Title	総需要関数の連続性と競争均衡の局所的非決定性について
Sub Title	A local indeterminancy of competitive equilibria with continuous demand functions
Author	中村, 慎助(Nakamura, Shinsuke)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2001
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.94, No.3 (2001. 10) ,p.539(165)- 542(168)
JaLC DOI	10.14991/001.20011001-0165
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20011001-0165

「三田学会雑誌」94巻3号（2001年10月）

研究ノート

総需要関数の連続性と競争均衡の局所的非決定性について[1]

中 村 慎 助

1．序 論

本稿の目的は，総需要関数が連続な場合に，競争均衡価格の局所的一意性がどの程度の一般性を持つかを明らかにすることにある。均衡の局所的一意性は，どの均衡が実際に実現するかを予見するために必要な条件であり，特に比較静学を行う場合に重要となる。

Debreu (1970) において彼は，総需要関数が連続微分可能な場合，競争均衡価格が局所的に一意になるような経済の集合が，開集合かつ稠密[2]であることをサードの定理を用いて証明した。いわば，彼はその一意性が，例外的な場合を除いて殆どすべての場合に成立することを示したのである。この際，彼が取り扱った経済の集合は初期賦存量の集合であった。

それでは，需要関数の微分可能性はどの程度強い仮定であろうか。例えば通常の競争均衡の存在証明においては需要関数の連続性は要請されるが，微分可能性は認められていない。Katzner (1970) は効用関数が2階連続微分可能でありながら，その導出する需要関数がすべての点において微分不可能な例を提示した。すなわち，需要関数の微分可能性は通常考えられているよりずっと強い仮定なのである。

それに対して Dierker and Dierker (1972) は総需要関数が微分可能であるとは限らず，単に連続な場合にも，競争均衡価格が局所的に一意になるような経済の集合が稠密であることを証明した。しかしながら，この結果は次の2つの意味で Debreu (1970) の結果に対

（1） 本稿のオリジナルなアイデアは Pennsylvania State University の James S. Jordan 教授との会話による。「経済の数理解析」セミナーにおいては，本塾経済学部川又邦雄教授，丸山徹教授，矢野誠教授，須田伸一教授，商学部小宮英敏教授より貴重なコメントをいただいた。又，本誌匿名の審査者のコメントに感謝する。

（2） 開集合，稠密集合等の定義は丸山（1980）を参照。

応していない。即ち，

(1) 取り扱われている経済が初期賦存量と需要関数の集合である。従って，初期賦存量変化だけを考えて稠密であることを証明するよりも弱い定理となっている。
(2) 競争均衡価格が局所的に一意になるような経済の集合が開集合であることを証明していない。しかしながら，ある集合が稠密である場合に，その集合が開集合であるかどうかは重要な条件である。[3]

そこで本稿においては，初期賦存量の変化だけを考えて，競争均衡価格が局所的に一意になるような経済の集合が，一般的には開集合にはならないことを示す。従って，Dierker and Dierker (1972) のように需要関数の連続性だけを仮定すると，厳密な意味で Debreu (1970) の結果に対応する結果は成立し得ないことを証明する。

そのために次節以降において，競争均衡価格が無限になる，いわば「非決定となる」ような経済の集合が稠密になる例を提示することとする。

2．数学的準備：カントール関数

本節においては，数学的な準備としてカントール関数を導入する。[4] カントール関数 ϕ とは，区間 $[0, 1]$ から $[0, 1]$ への関数であって次の性質を持つものである。

(i) ϕ は連続である。
(ii) ϕ は全射である。
(iii) ϕ は非増加である。
(iv) 局所的に一定（constant）となるような値の集合が $[0, 1]$ 上で稠密である。

この関数は以下のように作っていくこととなる。

まず，図1の様な関数を考える。

次に，一定でない部分をまた 1/3 ずつに分け，中央を一定となるようにする。すなわち図2となる。

更に，この作業を無限に繰り返し，極限をとったものが所望のカントール関数である。

次に，このカントール関数を総需要関数として用いるために，その定義域と値域を正象

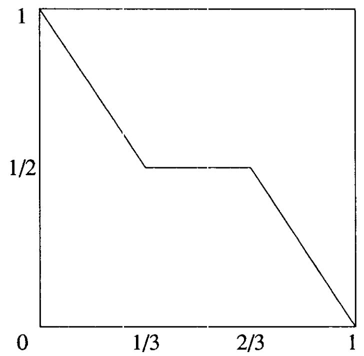

図1

(3) 例えば，実数の集合において有理数の集合は稠密ではあるが，通常非常に小さな集合であると考えられている。
(4) 厳密な説明については，例えば Kuratowsky (1961) を参照。

