Title	Aumann-Drèze値とMyerson値の基本的関係
Sub Title	A basic relationship between Aumann-Drèze value and Myerson value
Author	内海, 幸久(Utsumi, Yukihisa)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2002
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.95, No.3 (2002. 10) ,p.559(103)- 573(117)
JaLC DOI	10.14991/001.20021001-0103
Abstract	本稿では、提携内のすべての主体が意思疎通可能となる状況の時にAumann-Drèze 値とMyer-son 値が同値になるというSlikker (2001) が与えた命題を初等的な手法のみを用いて示すとともに、Aumann-Dreze 値とMyerson 値が等しくなる時のネットワークは、やはり提携内のすべての主体が意思疎通可能となる状態であることを論じる。これらの命題により、Aumann-Dreze 値がMyerson 値の特殊ケースである事、提携構造という概念が、その要素の全ての主体が意思疎通可能であるという状況を捉えようとしたものであることが理解される。 This study demonstrates the proposition given by Slikker (2001) that when all the entities within an alliance can communicate with each other, the Aumann–Dreze and Myerson values equate by using only an elementary method. In addition, it discusses that in the network where the Aumann–Dreze and Myerson values equate, all the entities within an alliance can indeed communicate with each other. Through these propositions, we can understand that the Aumann–Dreze value is a special case of the Myerson value and that the concept of alliance structure attempts to capture a situation wherein all the entities of the factor are capable of communicating with each other.
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20021001-0103

Aumann-Drèze 値と Myerson 値の基本的関係

A Basic Relationship between Aumann-Drèze Value and Myerson Value

内海　幸久(Yukihisa Utsumi)

本稿では、提携内のすべての主体が意思疎通可能となる状況の時に Aumann- Drèze 値と Myer-son 値が同値になるという Slikker（2001）が与えた命題を初等的な手法のみを用いて示すとともに、Aumann-Dreze 値と Myerson 値が等しくなる時のネットワークは、やはり提携内のすべての主体が意思疎通可能となる状態であることを論じる。これらの命題により、Aumann-Dreze 値が Myerson 値の特殊ケースである事、提携構造という概念が、その要素の全ての主体が意思疎通可能であるという状況を捉えようとしたものであることが理解される。

Abstract

This study demonstrates the proposition given by Slikker (2001) that when all the entities within an alliance can communicate with each other, the Aumann–Dreze and Myerson values equate by using only an elementary method. In addition, it discusses that in the network where the Aumann–Dreze and Myerson values equate, all the entities within an alliance can indeed communicate with each other. Through these propositions, we can understand that the Aumann–Dreze value is a special case of the Myerson value and that the concept of alliance structure attempts to capture a situation wherein all the entities of the factor are capable of communicating with each other.

Aumann-Drèze 値と Myerson 値の基本的関係

内　海　幸　久*

（初稿受付2002年7月30日，
査読を経て掲載決定2002年9月3日）

要　　旨

本稿では，提携内のすべての主体が意思疎通可能となる状況の時に Aumann-Drèze 値と Myerson 値が同値になるという Slikker（2001）が与えた命題を初等的な手法のみを用いて示すとともに，Aumann-Drèze 値と Myerson 値が等しくなる時のネットワークは，やはり提携内のすべての主体が意思疎通可能となる状態である事を論じる。これらの命題により，Aumann-Drèze 値が Myerson 値の特殊ケースである事，提携構造という概念が，その要素の全ての主体が意思疎通可能であるという状況を捉えようとしたものである事が理解される。

キーワード

Aumann-Drèze 値，Myerson 値，ネットワーク

1　序

ネットワークという言葉から連想される事柄には何があるだろう。コンピュータネットワーク等といった物理的な通信網や，市民ネットワークなどのグループを連想されるかもしれない。また，それ以外の可能性も十分にある。人によって異なるとは思われるが，どれにも共通するのが，ネットワークに属する人々は，何らかの手段で相互に情報を共有しているという点にあると思われる。本稿では，情報を共有することが可能となる状況を記述する概念としてネットワークという用語を用いる。

ネットワークの問題には，様々な応用例が従来から考察されている。工学的な応用例としては，セールスマン巡回問題や，コンピュータネットワークにおける情報混雑の緩和などがある。企業の内部組織構造がどのような組織構造（例えば，ピラミッド型や水平型）に決まるのかを中心に扱った

* 本稿の作成に当たり，詳細なコメントを頂いた中山幹夫教授，平瀬和基氏に感謝いたします。また，匿名のレフェリーよりいくつかの有益なコメントを頂いたことに感謝いたします。

Bolton and Dewatripont (1994) 等もある。航空産業に於ける空路の設計では，ハブ＝スポーク型ネットワークが利用され，どのような料金体系が効率的なのかが議論される。ネットワークのリンクが成立する事で二人の間のコミュニケーションが取れると解し，どのようなネットワークの形が発生するのか Jackson and Wolinsky (1996)，Dutta, van den Nouweland, and Tijs (1998)，また，どの様な変化をたどっていくのか Watts (2001) 等の分析も行われている。更に，二人間の契約関係をも含めると具体例は枚挙に暇がない。このように，ネットワーク研究の応用例は，経済学のみならず，情報工学，社会工学，オペレーションズリサーチといった工学的な応用から，経営学，政治学，ゲーム理論など幅広い。

