=(\beta^{-1}\phi)^2[D_2y(\beta\phi^{-1})^2+(D_1y+\beta D_2z)\beta\phi^{-1}+\beta D_1z] \\ &=D_2y+(D_1y+\beta D_2z)\beta^{-1}\phi+\beta^{-1}D_1z\phi^2 \end{aligned}$$

となるから，

(63) Kehoe and Levine, *op. cit.*, pp.225-226.

$$R(\phi)' = \beta B(\beta^{-1}\phi) \tag{14.2}$$

という関係が成り立つ[64]。よって $|R(\phi)|=|R(\phi)'|=0$ なら $|B(\beta^{-1}\phi)|=0$ でもあり，ここで $|R(\phi)|=0$ と $|R(\phi)'|=0$ とは同じ根をもち，また $|B(\beta^{-1}\phi)|=0$ の根は $|R(\phi)|=0$ の根の逆数となるから，ϕ が $|R(\phi)|=0$ の根であれば，$\beta\phi^{-1}$ もまた $|R(\phi)|=0$ の根になる。そして

$$|\phi|<\sqrt{\beta} \text{ と } |\beta\phi^{-1}|>\sqrt{\beta} \text{ は同値}$$
$$|\phi|>\sqrt{\beta} \text{ と } |\beta\phi^{-1}|<\sqrt{\beta} \text{ は同値}$$

であるから，ϕ が $|\phi|<\sqrt{\beta}$ を満たす根であれば $\beta\phi^{-1}$ は $|\beta\phi^{-1}|>\sqrt{\beta}$ を満たす根になっており，また ϕ が $|\phi|>\sqrt{\beta}$ を満たす根であれば $\beta\phi^{-1}$ は $|\beta\phi^{-1}|<\sqrt{\beta}$ を満たす根になっている。ゆえに 1 にひとしい根と大きさの不明な 1 個の根を除けば，半径が $\sqrt{\beta}$ の円内に入る根と円外に出る根はそれぞれ $l-1$ 個ずつあることになる。半径 β の円を境界線とする「分割」（“splitting”）という事態に準じて，そのように半径 $\sqrt{\beta}$ の円を境界線とする事態をキーホー＝レヴァインは「擬分割」（“pseudo-splitting”）の事態と呼んでいる[65]。

すると名目的恒常状態の場合は $\beta=1$ であるから，擬分割は分割と同じ事態に帰一し，前とまったく同様にゲイルの帰結が成立することになる。一方実質的恒常状態の場合も β が 1 に近い値をとるならば，やはり一般に同様な帰結が得られると考えてよいであろう。なお β がかならずしも 1 に近くないとしても $\beta<1$ でありさえすれば，$\beta<\sqrt{\beta}$ で，上記の結論から $|\phi|>\sqrt{\beta}$ となる根はかならず $l-1$ 個はあるわけであるから，$|\phi|>\beta$ となる根は（$|\phi|$ が β と $\sqrt{\beta}$ のあいだに入るものを考慮に入れたとしても）少なくとも $l-1$ 個は確実にあることが主張できる。よってこの場合はかならず $\bar{l}_s-l+1\leqq 0$ となり，$\bar{l}_s-l+1>0$ とはなりえないので，やはり不確定性が生じることはない。が，他方 $\beta>1$ の場合には $\sqrt{\beta}<\beta$ で，$|\phi|>\sqrt{\beta}$ となる根がやはり $l-1$ 個はあるが，それらがもしすべて $\sqrt{\beta}$ と β のあいだに含まれてしまうとすれば，$|\phi|>\beta$ となる根すなわち不安定な根は一つもありえないことになる。この場合には $\bar{l}_s$ がその上限値 $2l-2$ をとることになるので，$\bar{l}_s-l+1>0$ となり，不確定性が生じる可能性を除くことができない。これらに引き換え，前記の名目的恒常状態の場合は，もし大きさ不明の根が不安定根に含まれれば $l_s-(l-1)=0$ となって，不確定性は生じないが，もしそれが安定根に含まれれば $l_s-(l-1)=1$ となり，不確定性が生じるものの，その次元は 1 にとどまるのである。

上記のところが，ゲイルの帰結に関連して，所得効果ゼロの場合に得られる帰結の概要である。

---

(64) キーホー＝レヴァインの論文では右辺の β（彼らの記号では γ）が脱落している。*op. cit.*, p.225。しかし $\beta\neq 0$ であるから，$|\beta B(\beta^{-1}\phi)|=0$ であれば $|B(\beta^{-1}\phi)|=0$ となり，以下の推論にはまったく支障はない。

(65) *op. cit.*, p. 225。

そして固有値が偏導関数の値の連続関数であることを考えれば，この帰結が所得効果皆無の場合をそれが微小の場合に拡大してもなおあてはまることは，もはや贅言を要しないであろう。

15

本誌に4回にわたって分載された諸稿では，均衡と時間という大見出しの下に，通時的均衡モデルを代表する二つの型のモデルすなわち万世一系タイプのモデルと重複世代モデルのそれぞれについて，それらがもつ均衡の諸相を解明すべく努めてきた。時間を異にする財を別種の財とみなすかぎり，これらのモデルはいずれも無限種類の財を含み，かつ重複世代モデルの場合はさらに加えて無限数の登場主体をも含むから，それらの均衡のとり扱いには通常の均衡分析とはまた違った工夫をこらすのでなくてはならず，何人かの気鋭の理論家によって開発されたそうした手法上の新機軸を開陳するのがそこでの目的の一つであった。また上記の両モデルでは均衡そのもののもつ特性がいちじるしく異なっており，その相違点が奈辺にあるかを明らかにすることも，考察のもう一つの重要な目論見とされた。その結果によれば，前者型のモデルの競争均衡は，標準的な正則性の仮定の下では一意に確定し，かつかならずパレート最適性を満たすが，他方後者すなわち重複世代モデルにおいては，標準的な仮定がすべて満たされている場合でさえ，相対価格および絶対価格のいずれの均衡値にも不確定性が生じ，またすべての競争均衡がパレート最適になるとはかぎらない。ただし最終稿である本稿で示したように，代表的個人の効用関数が分離可能性を満たしているときや所得効果が無視されうるときには，相対価格には不確定性が生ぜず，また絶対価格に不確定性が生じる場合でもその次元はたかだか1次元にとどまるといういわゆるゲイルの帰結が成立しうる。おおよそ以上のところがこの研究をつうじてもたらされた主要な成果にほかならない。なお重複世代モデルについてはまだ解明を要する問題が残されていないわけではないが，すでに回数を重ねてかなりの分量に達したこの連載企画はこれでひとまず打ち切りとさせていただきたい。

（名誉教授）