Title	均衡と時間II(承前) : 重複世代モデルの場合 その2
Sub Title	Equilibrium and time II : a model with overlapping generations part 2
Author	福岡, 正夫(Fukuoka, Masao)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2002
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.95, No.3 (2002. 10) ,p.517(61)- 530(74)
JaLC DOI	10.14991/001.20021001-0061
Abstract	本論文は通時的経済均衡理論研究の一環として、いわゆる重複世代モデルの均衡がもつ一二の特異な性質を考察したものである。そこでは各世代複数個人・各期多数財から成る一般化された重複世代経済が想定されるが、そのような経済の均衡がかならずしもパレード最適性を満たすとはかぎらないことを示した前稿に引きつづき、本稿ではやはり当該の均衡がかならずしも確定性を満たすとはかぎらないことを明らかにする。 In this study, we discuss a few peculiar characteristics of the equilibrium in the so-called overlapping generation model as part of the study of intertemporal economic equilibrium theory. The model presupposes a generalized overlapping generation economy comprising multiple individuals in each generation and many goods in each period. Following my prior paper, which demonstrated that equilibrium in such economy does not necessarily achieve Pareto optimum, this study shows that such equilibrium does not necessarily meet the condition of determinacy.
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20021001-0061

均衡と時間 II（承前）―重複世代モデルの場合 その 2―

Equilibrium and Time II：A Model with Overlapping Generations Part 2

福岡 正夫(Masao Fukuoka)

本論文は通時的経済均衡理論研究の一環として、いわゆる重複世代モデルの均衡がもつ一二の特異な性質を考察したものである。そこでは各世代複数個人・各期多数財から成る一般化された重複世代経済が想定されるが、そのような経済の均衡がかならずしもパレード最適性を満たすとはかぎらないことを示した前稿に引きつづき、本稿ではやはり当該の均衡がかならずしも確定性を満たすとはかぎらないことを明らかにする。

Abstract

In this study, we discuss a few peculiar characteristics of the equilibrium in the so-called overlapping generation model as part of the study of intertemporal economic equilibrium theory. The model presupposes a generalized overlapping generation economy comprising multiple individuals in each generation and many goods in each period. Following my prior paper, which demonstrated that equilibrium in such economy does not necessarily achieve Pareto optimum, this study shows that such equilibrium does not necessarily meet the condition of determinacy.

「三田学会雑誌」95巻3号（2002年10月）

均衡と時間II（承前）

——重複世代モデルの場合 その2*——

福 岡 正 夫

要 旨

本論文は通時的経済均衡理論研究の一環として，いわゆる重複世代モデルの均衡がもつ一二の特異な性質を考察したものである。そこでは各世代複数個人・各期多数財から成る一般化された重複世代経済が想定されるが，そのような経済の均衡がかならずしもパレート最適性を満たすとはかぎらないことを示した前稿に引きつづき，本稿ではやはり当該の均衡がかならずしも確定性を満たすとはかぎらないことを明らかにする。

キーワード

一般均衡理論，通時的均衡，重複世代モデル，均衡の確定性・不確定性，横断性定理

8

前節までの議論で多数財・多数個人モデルでの均衡とパレート最適との関係を明らかになしえたので，つぎに同じ一般モデルの枠組み内で均衡の確定性・不確定性をめぐる問題に考察を加えることとしたい。前に図説した1財・1個人の単純モデルでは，均衡は，名目貨幣が存在する場合には恒常状態の事態を除いて無数に存在するが，ただその不確定性の自由度はもっぱら p_1 の水準のみに依存してたかだか1次元にとどまり，他方名目貨幣が存在しない場合の均衡（この場合にはそれは実質的恒常状態しかない）はつねに一意で確定的となることが示された。ところがモデルが目下の多数財・多数個人モデルに拡大されると，それらの帰結はもはやあてはまらず，名目貨幣の存否のいかんにかかわりなく不確定性が生じうることになる。すなわち一般モデルでは価格の絶対水準ばかりでなく，相対価格もまた不確定性をもちうるのである。

この問題を究明するにあたって，以下では $m \neq 0$ の場合と $m = 0$ の場合を分けて論じるが，これ

* 本稿は福岡正夫「均衡と時間II——重複世代モデルの場合——」，『三田学会雑誌』2001年10月号の続篇である。またこれらは同「均衡と時間I——有限主体・無限計画期間モデルの場合——」，『三田学会雑誌』2001年1月号のcompanion pieceでもある。

は議論の基点となる恒常状態が名目的なものであるか実質的なものであるかに応じて，推論の捌き方にも多少の相違が生じてくるからである。

さきに本節においては前者すなわち名目的な場合をとり上げることにし，まず世代0の超過需要関数を含む第1期の均衡条件すなわち

$$z^0(m^0, p_1)+y(p_1, p_2)=0 \tag{2.3}$$

から出発する。ここで m^0 は n 次元開部分集合 M の元であり，当該世代に属する個人 $1, 2, \cdots\cdots, n$ への初期貨幣量の分配パラメターを示している。以下ではそのような均衡条件を満たす恒常状態 $q=(p, \beta p)$ と整合的な $\overline{m}^0$ が M のなかにかならず見出されることを，あらためて