ネットワーク研究の基礎的な理論は大きく２つの流れに大別される。第一は，既存のネットワークを利用するモデルである。ネットワークからどのような価値が既に得られているのかという情報を基に，その価値を如何にしてネットワーク利用者に配分するべきかが中心的課題となっている (Aumann and Drèze (1974)，Owen (1977)，Myerson (1977)，Hart and Kurz (1983) 参照)。第二は，ネットワークの形成に関わるモデルである。人々がどの様にしてネットワークを形成していくのか，また，どの様な形状のネットワークが発生していくのか，社会にとって効率的なネットワークが形成されるか否か等が研究されている (Dutta. et al. (1998)，Martinez. et al. (1998) 参照)。本稿では既存のネットワークを利用して，ネットワークを構成している人々にどのような価値を与えるのが望ましいのかといった分析に広く用いられるいくつかの概念の紹介と比較を行うことを主たる目的とする。具体的には，Aumann-Drèze 値と Myerson 値の比較である。前者は複数のグループを形成している人々に，属している集団の力関係に応じて価値を公平に分けるという値で，その基本的な性質は，Aumann and Drèze (1974) によって与えられた。後者は主体間にコミュニケーションが起こるか否かという状況下で定まり，誰とどのような形でコミュニケーションしているのかに応じて価値を公平に分け与えようという考えの値である。基本的な性質は，Myerson (1977, 80) によって与えられた。特に後者の範疇にある概念は，企業内部の組織構造の決定や配分方法といった組織形成の基本的なモデルに利用されることもある (Jackson and Wolinsky (1996) を参照)。

本稿では，提携内のすべての主体が意思疎通可能となる状況の時に Aumann-Drèze 値と Myerson 値が等しくなるという Slikker (2001) が与えた命題を初等的な手法のみを用いて示すとともに，Aumann-Drèze 値と Myerson 値が等しくなる時のネットワークは，やはり提携内のすべての主体が意思疎通可能となる状態である事を論じる。これらの命題によって，Aumann-Drèze 値が Myerson 値の特殊ケースとして表現される事が分かるだけでなく，提携構造という概念は，その要素の全ての主体が意思疎通可能であるという状況を捉えようとしたものである事が理解される。更に，２つの命題を用いて，特殊ケースではあるが，これらの値と交渉問題で利用される Nash 交渉解との関係についても本稿では考察を加える。

2　Aumann-Drèze 値と Myerson 値の関係

2.1　数値例

最初に形式的な定義を述べる前に 2 つの値がどのような場面で有効に用いられるのかを平易な数値例を通して紹介する。

今，企業 A と企業 B という 2 つの企業（例えば，町にある小さな商店など）が，生産・販売活動を行っているという状況を想定しよう。企業 A は，$\{1,2,3\}$ という人々によって，企業 B は，$\{4,5\}$ によって生産・販売活動が営まれているとする。簡単化のため，下記で述べる利潤は給料以外の費用やその他の支払金（例えば，配当金などのリターン）を差し引いた残りと考え，

$$v=2u_{\{1,2\}}+2u_{\{1,3\}}+2u_{\{2,3\}}+2u_{\{4,5\}}-2u_{\{1,2,3\}}$$

とまとめて表現されるとする。ここで，u_S は，$S\subseteq T$ ならば，$u_S(T)=1$ を与え，それ以外では，$u_S(T)=0$ を与える関数である。したがって，この v の下では，全員の協力によって企業 A が 4 の利潤を，また，企業 B が 2 の利潤を獲得している。両企業とも 2 人以上で操業が可能で，その時は，各々 2 の利潤を得る。更に，A は 3 人で活動を行うと 4 の利潤を得る。このような設定で，企業 A と B が 4 と 2 の利潤から給料をいかに与えるかという問題を考察していく。

まず，各企業では従業員同士が協力して生産活動に従事し，両企業が市場を通して競争しているという状況である事を思い出そう。この時，企業 A や B で生産活動を営んでいる人々にどのような給料を与えるべきなのだろうか。利潤は市場での両企業の力関係や販売努力といったものに応じて定まっていると考えられる。そのため，各企業に属する人々に，この関係を反映させる形で給料を決めるという方式が考えられうる。このような考え方を一般化したのが Aumann-Drèze 値である。この場合では，A の従業員にそれぞれ $(4/3,4/3,4/3)$ をまた，B の従業員にそれぞれ $(1,1)$ を与える。

次に，設定を一歩深化させて，企業 A は 1 を中心とした組織を導入したとしよう。つまり，図 1 の様な状況である。A は 1 を中心に組織が構成されている点が新しい。このような組織構造は，互いにつながっている人々の集合を並べた $\{\{1,2\},\{1,3\},\{4,5\}\}$ によって表現される。この組織構造をしている時，企業 A，B の従業員にどのような給料を与えるのが望ましいのか，再び論じていく。企業 A では，明確な組織が形成されているため，従業員の地位や役割といった概念が存在する。この組織の状態を反映させた形で各企業の従業員に給料を定めるという方式が妥当な方法として考えられうる。この考えを押し進めたのが Myerson 値である。この場合では，A の人々にそれぞれ $(2,1,1)$ を，また，B の人々に $(1,1)$ を与える。注目するべきは，2 と 3 をまとめる役割である 1 は，2 や 3 よりも多くの給料を得ているという点である。