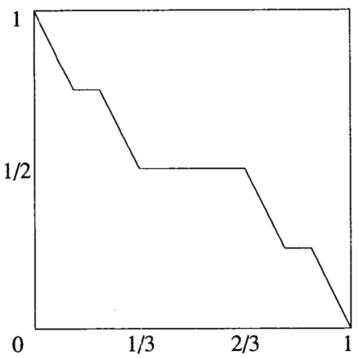

図 2

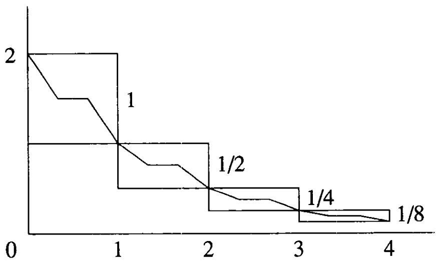

図 3

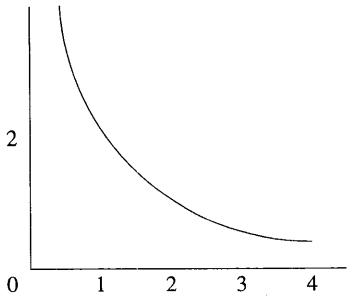

図 4

限全体に拡張する。まず，定義域を正象限全体とするために，図 3 の様にボックスの高さを 1/2 にしながら，順番につなげていくこととする。

最後に，値域を正象限全体とするために，$\tan[(t-1)\pi/2]$ を合成し，図 4 の曲線を得る。

このようにしてでき上がったカントール型の関数 ψ においても，局所的に一定な値の集合 C が稠密であることに注意する。

3．総需要関数としての カントール型関数 ψ

ψ を総需要関数と見なすために，個別の逆需要対応を

$$T(x)\equiv(\psi/2)^{-1}(x)$$

と定義する。

すると Rockafellar (1970) により，正象限全体を定義域とし，凹かつ上半連続な関数 v で

$$\partial v=T$$

すなわち，T が v の劣微分となるものが存在する。

そこで 2 者 2 財の純粋交換経済として，各消費者 $i(i=1,2)$ が準線形の効用関数

$$u_i(x_i, y_i)=v(x_i)+y_i$$

と，初期保有量

$$(\omega_i^x, \omega_i^y)\in R^2_{++}$$

を持つ経済を考えることとする。

すると x 財の個別需要関数は，

$$\begin{aligned} f_i^x(p)&=\{x\in R_{++}|p\in\partial v(x)\} \\ &=\{x\in R_{++}|p\in T(x)\} \\ &=\{x\in R_{++}|p\in(\frac{1}{2}\psi)^{-1}(x)\} \\ &=\frac{1}{2}\psi(p) \end{aligned}$$

となる。

従って，x 財の総超過需要関数は

$$f^x(p)\equiv f_1^x(p)+f_2^x(p)-\omega_1^x-\omega_2^x$$
$$=\psi(p)-\omega_1^x-\omega_2^x$$

となることとなる。

従って,

$$\Omega\equiv\{(\omega_1,\ \omega_2)\in R_{++}^4|\omega_1^x+\omega_2^x\in C\}$$

と書くと，Ω は稠密な経済の集合であって，その上で第２財の価格を１に正規化した競争均衡価格は無限となる，すなわち局所的に一意にならないことが分かるのである。

最後に，Ω はルベーグ測度０であることに注意する。(5) 通常の準凹な効用関数の場合に，競争均衡価格が無限となるような経済の集合がどのような条件の下でルベーグ測度０となるかは，今後の課題であろう。

（経済学部教授）

参考文献

1．Debreu, G., “Economies with a Finite Set of Equilibria”, *Econometrica* 38, 1970
2．Dierker, E. and H. Dierker, “The Local Uniqueness of Equilibria”, *Econometrica* 40, 1972
3．Katzner, D. W., “A Note on the Differentiability of Consumer Demand Functions”, *Econometrica* 36, 1970
4．Kuratowsky, K. *Introduction to Set Theory and Topolgy*, Pergamon Press, 1961
5．Rockafellar, R. T., “On the Maximal Monotonicity of Subdifferential Mappings”, *Pacific Journal of Mathematics* 33, 1970
6．丸山徹，函数解析学，慶應通信，1980

(5)　矢野誠教授より，一般に凹関数は殆ど至る所微分可能なので，本稿で考えられているような準線形型の効用関数の場合には必ず，競争均衡価格が無限になるような経済の集合はルベーグ測度０であるとの御指摘を頂いた。