A. 9　$z^0(\overline{m}^0, p)+y(p, \beta p)=0$ を満たす $\overline{m}^0\neq 0$ が存在する。

として明示的に仮定することにしよう。その上で，$\overline{m}^0$ と $(p, \beta p)$ を基点として上記の均衡式を m^0, p_1 および p_2 について微分し，その結果得られる線形版のシステムをまず考えることにすると，z^0 が m^0, p_1 に関して0次同次であることから

$$D_1z^0m^0+D_2z^0p_1+D_1yp_1+D_2yp_2=0 \tag{8.1}$$

という式が導かれ，ここで各ヤコービ行列の要素が $(\overline{m}^0, p)$ および $(p, \beta p)$ で評価された定数であることはいうまでもない。前稿の A. 7 により D_2y はどの恒常状態でも非特異とされているから，(8.1) は

$$p_2=-D_2y^{-1}(D_2z^0+D_1y)p_1-D_2y^{-1}D_1z^0m^0 \tag{8.2}$$

のように解くことができ，ゆえにそれを p_1 の恒等式と並置することで，前に準じた

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & I \\ -D_2y^{-1}D_1z^0 & -D_2y^{-1}(D_2z^0+D_1y) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m^0 \\ p_1 \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

という形の式を得る。記号を簡略化して

$$q_1=(p_1, p_2)$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & I \\ -D_2y^{-1}D_1z^0 & -D_2y^{-1}(D_2z^0+D_1y) \end{bmatrix}$$

とおけば，(8.3) はまた

$$q_1=B\begin{bmatrix} m^0 \\ p_1 \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

と書くこともできよう。よって，いま$(\overline{m}^0, p)$の近傍の(m^0, p_1)から出発するとして，この式からq_1を求めれば，あとは前稿第5節の（5.3）式$q_t = Gq_{t-1}$に接続して，$q_2, q_3, \cdots\cdots$を逐次求めていける手順となる。

ここで本来の非線形システム（2.3）に戻って，前と同様にqを含む開錐を$C \subset R^{2l}_{++}$，その最初のl個の座標への射影を$C_1 \subset R^l_{++}$と書くことにしよう。目下の仮定の下では非線形の場合も陰関数の定理により，qの近傍には，C_1に属するp_1と，$\overline{m}^0$の近傍に属するm^0から出発する（2.3）の解$q_1 = b(m^0, p_1)$が存在し，それについては$Db(\overline{m}^0, p) = B$となっている。するとわれわれが当面する問題は，上記の文脈の下ではつぎのようにいいあらわされることになる。すなわち所与のm^0に対して（2.3）を満たす初期解q_1で，さらにCにおいて（2.4）を満たす$\{q_2, q_3, \cdots\cdots\}$に延長され，しかもその経路が恒常状態の半直線上の点に収束するようなものを見出すことができるかどうか，かつそれが見出される場合に1個のみ存在するのかそれとも多数存在するのか，というのがそれである。これはいい換えれば，m^0と対（つい）になって上記の条件を満たすp_1がどれだけ存在するかという問題にほかならず，それが存在する場合もっぱら局所一意であれば，上記の均衡経路は確定的となり，多数あるいは連続体として存在すれば，それは不確定的となるというわけである。

以下では前と同様，正則な経済を考えていく方針をとるので，そのための一つの条件として，上記のBについて

A. 10　行列Bは階数$2l$をもつ。

と仮定することにする。Bは$2l \times (n+l)$の行列であるから，この仮定は明らかに$2l \leqq n+l$であること，すなわち$n \geqq l$であることを含意している。これは同世代の構成人数が財の種類数を下回らないことを意味するが，そのこと自体は別段制約的な要件であるとは考えられない。というのはソンネンシャイン，マンテル，ドブリューらの研究が示すように[(37)]，微分可能性，0次同次性，ワルラス法則，そして境界条件さえ満たされていれば，任意の超過需要関数(y, z)について，R^{2l}_{++}に含まれる任意コンパクトな価格集合上で(y, z)と一致するような超過需要関数を生成するl人すなわち少なくとも財の数と同数の個人をつねに見出しうるからである。

さてここで，ふたたび線形の場合に戻って考えると，行列Bの要素は定数であるから，Bは$(m^0, p_1) \in R^n \times R^l$を$q_1 \in R^{2l}$に写す$R^{n+l} \to R^{2l}$の線形写像であるとみなすことができる。すると，A. 10が仮定されれば，この写像Bは，qにおけるW_sの接空間である前出のV_sに横断的となることが，つぎのような推論をつうじて確かめられる。

これを示すには

---

(37)　H. Sonnenschein, "Do Walras' Identity and Continuity Characterize the Class of Community Excess Demand Functions ?", *Journal of Economic Theory*, August 1973, R. Mantel, "On the Characterization of Aggregate Excess Demand", *Journal of Economic Theory*, March 1974. G. Debreu, "Excess Demand Functions", *Journal of Mathematical Economics*, March 1974.

$$X = \bigcup_{(m^0, p_1) \in R^n \times R^l} \left\{ q_1 \in R^{2l} \mid q_1 = B \begin{bmatrix} m^0 \\ p_1 \end{bmatrix} \right\}$$

で定義される空間が V_s と横断的に交わることを示せばよいが，事実いま B を各列に分けて

$$B = [B_1, B_2, \cdots\cdots, B_{n+l}]$$

と書けば，(m^0, p_1) は $R^n \times R^l$ から任意に選べるから，たとえば $(m^0, p_1) = (1, 0, 0, \cdots\cdots, 0)$ のように選べば $q_1 = B_1 \in X$，また $(m^0, p_1) = (0, 1, 0, \cdots\cdots, 0)$ のように選べば $q_1 = B_2 \in X$, …… というように，$B_1, B_2, \cdots\cdots, B_{n+l}$ はすべて X に含まれることが分かる。そこで，どんな $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_{n+l} \in R^{n+l}$ に対しても

$$\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \cdots\cdots + \alpha_{n+l} B_{n+l} \in X$$