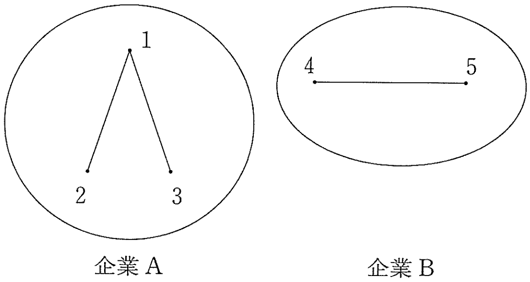

図1：企業AとBの組織構造

このような例を念頭におきながら，以下にて形式的な定義を与える事にする。

2.2　Aumann-Drèze 値

複数の意思決定主体がグループを形成している状況を想定しよう。このような状況は，どのようにして定式化できるであろうか。その答えには様々なモデルが用意されている（例えば Myerson (1980) を参照)。本稿では，提携構造という概念を用いて，既存の共存しているグループを表現するというモデルを扱う。最初に提携構造を伴う TU ゲームを定義する。$N=\{1,\cdots,n\}$ をプレーヤーの集合とし，$\mathcal{N}=2^N\backslash\{\emptyset\}$ によって，全ての提携を表す。提携構造 $\boldsymbol{B}=\{B_1,\cdots,B_m\}$ とは，N の分割で，どのような提携が共存するのかを表現している。やや解釈を広げ，提携構造は，要素の内部では協調や意思疎通がなされている事を，一方，グループ間では意思疎通がおこなわれていない事を表している。$v:\mathcal{N}\to\mathbb{R}$ をゲームの特性関数とし，$v(\emptyset)=0$ とする。これら 3 つのデータによって記述される $(N,v,\boldsymbol{B})$ を提携構造を伴う TU ゲームと呼び，(N,v) からなる組を，または，N が固定されている時は v を TU ゲームと呼ぶ事とする。

提携構造を伴う TU ゲームから n ベクトルを決める関数 $\gamma:(N,v,\boldsymbol{B})\mapsto(\gamma_i(N,v,\boldsymbol{B}))_{i\in N}\in\mathbb{R}^N$ を配分規則と呼ぶ。

次に，提携構造 $\boldsymbol{B}$ に整合的な順列の集合を $\prod_B:=\{\pi:N\to N|\pi$ は順列で，すべての $B\in\boldsymbol{B}$ について $\pi(B)=B$ を満たす$\}$ と表記する。配分規則に関していくつかの定義を与える。

定義1：$v,w\in\mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ を TU ゲーム，$\boldsymbol{B}$ を提携構造，γ を配分規則とする。

・γ が CE（連結成分効率的）であるとは，任意の $B_k\in\boldsymbol{B}$ について，

$\sum_{i\in B_k}\gamma_i(N,v,\boldsymbol{B})=v(B_k)$ を満たすことである。

・γ が SYM（対称的）であるとは，任意の $\pi\in\prod_B$ と i に関して，

$\gamma_i(N,\pi v,\boldsymbol{B})=\gamma_{\pi(i)}(N,v,\boldsymbol{B})$ を満たすことである。

ここで，$(\pi v)(S):=v(\pi S)$ と定義する。

・γ が ADD（加法的）であるとは，

$\gamma(N, v+w, \boldsymbol{B})=\gamma(N, v, \boldsymbol{B})+\gamma(N, w, \boldsymbol{B})$ を満たすことである。

・γ が DUM（ダミー）であるとは，任意の $S\in 2^N$ について，

$v(S\cup\{i\})=v(S)$ ならば，$\gamma_i(N, v, \boldsymbol{B})=0$ が成立することである。前件の i を v のナルプレーヤーと呼ぶ。

配分規則が連結成分効率的であるというのは，提携内部では効率的な配分がなされるべきだという意味を持つ。対称的というのは，対称的なプレーヤーは配分も等しくなるであろうという主張である。

定義２：配分規則 $\phi^{AD}:(N, v, \boldsymbol{B})\mapsto(\phi_i^{AD}(N, v, \boldsymbol{B}))_{i\in N}\in\mathbb{R}^N$ が

$$\forall B\in\boldsymbol{B}, \forall i\in B, \phi_i^{AD}(N, v, \boldsymbol{B}):=\phi_i(B, v_B)$$

と与えられる時，$\phi^{AD}(N, v, \boldsymbol{B})$ を「Aumann-Drẽze 値」と呼ぶ。ここで，$v_B: 2^B\backslash\{\emptyset\}\to\mathbb{R}$ は，v の B への制限であり，ϕ は TU ゲームの Shapley 値である。

命題１（Aumann-Drẽze）

$(N, v, \boldsymbol{B})$ を提携構造 TU ゲームとする。CE，SYM，ADD，DUM を満たす配分規則 γ が唯一存在し，

$$\forall B\in\boldsymbol{B}, \forall i\in B, \gamma_i(N, v, \boldsymbol{B})=\phi_i^{AD}(N, v, \boldsymbol{B})$$

と与えられる。即ち，Aumann-Drẽze 値である。

Aumann-Drẽze 値の定義から提携構造が $\boldsymbol{B}=\{N\}$ の時は，Aumann-Drẽze 値は TU ゲームの Shapley 値に等しくなる。この事から Shapley 値は $\boldsymbol{B}=\{N\}$ の時の効率性つまり Pareto 効率性や SYM，ADD，DUM を満たすことが Aumann-Drẽze の命題から導かれる。