が成り立つことになるが，前記の A. 10 により $B_1, B_2, \cdots\cdots, B_{n+l}$ のなかにはかならず 1 次独立のベクトルが $2l$ 個存在するから，一般性を失うことなくそれらを $B_1, B_2, \cdots\cdots, B_{2l}$ とすれば，$\alpha_{2l+1} = \alpha_{2l+2} = \cdots\cdots = \alpha_{n+l} = 0$ として，すべての $x \in R^{2l}$ に対し

$$x = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \cdots\cdots + \alpha_{2l} B_{2l}$$

のようにすることができる。これで $X \supset R^{2l}$ となることが分かったが，他方 X の定義からどの q_1 についても $q_1 \in R^{2l}$，したがって $X \subset R^{2l}$ となることは自明であるから，前の帰結と合わせて $X = R^{2l}$，よって X に V_s を加えても当然 $X + V_s = R^{2l}$ となる。ところが目下の場合，X，V_s と，各点におけるそれらの接空間 $T_x X$，$T_x V_s$ とはそれぞれ同じものであるから，上に得た帰結は $X \cap V_s$ のすべての点 x において $T_x X + T_x V_s = R^{2l}$ が成り立つことでもあり，これは X が V_s に横断的となることにほかならない。なお $X \cap V_s = \emptyset$ の場合には，いうまでなく上記の前提そのものが成り立たないという意味で，空虚ではあるが論理上 X と V_s が横断的となることに変わりはない。

ところで，以上に示したように X が V_s に横断的であれば，m^0 を固定した場合についても

$$X_{m^0} = \bigcup_{p_1 \in R^l} \left\{ q_1 \in R^{2l} \mid q_1 = B \begin{bmatrix} m^0 \\ p_1 \end{bmatrix} \right\}$$

と定義することにより，標準的な横断性定理から，ほとんどすべての $m^0 \in R^n$ について X_{m^0} は V_s に横断的であるということができる。(38) そして X_{m^0} は R^{2l} のアフィン部分空間で l 次元であり，V_s

(38) V. Guillemin and A. Pollack, *Differential Topology*, 1974, p. 68, 三村護訳『微分位相幾何学』, 1998, pp. 87-88参照。

は W_s の接空間で l_s+1 次元であるから，上記の結果から，これらの両空間が非空の共通部分をもてば，その次元はそれぞれの次元の和から全空間の次元を引いて，$l+(l_s+1)-2l=l_s+1-l$ となることが知られるのである。

そこでつぎの問題は，線形システムについて得られたこれらの帰結が果たして本来の非線形システムについてもどれだけ期待できるかを明らかにすることである。まず上記の議論で用いた X の定義になぞらえ，非線形の写像 $b:M\times C_1\to R^{2l}$ についても

$$\widetilde{X}=\bigcup_{(m^0,p_1)\in M\times C_1}\{\,q_1\in R^{2l}\mid q_1=b(m^0,p_1)\,\}$$

と定義することにし，X と V_s との関係に準じて $\widetilde{X}$ と W_s との関係を考えていくことにしよう。非線形の場合には，$\widetilde{X}$ と W_s は X，V_s とは異なり一般には超平面に限定されない部分多様体となるから，$(\overline{m}^0,p)$ で $\widetilde{X}$ が W_s に横断的であるからといって，大域的にほかの (m^0,p_1) でも同様な関係が保証されるとはかぎらない。そういった事情からして，以下の議論は恒常状態 $(\overline{m}^0,p)$ の近傍の局所的な考察に限定されざるをえないであろう。

線形システムにおいて $(\overline{m}^0,p)$ で X が V_s に横断的であれば，非線形システムにおいてもやはり $(\overline{m}^0,p)$ で $\widetilde{X}$ が W_s に横断的となること，また $(\overline{m}^0,p)$ の近傍の (m^0,p_1) でも同様の帰結が維持されるであろうこと，は容易に推察されるところである。事実そうした推察が支持されることはすぐあとで明示するが，さしあたってここでは，まず上記の主張が成り立つとしたときに何がいえるかをさきに示しておくことにしたい。いちいち断らないが，以下の所論は上にも触れたように，もっぱら (m^0,p_1) を $(\overline{m}^0,p)$ の近傍に限っての話である。

$\widetilde{X}$ を前記のように定義し，また m^0 を固定した場合についても $b_{m^0}:C_1\to R^{2l}$ として

$$\widetilde{X}_{m^0}=\bigcup_{p_1\in C_1}\{\,q_1\in R^{2l}\mid q_1=b_{m^0}(p_1)\,\}$$