2.3　Myerson 値

Aumann-Drẽze 値では提携構造によって，プレーヤー間の協調やコミュニケーションといった概念を表現した。これに対して，２人のプレーヤーが互いにコミュニケーションするか否かという素朴な状況から協調関係の問題を捉えていこうという方法がある。２人のプレーヤーの意思疎通が可能な状況を，２人の間にネットワークが存在する（リンクが存在する）ということをもって分析していく手法である。

先の分析と同様に，$N=\{1, \cdots, n\}$ をプレーヤーの集合とする。$L\subset\{\{i, j\}\in N\times N|i\neq j\}$ をリンクの集合と呼び，その元によって，どのようなリンクが存在するのか否かを表す。これら２つのデータから構成される (N, L) をネットワーク，もしくは，コミュニケーションと呼ぶ。ネットワークに特性関数 v を加えた (N, v, L) をコミュニケーション状況と呼ぶ。

いくつかの用語を準備する。(N, L) をネットワークとし，S を提携とする。$i, j \in S$ が L によって S で連結しているとは，$i_1, \cdots, i_t \in S$ が存在して，全ての $k=1, \cdots, t-1$ について，$\{i_k, i_{k+1}\} \in L$ を満たし $i_1=i$ と $i_t=j$ が成立している事である。S/L によって，S の L による分割を与える，即ち，

$$S/L := \left\{ \{ i \in S | i, j \text{ が } L \text{ によって } S \text{ で連結している} \} \middle| j \in S \right\}$$

と定義されるものである。N/L の元を連結成分と呼ぶ。

定義3：(N, v, L) をコミュニケーション状況とする。全ての $S \in \mathcal{N}$ について，

$$v^L(S) := \sum_{C \in S/L} v(C)$$

と定義した $v^L : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ を「ネットワークに制限されたゲーム」と呼ぶ。

コミュニケーション状況から n ベクトルを決める関数 $\gamma : (N, v, L) \mapsto (\gamma_i(N, v, L))_{i \in N}$ を用語の乱用ではあるが配分規則と呼ぶ。最後にコミュニケーション状況の配分規則に関してのいくつかの定義を与える。

定義4：$v \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ を TU ゲーム，L をネットワーク，γ を配分規則とする。

・γ が CE（連結成分効率的）であるとは，任意の $S \in N/L$ について，
　$\sum_{i \in S} \gamma_i(N, v, L) = v(S)$ が成立することである。

・γ が Fair（公平）であるとは，全ての $\{i, j\} \in L$ について，
　$\gamma_i(N, v, L) - \gamma_i(N, v, L \setminus \{i, j\}) = \gamma_j(N, v, L) - \gamma_j(N, v, L \setminus \{i, j\})$ が成立することである。

配分規則が連結成分効率的であるというのは，先の分析と同様に提携内部では，効率的な配分を行うという意味である。一方，公平であるというのは，リンク $\{i, j\}$ を切断した時，プレーヤー i の配分の変化量とプレーヤー j の配分の変化量が等しいということを表す。つまり，リンク切断の当事者達は，リンク切断による影響が等しいという意味で公平と解釈される。

定義5：配分規則 $\mu : (N, v, L) \mapsto (\mu_i(N, v, L))_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$ が

$$\mu(N, v, L) := \phi(N, v^L)$$

と与えられる時，$\mu(N, v, L)$ を「Myerson 値」と呼ぶ。ここで，ϕ は TU ゲームの Shapley 値である。

命題 2 (Myerson)

(N, v, L) をコミュニケーション状況とする。CE と Fair を満たす配分規則 γ が唯一存在し,

$$\gamma(N, v, L)=\mu(N, v, L)$$

と与えられる。即ち,Myerson 値である。

例 1. Myerson 値の計算例や性質を具体例に於いて確認する。特性関数 $u_S : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ を

$$u_S(T)=\begin{cases} 1 & \text{もし} S \subset T \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

と定義する。以降,u_S は全て同様の定義で使われる。提携構造を伴う TU ゲーム (N, v, L) をそれぞれ,

- $N=\{1, 2, 3, 4\}$,
- $v=u_{\{1\}}+u_{\{2,3\}}+u_{\{3,4\}}+3u_N$,
- $L=\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\}$,

のように特定化する。例 1 のネットワークは,図 2 のように描かれる。

提携 N や $\{2, 3\}$ のネットワークによる分割は,$\{1, 2, 3, \}\backslash L=\{\{1, 2, 3, 4\}\}$ や $\{2, 3\}\backslash L=\{\{2\}, \{3\}\}$ と求まる。ネットワーク L に制限されたゲームは,$v^L=u_{\{1\}}+u_{\{1,2,3\}}+u_{\{1,3,4\}}+3u_N$ となり,Myerson 値は,$\mu(N, v, L)=(\frac{29}{12}, \frac{13}{12}, \frac{17}{12}, \frac{13}{12})$ と計算される。同様にして,L 以外のネットワークについても,ネットワークに制限されたゲームを求め,Myerson 値を計算すると,$\mu(N, v, L\backslash\{1, 3\})=(1, 0, 0, 0)$ や $\mu(N, v, L\backslash\{1, 4\})=(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ を得る。数値例を用いて Myerson 値が CE や Fair を確認する。