と定義すれば，$\widetilde{X}$ が W_s に横断的であるときには，横断性定理から固定した m^0 の近傍のほとんどすべての m^0 について $\widetilde{X}_{m^0}$ は W_s に横断的である。これはそれらの m^0 について

$$\widetilde{X}_{m^0}\cap W_s=\emptyset \tag{8.4}$$

となるか，あるいは $p_1\in b_{m^0}^{-1}(W_s)$ となるようなすべての p_1 に対して

$$T_{b_{m^0}(p_1)}(\widetilde{X}_{m^0})+T_{b_{m^0}(p_1)}(W_s)=R^{2l} \tag{8.5}$$

となるということであり，後者の式はまた

$$\mathrm{Im}(D_{p_1}b_{m^0}(p_1))+T_{b_{m^0}(p_1)}(W_s)=R^{2l}$$

のようにも書くことができる[(39)]。ここで $\mathrm{Im}(D_{p_1}b_{m^0}(p_1))$ は p_1 で評価したヤコービ行列 $D_{p_1}b_{m^0}$ の像を，

また $T_{b_{m^0}(p_1)}(W_s)$ は $b_{m^0}(p_1)$ における多様体 W_s の接空間をあらわしている。

さて，もしここで $l_s+1-l<0$ であるとすれば，上記二つの可能性（8.4）あるいは（8.5）のうち，前者が成り立つほかはない。事実いまかりに後者（8.5）が成り立ったとすれば，その左辺の次元はたかだか l と $1+l_s$ の和すなわち l_s+1+l であり，右辺の次元はいうまでもなく $2l$ であるから，$l_s+1+l \geqq 2l$ すなわち $l_s+1-l \geqq 0$ となるのでなくてはならず，これは明らかに目下の仮定 $l_s+1-l<0$ と矛盾する。

よって $l_s+1-l<0$ であれば（8.4）が成り立たざるをえないが，いま $p_1 \in b_{m^0}^{-1}(W_s)$ となるような p_1 の集合をあらためて

$$S_{m^0}=\{\, p_1 \in R^l_{++} \mid b_{m^0}(p_1) \in W_s \,\}$$

と定義すれば，上記の帰結から $l_s+1-l<0$ のときは $S_{m^0}=\emptyset$ とならねばならないことになる。

他方もし $l_s+1-l \geqq 0$ であるとすれば，（8.4），（8.5）双方の可能性があるが，（8.4）であれば，上の場合と同様ふたたび $S_{m^0}=\emptyset$ となる。そこで（8.5）が成り立つとすれば，そのときには $S_{m^0} \neq \emptyset$ で，$\dim S_{m^0}=l_s+1-l$ となることが，つぎのような数理にもとづいて導かれる。すなわちこの場合は，逆関数の余次元に関する定理[(40)]を適用することができ，（8.5）から b_{m^0} が W_s に横断的となるので，当該の定理の前件が満たされることになる。よってその帰結から，C_1 における $b_{m^0}^{-1}(W_s)$ の余次元は R^{2l} における W_s の余次元にひとしいと主張できるのである。ところが C_1 における $b_{m^0}^{-1}(W_s)$ とはとりもなおさず S_{m^0} のことであり，その余次元は C_1 の次元 l から S_{m^0} の次元を引いたものにひとしい。また一方，W_s の余次元は R^{2l} の次元 $2l$ から W_s の次元を引いたものであるから，定理の帰結から

$$l-\dim S_{m^0}=2l-(l_s+1)$$

となり，

$$\dim S_{m^0}=l_s+1-l$$

となるのである。

これでわれわれは，$\widetilde{X}$ が W_s に横断的であれば，ほとんどすべての m^0 について S_{m^0} は空であるか，またはもし空でなければその次元は l_s+1-l になることを示したわけであり，これがキーホ

(39) Guillemin and Pollack, *op. cit.*, p. 28, 三村訳，p. 35参照。

(40) Guillemin and Pollack, *op. cit.*, p. 28, 三村訳，p.35。定理　滑らかな写像 $f: X \to Y$ が部分多様体 $Z \subset Y$ に横断的ならば，逆像 $f^{-1}(Z)$ は X の部分多様体で，X における $f^{-1}(Z)$ の余次元は Y における Z の余次元にひとしい。

ここで f を b_{m^0}，X を C_1，Y を R^{2l}，Z を W_s とすれば，本文上記の帰結を得る。

ー＝レヴァインが均衡の確定性・不確定性を論じるさいにその基礎とした命題にほかならない。(41)

以上までのところで，数理の問題としては，上の議論が立脚してきた（($\bar{m}^0, p$) ならびにその近傍において）$\tilde{X}$ が W_s に横断的となるという想定が，さらにいかなる上位の仮定から導かれるかを解明する仕事のみが残されることになった。キーホー＝レヴァインはその課題に当てて

A. 11　$l+1-l_s \geqq 2l$ のときはいつでも，行列

$$\left[\begin{array}{c:ccc} I & & & \\ -D_2 y^{-1}(D_2 z^0 + D_1 y) & q & v_1 \cdots\cdots & v_{l_s} \end{array}\right]$$

は階数 $2l$ をもつ。

という仮定を設け，当該の恒常状態の下でこの仮定が満たされるときに，($\bar{m}^0, p$) において $\tilde{X}$ は W_s に横断的となると主張している。(42)(43)

A. 11が仮定されれば，確かにその帰結として q で $\tilde{X}$ は W_s に横断的となる。キーホー＝レヴァインのこの箇所の記述には何ら証明めいた推論は見出されないが，その点については前に A. 10から $T_x X + T_x V_s = R^{2l}$ を導いた数理とアナロガスにつぎのように考えれば足りるであろう。

まず求める帰結すなわち ($\bar{m}^0, p$) で $\tilde{X}$ が W_s に横断的となることを示すには，

$$\mathrm{Im}(D_{p_1} b(\bar{m}^0, p)) + T_{b(\bar{m}^0, p)}(W_s) = R^{2l} \tag{8.6}$$

となることを示せばよい。(44) ここで $D_{p_1} b(\bar{m}^0, p)$ は m^0 を $\bar{m}^0$ に固定して b を p_1 で微分したときのヤコービ行列を ($\bar{m}^0, p$) で評価したもので，

$$D_{p_1} b(\bar{m}^0, p) = \begin{bmatrix} I \\ -D_2 y^{-1}(D_2 z^0 + D_1 y) \end{bmatrix}$$

であり，$\mathrm{Im}(D_{p_1} b(\bar{m}^0, p))$ はその下で $\tilde{p}_1$ を R^l 全域にわたって動かしたときの $D_{p_1} b(\bar{m}^0, p)$ の像すなわち

$$\mathrm{Im}(D_{p_1} b(\bar{m}^0, p)) = \bigcup_{\tilde{p}_1 \in R^l} \{ q_1 \in R^{2l} \mid D_{p_1} b(\bar{m}^0, p) \cdot \tilde{p}_1 \}$$

---

(41)　T. J. Kehoe and D. K. Levine, “Comparative Statics and Perfect Foresight in Infinite Horizon Economies”, *Econometrica*, March 1985, p. 445, Proposition 4. 1.

(42)　Kehoe and Levine, *op. cit.*, p. 445.

(43)　上記の行列の階数が $2l$ となるためには，$l+1+l_s \geqq 2l$ でなければならないことは自明であるが，それにもかかわらず仮定のなかに「$l+1+l_s \geqq 2l$ のときにはいつでも」と断わる所以は，この断わり書きがないと，仮定の含意として $l+1+l_s < 2l$ の場合が脱落してしまうからである。

(44)　Guillemin and Pollack, *op. cit.*, p. 28, 三村訳，p. 35参照。

である。他方，$T_{b(\overline{m}^0,p)}(W_s)$ は $b(\overline{m}^0,p)$ における W_s の接空間で，定義から

$$T_{b(\overline{m}^0,p)}(W_s)=V_s=\bigcup_{c\in R^{l_s+1}}\{q_1\in R^{2l}|q_1=(q,v_1,\cdots\cdots,v_{l_s})\cdot c\}$$

ここで c は列ベクトル $(c_0,c_1,\cdots\cdots,c_{l_s})\in R^{l_s+1}$

である。このことから知られるように，$\mathrm{Im}(D_{p_1}b(\overline{m}^0,p))$ と $T_{b(\overline{m}^0,p)}(W_s)$ はそれぞれ A. 11に登場する行列の左半部と右半部の像となっており，それらを足したものが R^{2l} になることを示せば，所望の帰結が成り立つことになる。

事実いま $D_{p_1}b(\overline{m}^0,p)=B_{\overline{m}^0}$ と略記して，それを各列ごとに $B_{\overline{m}^0}=(B^1_{\overline{m}^0},B^2_{\overline{m}^0},\cdots\cdots,B^l_{\overline{m}^0})$ と書くことにすれば，A. 11によってわれわれは $(B^1_{\overline{m}^0},B^2_{\overline{m}^0},\cdots\cdots,B^l_{\overline{m}^0},q,v_1,\cdots\cdots,v_{l_s})$ のなかから1次独立な列を $2l$ 個選ぶことができる。そこでたとえば $l_1+(1+l_2)=2l$ として，前半部から適当に l_1 個の列を選び，後半部から適当に $1+l_2$ 個の列を選んで，$B^1_{\overline{m}^0},\cdots\cdots,B^{l_1}_{\overline{m}^0},q,v_1,\cdots\cdots,v_{l_2}$ がそれらであるとすれば，これらの列が1次独立であるとは，$(\tilde{p}_1,\cdots\cdots,\tilde{p}_{l_1})$ を R^{l_1} から，また $(c_0,c_1,\cdots\cdots,c_{l_2})$ を R^{1+l_2} から任意に選んで

$$\tilde{p}_1B^1_{\overline{m}^0}+\cdots\cdots+\tilde{p}_{l_1}B^{l_1}_{\overline{m}^0}+c_0q+c_1v_1+\cdots\cdots+c_{l_2}v_{l_2}=R^{2l}$$

のようにできるということであり，これは $\mathrm{Im}(B_{\overline{m}^0})$ に含まれる l_1 個のベクトル $B^1_{\overline{m}^0},\cdots\cdots,B^{l_1}_{\overline{m}^0}$ と V_s に含まれる $1+l_2$ 個のベクトル $q,v_1,\cdots\cdots,v_{l_2}$ で R^{2l} が張れるということにほかならない。よってこの仮定の下では（8.6）が成り立つことになり，$(\overline{m}^0,p)$ において $\tilde{X}$ が W_s に横断的となることが知られるのである。

ところで A. 11の行列に含まれる D_1y,D_2y,D_2z^0 や $q,v_1,\cdots\cdots,v_{l_s}$ はいずれも (m^0,p_1) の連続関数であり，(m^0,p_1) を僅かに動かしたとしてもこの行列の最大階数が変わることはない。したがって $(\overline{m}^0,p)$ の近傍を考えるかぎり，そこに含まれるどの (m^0,p_1) に対しても当該の仮定はあてはまり，前述のところと同様の帰結

$$\mathrm{Im}(D_{p_1}b(m^0,p_1))+T_{b(m^0,p_1)}(W_s)=R^{2l}$$

が成り立つと考えてよいであろう。

よって以上の考察をつうじて，所与の恒常状態の近傍に議論を限定するかぎり，ほとんどすべての m^0 について S_{m^0} は空であるか，あるいは空でないならばその次元は l_s+1-l にひとしいという命題が立証されえたことになる。