- $\sum_{i=1}^{4}\mu_i(N, v, L)=v(N)=6$,
- $\mu_1(N, v, L)-\mu_1(N, v, L\backslash\{1, 3\})=\dfrac{17}{12}=\mu_3(N, v, L)-\mu_3(N, v, L\backslash\{1, 3\})$,
- $\mu_1(N, v, L)-\mu_1(N, v, L\backslash\{1, 4\})=\dfrac{13}{12}=\mu_4(N, v, L)-\mu_4(N, v, L\backslash\{1, 4\})$

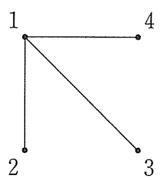

図 2 :ネットワーク L

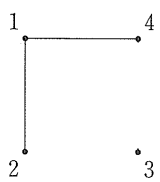

図 3 :ネットワーク $L\backslash\{1,3\}$

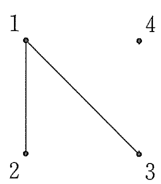

図 4 :ネットワーク $L\backslash\{1,4\}$

を得る。したがって，Myerson 値が CE や Fair を満たす事が数値例から分かる。また，ネットワーク図 3， 4 から，$i=1,3$ について，$\mu_i(N,v,L)\geq\mu_i(L,v,L\backslash\{1,3\})$ が，更に，$i=1,4$ について，$\mu_i(N,v,L)\geq\mu_i(N,v,L\backslash\{1,4\})$ が成り立つ。数値例では，リンクの増加に伴いリンクを結んだ当事者の配分が増加する。この配分規則の性質は，「リンク単調性」と呼ばれ，正確には，任意の (N,L) と任意の $k=i,j$ について，

$$\gamma_k(N,v,L\cup\{i,j\})\geq\gamma_k(N,v,L)$$

と定義されるものである。実は，v が優加法性を満たすならば Myerson 値はリンク単調性を満たす事が知られている。 ◇

例 2．リンク単調性が全員提携を必ずしも導かない事が次の例によって分かる。[1] プレーヤーの集合を $N=\{1,2,3\}$ とし，$v=u_{\{1,3\}}+u_{\{2,3\}}+10u_{\{1,2\}}-2u_N$ を特性関数，ネットワークをそれぞれ，$L=\{\{1,2\}\}$, $L^N=\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$ と特定化する。v は優加法性を満たしている。この設定で Myerson 値を計算すると，

$$\mu(N,v,L)=(5,5,0),\quad \mu(N,v,L\cup\{1,3\})=(\frac{31}{6},\frac{28}{6},\frac{1}{6}),\quad \mu(N,v,L^N)=(\frac{29}{6},\frac{29}{6},\frac{2}{6})$$

となる。これより，

$$\mu_1(N,v,L\cup\{1,3\})=\frac{31}{6}>5=\mu_1(N,v,L)$$

$$\mu_3(N,v,L\cup\{1,3\})=\frac{1}{6}>0=\mu_3(N,v,L)$$

を得，リンク単調性を満たしている事が確認される。しかしながら，

$$\mu_1(N,v,L)=5>\frac{29}{6}=\mu_1(N,v,L^N)$$

$$\mu_2(N,v,L)=5>\frac{29}{6}=\mu_2(N,v,L^N)$$

であることから，リンク単調性を満たしても必ずしも $\mu(N,v,L^N)\geq\mu(N,v,L)$ を導く訳ではない事が分かる。 ◇

（1） 本稿とは異なる文脈ではあるが，このような性質を持つ例は Aumann and Myerson（1988）などでも紹介されている。また，3 人のケースでは，全員提携の時の値 $v(N)$ を優加法性を満たす範囲で相対的に小さく定めることによって，リンク単調性を満たすが全員提携をもたらさないという例を作ることができる。

2.4　基本的関係

提携構造を伴うTUゲームから配分を与えるAumann-Drèze値とコミュニケーション状況から配分を与えるMyerson値の関係を示す。提携構造 $\boldsymbol{B}$ の要素内のプレーヤーが全てリンクされているというネットワークを

$$L^B := \bigcup_{B \in \boldsymbol{B}} \{\{i, j\} \mid i, j \in B, i \neq j\}$$

と定義する。

命題3（Slikker）

$(N, v, \boldsymbol{B})$ を提携構造を伴うTUゲームとする。この時，

$$\phi^{AD}(N, v, \boldsymbol{B}) = \mu(N, v, L^B)$$

が成立する。

Slikker（2001）は，Myerson値が連結成分分解可能であるというNouweland（1993）の命題を用いて証明を与えた。Myerson値のこの性質を導くには技術的な計算を繰り返し行わなくてはいけない。本稿では，初等的な手法のみを用い証明を試みる。そのための準備として下記の補題を用意する。

補題：$(N, v, \boldsymbol{B})$ を提携構造を伴うTUゲーム，$\pi \in \prod_B$ とする。この時，下記が成立する。

(1) $\boldsymbol{B} = N/L^B$.

(2) $(v+w)^{L^B} = v^{L^B} + w^{L^B}$.

(3) i が v のナルプレーヤーであれば，i は v^{L^B} のナルプレーヤーでもある。

(4) 任意の $B_k \in \boldsymbol{B}$ と任意の $S \in \mathcal{N}$ に関して，$\pi(S) \cap B_k = \pi(S \cap B_k)$。

(5) $(\pi v)^{L^B} = \pi(v^{L^B})$。

証明.

(1) L^B の定義によって $\boldsymbol{B} = N/L^B$ が成立する。

(2) 任意の $S \in \mathcal{N}$ に関して

$$(v+w)^{LB}(S) = \sum_{C \in S/L^B} (v+w)(C) = \sum_{C \in S/L^B} v(C) + \sum_{C \in S/L^B} w(C) = v^{LB}(S) + w^{LB}(S)$$

が成立する。

(3) i を v のナルプレーヤーとする。つまり，任意の $S \in 2^N$ について，$v(S \cup \{i\}) = v(S)$ とする。

$$v^{LB}(S \cup \{i\}) - v^{LB}(S) = \sum_{C \in S \cup \{i\}/L^B} v(C) - \sum_{C \in S/L^B} v(C) = 0。$$

よって，i は v^{L^B} のナルプレーヤーとなる。

(4) $\boldsymbol{B}=\{B_1, \cdots, B_m\}$ とする。任意の $S\in\mathcal{N}$ について，$A_k:=S\cap B_k$ とおく。便宜上 $\pi(\emptyset)=\emptyset$ とおく。$\pi\in\prod_B$ の定義より，任意の $k=1, \cdots, m$ と任意の $i\neq k$ について，

$$\pi(A_k)\subset B_k=\pi(B_k),$$
$$\pi(A_i)\cap B_k=\emptyset$$

が成立する。また，A_k の定義により，

$$\pi(S)=\bigcup_{k=1}^{m}\pi(A_k),$$
$$\pi(A_i)\cap\pi(A_j)=\emptyset$$

が成り立つ。したがって，

$$\pi(S)\cap B_k=\pi(A_k)=\pi(S\cap B_k)$$

を得る。

(5) $\boldsymbol{B}=\{B_1, \cdots, B_m\}$ とする。

$$\begin{aligned}
(\pi v)^{L^B}(S) &= \sum_{C\in S/L^B}(\pi v)(C) \\
&= \sum_{k=1}^{m}(\pi v)(S\cap B_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m}v(\pi(S\cap B_k)) \\
&= \sum_{k=1}^{m}v(\pi(S)\cap B_k) && \text{（補題（4）より）} \\
&= \sum_{C\in\pi(S)/L^B}(\pi v)(C) \\
&= v^{L^B}(\pi(S)) \\
&= \pi(v^{L^B})(S).
\end{aligned}$$

これより，$(\pi v)^{L^B}=\pi(v^{L^B})$ が成立する。 □

証明.（命題 3 の証明）$\boldsymbol{B}=\{B_1, \cdots, B_m\}$ とおく。Aumann-Drèze の命題によって，

$$\hat{\mu}(N, v, \boldsymbol{B}):=\mu(N, v, L^B)$$

と定義した $\hat{\mu}$ が CE，ADD，DUM，SYM を満たすことを示せばよい。

（CE）補題（1）より，$\boldsymbol{B}=N/L^B$ となる。Myerson 値が CE を満たす事を利用して，

$$\sum_{i \in B_k} \hat{\mu}_i(N, v, \boldsymbol{B}) = \sum_{i \in B_k} \mu_i(N, v, L^B)$$
$$= v(B_k)$$

を得る。これより，$\hat{\mu}$ は CE を満たす。

（ADD）Shapley 値が加法的である事と補題（2）を利用して，

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(N, v+w, \boldsymbol{B}) &= \mu_i(N, v+w, L^B) \\ &= \phi_i(N, (v+w)^{LB}) \\ &= \phi_i(N, v^{LB}) + \phi_i(N, w^{LB}) && \text{(Shapley 値の ADD)} \\ &= \hat{\mu}(N, v, \boldsymbol{B}) + \hat{\mu}_i(N, w, \boldsymbol{B}) \end{aligned}$$

を得る。これより，$\hat{\mu}$ は ADD を満たす。

（DUM）i を v のナルプレーヤーとする。補題（3）より i は v^{LB} のナルプレーヤーとなる。したがって，Shapley 値が DUM を満たす事を利用して，

$$\hat{\mu}_i(N, v, \boldsymbol{B}) = \phi_i(N, v^{LB}) = 0$$

を得る。これより，$\hat{\mu}$ は DUM を満たす。

（SYM）任意に $\pi \in \prod_B$ と $i \in B_k$ を固定する。Shapley 値が SYM を満たす事を利用して，

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_i(N, \pi v, \boldsymbol{B}) &= \mu_i(N, \pi v, L^B) \\ &= \phi_i(N, (\pi v)^{LB}) \\ &= \phi_i(N, \pi(v^{LB})) && \text{(補題（5）より)} \\ &= \phi_{\pi(i)}(N, v^{LB}) && \text{(Shapley 値の SYM)} \\ &= \hat{\mu}_{\pi(i)}(N, v, \boldsymbol{B}) \end{aligned}$$