この命題にもとづき，均衡の確定性・不確定性に関してはつぎのような結論が当初の設問への解答として導き出される。

(1)　$l_s+1-l<0$ すなわち $l_s<l-1$ の場合。この場合には，上に見たように，考察領域のほとんどすべての m^0 について S_{m^0} は空である。これは局所的に安定な均衡経路が存在しないことを意

味し，ほとんどすべての初期条件から出発する経路は当該の恒常状態から離反していかざるをえない。その種の恒常状態は達成不可能であるから，経済学的にも興味に乏しいであろう。

(2)　$l_s+1-l=0$ すなわち $l_s=l-1$ の場合。この場合は前記二つの多様体の共通部分は 0 次元となり，これは S_{m^0} に含まれる p_1 がただ 1 点となることを意味している。よってこの事態の下では局所安定な均衡経路がただ一本のみ存在し，均衡は確定的（determinate）である。

(3)　$l_s+1-l>0$ すなわち $l_s>l-1$ の場合。この場合は上記多様体の共通部分は連続体としての p_1 の集合を含み，局所安定な均衡経路は無数に存在しうる。その意味において均衡は不確定的（indeterminate）となる。

前々からの正則性の仮定たとえば仮定 A. 7 と同様，仮定 A. 10や A. 11もまた生成的（generic）な仮定であり，y, z を所与とするとき，ほとんどすべての z^0 について成立する。したがって，それらの下で導かれる上記の帰結も同様に生成的な普遍性をもち，ほとんどすべての経済，より精確にいえば全経済空間のなかで開稠密な部分集合をなすどの経済についてもあてはまる。これは，重複世代モデルにあっては，きわめて大きな経済の集合が確定的な均衡をも不確定的な均衡をももちうるということであり、不確定的な均衡のパターンがかならずしも degenerate な場合にのみ限定されるとはいえないということである。しかも l_s+1-l は 1 にひとしいともかぎらず，もしそれが 1 を上回れば，たんに絶対価格水準の不確定性ばかりでなく，相対価格の不確定性もまた排除されえないのである。

以上で得た帰結を，とりあえずつぎの定理の形で要約しておく。

> **定理 5**　名目的な場合，局所安定な均衡経路が存在するためには $l_s \geqq l-1$ となっていなくてはならない。ここで等号が成立すれば，均衡は確定的であり，不等号が成立すれば，均衡は不確定的である。そしてこの帰結は，全経済空間で開稠密な集合をなすどの経済についてもあてはまる。

9

つぎに $m=0$ の場合の考察に移る。前にも見たように，この場合には一般に $\beta<1, \beta>1$ という二つの事態が生じるが，それればかりではなく，z^0 に要請される 0 次同次性が p_1 のみに関するものになるという点でも，$m\neq 0$ の場合と相違する点が見出される。そして後者の条件は当然すべての $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ について $m_i^0=0$ になることを含意せざるをえないであろう。なぜなら，同世代のある個人 i について $m_i^0>0$ であり，タイプの異なる他の個人 j について $m_j^0<0$ である場合には，それらの和がゼロになったとしても資産効果が相殺されるとはかぎらず，一般には z^0 は p_1 に関して 0 次同次とはなりえないからである。それゆえ，目下の場合については前の場合にように（8.1）式を用いることができず，多少とも異なった思案を凝らすことが必要となるのである。

この場合，初期価格ベクトルは第1期の均衡条件にさらに加えて

$$p_1'y(p_1, p_2)=0 \tag{9.1}$$

という式を満たすのでなくてはならない。以下では（9.1）を満たす(p_1, p_2)の集合を

$$Q_R=\{(p_1, p_2)\in R^{2l}_{++} \mid p_1'y(p_1, p_2)=0\}$$

と定義し，ふたたび所与の恒常状態$(p, \beta p)$とその近傍を考えることにする。いま$p_1'y(p_1, p_2)$を(p_1, p_2)から価値和への関数$f: R^{2l}_{++}\to R$とみなして，0がfの正則値であるとすれば，$Q_R=f^{-1}(0)$であり，逆像定理(45)によって$f^{-1}(0)$は

$$\dim f^{-1}(0)=\dim R^{2l}-\dim R=2l-1$$

を満たすR^{2l}の部分多様体となる。つまり$(p, \beta p)$が$p_1'y(p_1, p_2)$の正則点であるならば，$p_1'y(p_1, p_2)=0$を満たす初期価格の集合は$(p, \beta p)$のある近傍で$2l-1$次元の多様体となるのである。

当該の$(p, \beta p)$を基点として（9.1）をp_1, p_2について微分すれば

$$[y'+p'D_1y \quad p'D_2y]\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}=0 \tag{9.2}$$

となるから，$(p, \beta p)$が$p_1'y(p_1, p_2)=0$の正則点であるという上記の条件は$[y'+p'D_1y \quad p'D_2y]$が$(p, \beta p)$において非ゼロになることにひとしく，この条件自体は仮定A. 7からただちに保証される。というのは，$[y'+p'D_1y \quad p'D_2y]\neq 0$となるには$p'D_2y\neq 0$であれば十分であるが，事実もし$p'D_2y=0$であったとすれば$|D_2y|=0$となって，A. 7に矛盾するからである。

Q_Rの$(p, \beta p)$における接空間を簡単に$T_q(Q_R)$と書けば，それが（9.2）を満たす(p_1, p_2)ばかりから成ることはいうまでもない。いまワルラス法則をp_1で微分し，その結果を$(p, \beta p)$で評価すれば，明らかに

$$y'+p'D_1y+\beta p'D_1z=0$$

という式が得られるから，$T_q(Q_R)$はまた

$$p'[-\beta D_1z \quad D_2y]\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}=0 \tag{9.3}$$

を満たす(p_1, p_2)から成るということもできよう。ここで左辺のベクトル$p'[-\beta D_1z \quad D_2y]$は前稿

(45) Guillemin and Pollack, *op. cit.*, p. 21, 三村訳，p. 26。

でも見たように行列 G がもつ1という固有根に対応する左の固有ベクトルであり，(9.3) からはそれが $T_q(Q_R)$ と直交することが知られるのである。

このような Q_R の性質を考慮に入れた上で，以下当面の問題の推理考察をつぎのように進めていくことにしよう。目下の場合，初期価格ベクトルは均衡条件 $z^0(0, p_1)+y(p_1, p_2)=0$ を満たさなくてはならないので，そのような (p_1, p_2) の集合を

$$Q_I=\{\, q_1 \in R^{2l}_{++} \mid z^0(0, p_1)+y(p_1, p_2)=0 \,\}$$

と記し，

$$\widetilde{Q}=Q_I \cap Q_R$$

と定義する。すると $m \neq 0$ の場合とアナロガスに，$\widetilde{Q} \cap W_s$ すなわち $Q_I \cap (Q_R \cap W_s)$ の次元を明らかにする仕事がつづくプログラムの眼目となる。

まず上の定義から Q_I は R^{2l} のなかで $l-1$ 個の独立な方程式を満たす q_1 の集合であるから，その次元は

$$\dim Q_I=2l-(l-1)=l+1$$

である。

ついで $Q_R \cap W_s$ の部分についてみると，いうまでもなく

$$\dim(Q_R \cap W_s)=\dim(T_q(Q_R) \cap T_q(W_s))$$

であり，ここで $T_q(Q_R)$ については前記のように (9.3) から

$$T_q(Q_R)=\left\{\, (p_1, p_2) \in R^{2l} \mid p'[-\beta D_1 z \quad D_2 y] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}=0 \,\right\}$$

で，

$$p'[-\beta D_1 z \quad D_2 y]G=p'[-\beta D_1 z \quad D_2 y]$$

となっている。いま上式を若干書き換えて

$$\beta p'[-\beta D_1 z \quad D_2 y]\frac{1}{\beta}G=\frac{1}{\beta}\beta p'[-\beta D_1 z \quad D_2 y]$$

とし，$\beta p'[-\beta D_1 z \quad D_2 y]=\mu$ とおけば

$$\mu\frac{1}{\beta}G=\frac{1}{\beta}\mu$$

となるから，μ が $(1/\beta)G$ の固有根 $1/\beta$ に対応する左の固有ベクトルであり，$T_q(Q_R)$ はそれに直交するベクトルばかりから成っていることになる。たとえば $(1/\beta)G$ の $2l$ 個の固有根を $\alpha_0, \alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_{2l-1}$，ここで $\alpha_0=1/\beta$，それらに対応する固有ベクトルを $v_0, v_1, \cdots\cdots, v_{2l-1}$ と書き，後者から任意に v_1 を選んで，それを前の式の右から掛けてみると

$$\mu\alpha_0 G v_1=\alpha_0\mu v_1,$$

他方 $\alpha_0 G v_1=\alpha_1 v_1$ であるところから

$$\mu\alpha_0 G v_1=\mu\alpha_1 v_1=\alpha_1\mu v_1$$

となるから，

$$\alpha_0\mu v_1=\alpha_1\mu v_1$$

で，しかも別根の仮定から $\alpha_0\neq\alpha_1$ であるので，

$$\mu v_1=0$$

とならざるをえない。つまり任意に v_1 を選べば，それはかならず μ と直交し，したがって $v_1\in T_q(Q_R)$ ということになる。同様のことがほかのどの $v_i(i>1)$ を選んでもいえるから，結局 $v_1, \cdots\cdots, v_{2l-1}$ のすべてが $T_q(Q_R)$ に含まれることが分かるのである。

一方 $T_q(W_s)$ は V_s にひとしく，V_s は v_0 と $v_1, \cdots\cdots, v_{2l-1}$ のうち安定な固有根に対応するベクトルばかりから張られる部分空間である。そして上に示したところから，v_0 を別として α_i が単位円内に入るような v_i すなわち $T_q(W_s)$ に含まれる v_i はすべて $T_q(Q_R)$ に含まれることが分かっている。残る v_0 そのものをどう扱うかについては，目下の場合 $\beta<1$，$\beta>1$ の二つのケースがあるので，それらをつぎのように分けて考えるのが望ましい。