を得る。これより，$\hat{\mu}$ は SYM を満たす。

以上より，$\hat{\mu}$ は CE, ADD, DUM, SYM を満たす事になる。したがって，Aumann-Drèze の命題によって，$\hat{\mu}(N, v, \boldsymbol{B}) = \phi^{AD}(N, v, \boldsymbol{B})$ となる。これより，

$$\mu(N, v, L^B) = \phi^{AD}(N, v, \boldsymbol{B})$$

が成立する。 □

系 1

(N, v, L) を提携構造を伴う TU ゲームとする。$\boldsymbol{B} = \{N\}$ ならば，

$$\phi(N, v) = \phi^{AD}(N, v, \boldsymbol{B}) = \mu(N, v, L^{\{N\}})$$

を得る。

命題 4

(N, L) をネットワーク，$(N, \boldsymbol{B})$ を提携構造とする。この時，

(1) $\boldsymbol{B}=N/L$

(2) 任意の TU ゲーム $v\in\mathbb{R}^N$ について，$\phi^{AD}(N, v, \boldsymbol{B})=\mu(N, v, L)$

を満たすならば，$L=L^{\boldsymbol{B}}$ が成立する。

証明. (1) と (2) が成立しているとし，$L\neq L^{\boldsymbol{B}}$ と仮定する。よって，

$$\{i, j\}\notin L, \quad \{i, k\}\in L, \quad \{k, j\}\in L$$

を満たすような $i, j, k\in B_l\in\boldsymbol{B}$ が存在する。

そこで，

$$v:=6u_{\{i,j\}}$$

と定義すると，

$$v^L=6u_{\{i,j,k\}}$$

となる。この時，

$$\phi_i^{AD}(N, v, \boldsymbol{B})=3\neq 2=\mu_i(N, v, L)$$

となり，(2) に矛盾する。したがって，$L=L^{\boldsymbol{B}}$ を得る。 □

例 3．プレーヤーの集合を $N=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ とし，ネットワークを $L=\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{4, 5\}\}$ と特定化する。図 5 の様に描かれる。この例では，提携構造を $\boldsymbol{B}:=\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$ とおくと，$\boldsymbol{B}=N/L=N/L^{\boldsymbol{B}}$ が成立する。ネットワークから導入される N の分割が提携構造と一致するのは必ずしも $L^{\boldsymbol{B}}$ の場合とは限らない事が分かる。 ◇

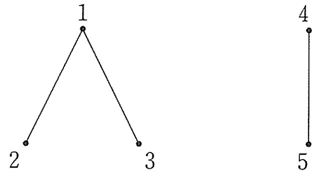

図 5 ：ネットワーク L

例 4．提携構造を伴う TU ゲーム $(N, v, \boldsymbol{B})$ をそれぞれ,

・$N=\{1, 2, 3, 4, 5\}$,

・$v=6u_{\{1,2\}}+4u_{\{1,3\}}+10u_{\{2,3\}}-6u_{\{1,2,3\}}+4u_{\{4,5\}}-5u_N$,

・$\boldsymbol{B}=\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$,

と特定化する。各々の定義から,

・$v_{\{1,2,3\}}=6u_{\{1,2\}}+4u_{\{1,3\}}+10u_{\{2,3\}}-6u_{\{1,2,3\}}$

・$v_{\{4,5\}}=4u_{\{4,5\}}$

を得る。この準備により，Aumann-Drēze 値は,

$$\phi^{AD}(N, v, \boldsymbol{B})=(3, 6, 5, 2, 2)$$

となる。また,

・$L^B=\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$

・$N/L^B=\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$

・$v^{L^B}=6u_{\{1,2\}}+4u_{\{1,3\}}+10u_{\{2,3\}}-6u_{\{1,2,3\}}+4u_{\{4,5\}}$

を得る。したがって，Myerson 値は,

$$\mu(N, v, L^B)=(3, 6, 5, 2, 2)$$

となる。一方，ネットワークの構造を図 5 の $L=\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{4, 5\}\}$ とする。この時,

・$N/L=\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$

・$v^L=6u_{\{1,2\}}+4u_{\{1,3\}}-6u_{\{1,2,3\}}+4u_{\{4,5\}}$

を得る。これより，Myerson 値は,

$$\mu(N, v, L)=(3, 1, 0, 2, 2)$$

となる。この例によって,

$$\phi^{AD}(N, v, \boldsymbol{B})=\mu(N, v, L^B)\neq\mu(N, v, L)$$

が確認される。 ◇

その他の性質を分析する。以下では $n=2$ の特殊ケースを考察の対象とする。命題 3 から,

$$\phi_1^{AD}(N, v, \{N\})=\mu_1(N,\ V, L^{\{N\}})=\frac{1}{2}\Big(v(\{1, 2\})-v(\{2\})+v(\{1\})\Big),$$

$$\phi_2^{AD}(N, v, \{N\})=\mu_2(N,\ V, L^{\{N\}})=\frac{1}{2}\Big(v(\{1, 2\})-v(\{1\})+v(\{2\})\Big)$$

が成立している。今，何らかのプロジェクトをプレーヤー 1 と 2 が共同で行っているとする。

$v(\{1,2\})$ は1と2が協力して事業を成して得られた価値，例えば利潤のようなものとする。このような状況では，1と2が交渉して互いの取り分を決めるという問題が考えられる。$v(\{i\})$ は i のみで達成できるであろう事業の価値であるから，$v(\{i\})$ を交渉決裂点と解釈すると，この問題のNash交渉解は

$$\frac{1}{2}\Big(v(\{1,2\})-v(\{2\})-v(\{1\})\Big)+v(\{1\}),\quad \frac{1}{2}\Big(v(\{1,2\})-v(\{1\})-v(\{2\})\Big)+v(\{2\})$$

と計算される。したがって，この設定では，Aumann-Drèze値やMyerson値は，Nash交渉解と一致していることがわかる。この状況は，プレーヤー1と2の間でネットワークが存在するという場合を表し，コミュニケーションを通じて協調が達成され，互いの分け前をNash交渉解で決定すると解釈される。更に，

$$\phi^{AD}(N,v,\{\{1\},\{2\}\})=\mu(N,v,\emptyset)=(v(\{1\}),v(\{2\}))$$

が成立する。これは，提携構造が $\{\{1\},\{2\}\}$ であるので，プレーヤー1と2の間にコミュニケーションが起こっていない状況を示している。このようなケースでは，もはや2人で協調して $v(\{1,2\})$ という価値を獲得することはできず，相互に交渉決裂点を享受することになる。

総じて，2人のネットワークのあり方で相互に協調を達成することが可能ならばNash交渉解を，相互に非協力的であるならば交渉決裂点をプレーヤー達は享受する。この事より，交渉問題を考える上で，ネットワークの有無が交渉の成立の鍵を握っていると考えることもできよう。

3　結語と課題

本稿ではネットワーク構造が与えられた時の配分規則であるMyerson値と提携構造が与えられた時の配分規則であるAumann-Drèze値の関係を中心に分析を試みた。本稿の主要な帰結は，Slikker (2001) によって示されたAumann-Drèze値とMyerson値の一致条件に関する命題の別証明を与えた事である。これによって，それぞれの値に対してのより深い洞察が得られたと考えられる。また，特殊ケースではあるものの交渉問題とそれらの値の関係を明らかにした。

これらの性質を利用すると，Aumann-Drèze値やMyerson値の既知の性質から，どの様な時にコアに含まれるのか，また，Hart and Mas-Colell (1989) の証明を応用することによって，Hart Mas-Colellのポテンシャルとの関連も容易に示される。利得関数をMyerson値を含む概念で分析を進めたDutta等の研究では，v が優加法的であるならば，全員提携がCoalition-Proof Nash均衡で実現されるという命題が示されたものの，強均衡での全員提携達成に関しては未解決問題とされていた。一方，利得関数にAumann-Drèze値を含む概念で分析を進めたMartinez等の研究によって，v が強凸であるならば全員提携が強均衡で実現されるという命題が示された。両論文の関

連は，Aumann-Drèze 値と Myerson 値の関係を利用することで明らかになる。また，上記の事実からネットワーク形成や提携構造形成に関する一連の研究は利得関数の性質，つまり，配分規則の性質に大きく依存していると推測される。

本稿ではネットワーク構造を所与として議論を進めて来た。本来は，ネットワーク構造が如何に形成されるのかというより根源的な問題から理論を進めていく必要があると思われる。この領域の研究は今後の課題としたい。

（東京工業大学大学院社会理工学研究科助手）

参考文献

Aumann, R. J. and Drèze, J. H. (1974). "Cooperative Games with Coalition Structures," *International Journal of Game Theory*, Vol. 3, No. 4, 217-237.

Aumann, R. J. and Myerson, R. (1988). "Endogenous Formation of Links between Players and of Coalitions: an Application of the Shapley Value," In Roth, A., editor, *The Shapley Value*, 175-191. Cambridge University Press.

Bolton, P. and Dewatripont, M. (1994). "The Firm as a Communication Network," *Quarterly Journal of Economics* Vol. 109, No. 4. 809-839.

Dutta, B., van den Nouweland, A., and Tijs, S. (1998). "Link Formation in Cooperative Situations," *International Journal of Game Theory*, Vol. 27, 245-256.

Hart, S. and Kurz, M. (1983). "Endogenous Formation of Coalitions," *Econometrica*, Vol 51. 1047-1064.

Hart, S. and Mas-Colell, A. (1989). "Potential, Value, and Consistency," *Econometrica*, Vol 57. 589-614.

Jackson, M. and Wolinsky, A. (1996). "A Strategic Model of Social and Economic Networks," *Journal of Economic Theory*, Vol. 71: 44-74.

Martinez, A.M., Soriano. J.S., Jurando, I.G., and Tijs. S. (1998). "Strong Equilibria in Claim Games Corresponding to Convex Games." *International Journal of Game Theory*, Vol. 27, 211-217.

Myerson, R. B. (1977). "Graphs and Cooperation in Games," *Mathematics of Operations Research*. Vol. 2, No. 3, 225-229.

Myerson, R. B. (1980). "Conference Structures and Fair Allocation Rules," *International Journal of Game Theory*, Vol. 9. 169-182.

Owen, G. (1977). "Values of Games with a Priori Unions," In: Henn R, Moeschlin O. eds. *Essays in mathematical economics and game theory*, Springer-Verlag, 76-88.

Slikker, M. (2001). *Social and Economic Networks in Cooperative Game Theory*, Kluwer Academic Publishers.

van den Nouweland, A. (1993). *Games and Graphs in Economic Situations*, Tilburg University.

Watts, A. (2001). "A Dynamic Model of Network Formation," *Games and Economic Behavior*, Vol. 34. 331-341.