(a)　$\beta<1$ すなわち $1/\beta>1$ のケース。この場合は α_0 は不安定根となるので，それに対応する v_0 が $T_q(W_s)$ を張るベクトルに入ってくることはない。よっていま α_0 以外の固有根で単位円内に含まれるものの個数を $\bar{l}_s$ とすれば，この場合は $\dim W_s=\bar{l}_s$，したがって当然 $\dim T_q(W_s)=\bar{l}_s$ で，しかも上記のところから $T_q(W_s)\subseteq T_q(Q_R)$ となる。このことから

$$\dim(T_q(W_s)\cap T_q(Q_R))=\bar{l}_s,$$

ゆえに

$$\dim(Q_R\cap W_s)=\bar{l}_s$$

という帰結を得る。

(b)　$\beta>1$ すなわち $1/\beta<1$ のケース。この場合はケース（a）と違って α_0 は安定根となり，$T_q(W_s)$ は v_0 と $\{v_1, \cdots\cdots, v_{2l-1}$ のうち α_i が単位円内に含まれる $v_i\}$ から張られることになる。いま $V_0=\{kv_0 \mid k\in R\}$，また $\widetilde{T}_q(W_s)=\{v_1, \cdots\cdots, v_{2l-1}$ のうち α_i が単位円内に入る v_i で張られる部分空間$\}$ とすれば，これは $T_q(W_s)$ が V_0 と $\widetilde{T}_q(W_s)$ の直和になることを意味している。ところが $\widetilde{T}_q(W_s)$ については前に見たように

$$\widetilde{T}_q(W_s)\subseteq T_q(Q_R) \tag{9.4}$$

となり，また $T_q(W_s)$, $\widetilde{T}_q(W_s)$ のそれぞれと $T_q(Q_R)$ の共通部分についてみれば

$$T_q(W_s)\cap T_q(Q_R)=\widetilde{T}_q(W_s)\cap T_q(Q_R) \tag{9.5}$$

となっている。(9.5) が成り立つのは，これまた前に見たように $T_q(Q_R)$ は μ と直交するベクトルばかりを含み，v_0 を含まないからである。つまり $T_q(Q_R)$ との共通部分についてみるかぎり，V_0 の部分は抜け落ちる結果となるのである。よって上記のところから

$$\begin{aligned}&\dim(T_q(W_s)\cap T_q(Q_R))\\&\overset{(9.5)}{=}\dim(\widetilde{T}_q(W_s)\cap T_q(Q_R))\overset{(9.4)}{=}\dim\widetilde{T}_q(W_s)\end{aligned} \tag{9.6}$$

という結果が導かれることになる。ところで目下の場合は $1/\beta<1$ で α_0 は安定根となるから，W_s の次元はその分が１個増えて $\dim W_s=\dim T_q(W_s)=\bar{l}_s+1$ となっている。しかし反面 $T_q(W_s)=V_0\oplus\widetilde{T}_q(W_s)$ であるところから，$\widetilde{T}_q(W_s)$ の次元は $T_q(W_s)$ のそれよりも１個少なく，したがって差し引きすればやはり

$$\dim\widetilde{T}_q(W_s)=(\bar{l}_s+1)-1=\bar{l}_s$$

となる。よって目下の場合もまた (9.6) から

$$\dim(Q_R\cap W_s)=\bar{l}_s$$

という帰結を得，これで $\beta<1, \beta>1$ のいかんにかかわりなく $Q_R\cap W_s$ の次元は $\bar{l}_s$ となることが確認できた。

そこで以上の諸結果を総合すれば，

$$\begin{aligned}&\dim(\widetilde{Q}\cap W_s)=\dim(Q_I\cap(Q_R\cap W_s))\\&=(l+1)+\bar{l}_s-2l\\&=\bar{l}_s+1-l\end{aligned}$$

ということになり，$m\neq0$ の場合と同様 (1) $\bar{l}_s+1-l<0$ ならば，局所安定な均衡経路は存在せず，

(2) $\bar{l}_s+1-l=0$ ならば，それは1本のみ存在して確定的であり，(3) $\bar{l}_s+1-l>0$ ならば，それは無数に存在しえて不確定的となる，という結論が導かれるのである。

上記の帰結が生成的に妥当することも，前の場合とまったく同様である。

よって前節の定理5とアナロガスに，つぎの定理が成立する。

定理6　実質的な場合，局所安定な均衡経路があるためには，$\bar{l}_s \geqq l-1$ となっているのでなくてはならい。ここで等号が成立すれば，均衡は確定的，不等号が成立すれば，均衡は不確定的である。そしてこの帰結は全経済空間において開稠密な集合を形成するどんな経済についても妥当する。

10

以上本稿で考察してきた均衡の確定性・不確定性は，前稿で論じたパレート最適性と何らかの対応関係をもつであろうか。この問いへの答はノーである。たとえば前稿定理3で述べたように，$\beta \leqq 1$ であれば当該恒常状態の近傍から出発する均衡の列はすべてパレート最適となるが，いま実質的恒常状態の場合を考えて $\beta<1$ とした場合，その近傍に名目的初期条件をもつ均衡経路は決してそこに収束しないという含意をもつものの，$\bar{l}_s$ そのものに対してはいかなる制約を課するわけではない。よってその経路が確定的となる場合も不確定的となる場合もまったく可能なのである。他方 $\beta>1$ であれば，収束する均衡列はすべてパレート最適にはならないが，やはり均衡のタイプが確定的になるか不確定的になるかはその事実によって左右されるところがない。こうして多数財から成る重複世代経済においては，均衡の効率性・不効率性と確定性・不確定性とのあいだでどのような組み合わせも可能であり，不効率性を不確定性に結びつけることはできないのである。(この稿つづく)

(名誉教授)