「三田学会雑誌」94巻3号（2001年10月）

均衡と時間 II

——重複世代モデルの場合*——

福岡正夫

1

前稿[(1)]では有限数の取引主体がそれぞれ無限期の計画期間をもつ交換経済のモデルを設定して，その種の無限次元モデルが提起するいくつかの問題点を究明かつ解決することを主眼とした。そこでも予告したように，転じて本稿では，アレやサミュエルソンを先蹤とする[(2)]いわゆる重複世代モデル（overlapping generations model）を対象とし，それに同様の分析を加えることによって，両者で通時的均衡のあり様（よう）がどのように違ってくるかを検討してみることにしたい。[(3)]

重複世代モデルでは前稿のモデルと異なってすべての取引主体が有限の寿命をもっており，自分たちのライフ・スパンにわたってのみ需給計画を立てると想定される。経済は，順次に生まれかつ

＊ 本稿の執筆にさいしても，筆者は前稿の場合と同様，須田伸一教授から多大の有益な教示を受けた。同教授ならびにいくつかの点で改善を示唆された匿名査読者に対して，心から謝意を表しておく次第である。

（1） 福岡正夫「均衡と時間 I ——有限主体・無限計画期間のモデルの場合」，『三田学会雑誌』2001年1月号。

（2） M. Allais, *Economie et Intérêt*, 1947. P. A. Samuelson, "An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money", *Journal of Political Economy*, December 1958, reprinted in J. E. Stiglitz ed., *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, Vol. I, 1966.

（3） 重複世代モデルについては，以降ゲイル，バラスコ＝シェル，ジーナコプロス，ウッドフォード，グランモン等々を含め，きわめて多くの文献が現れている。本稿を記すにあたっては，とりわけつぎの諸論文に負うところが大きかった。

T. J. Kehoe, "Intertemporal General Equilibrium Models", in F. Hahn ed., *The Economics of Missing Markets, Information and Games*, 1989, T. J. Kehoe and D. K. Levine, "Comparative Statics and Perfect Foresight in Infinite Horizon Economies", *Econometrica*, March 1985, *ditto*, "Regularity in Overlapping Generations Exchange Economies", *Journal of Mathematical Economics*, April 1984.

死ぬことによって入れ替り立ち替り現れる各世代の主体から成り，それらの世代が交替することで限りなく継続されていくと考えるのである。以下では議論の簡単化のため，すべての世代をつうじて主体の人数は同数であり，また彼らの生命の長さも一律に同じであると想定する。いまそのような生存期間を前半期すなわち「若年期」（“young”）と後半期すなわち「老年期」（“old”）の2期に区切るとすれば，毎期の経済はその期の期首に生まれさらにもう1期生き延びる若年期の主体と，すでに人生の半ばを過ぎ今期末には死を迎える老年期の主体の2世代によって半々に構成されることになる。

このような経済についてとりわけ注目すべきは，それがつぎの諸点で前稿のモデルとはいちじるしく相異なった性格をもっていることである。まず一つには，この経済では世代の新陳代謝が永遠に繰り返されるところから，主体の総数もまた可付番の無限個にならざるをえない。またもう一つには，各世代の主体がそれぞれ有限期間しか生きられないところから，彼らの全員が一堂に会して同時に取引に参加することは許されない。というのは，すでに死んでしまった個人とか，あるいはまだ生まれていない個人とかと取引する機会をもつのは，明らかに不可能だからである。

2

上記のようなこのモデルの含意を念頭におきつつ，ここでその精確な定式化にとりかかることにしよう。当該の経済は過去から存続しているが，いまわれわれの考察を始める期を第1期とし，以降各期 $t=1,2,\cdots\cdots$ にわたって限りなく継起的に展開されていくものとする。モデルに登場する各取引主体はどの期の期首に生まれたかに応じて，誕生期の世代番号 $t=0,1,2,\cdots\cdots$ をもっているが，2期間にわたってのみ生きることができ，したがって世代0の主体は別として一般に世代 $t=1,2,\cdots\cdots$ の主体は第 t 期の期首に現れて，第 t 期と第 $t+1$ 期の取引に参加する。彼らがそれぞれの期に消費できる財の種類は前稿どおり l 種類とし，ただそれらはすべて非耐久財（perishable commodity）であって，つぎの期までは持越しがきかないと仮定する。しかし，この経済には，上記の財のほかにそれ自体は効用をもたないが次期まで持越し可能な財として貨幣が存在していると仮定される。

各世代は一般に n 人の相異なるタイプの取引主体から成るものとする。それぞれの主体はその消費可能集合，効用関数および財の初期賦存量ベクトルによって特徴づけられるが，これらもまた議論を簡単にするために世代間では同一であると仮定することにしよう。つまり同じ世代は複数の相異なるタイプの主体から成りうるが，彼らの特性は世代番号 $t=0,1,2,\cdots\cdots$ からは独立であるとされるのである。したがってこの経済では，つねに新旧同じタイプの人間が繰り返し再生産されていくことになる。(4)

こうした想定により，まず各主体の消費可能集合は，世代0の主体についてのみは X_i^0 と特記す

るが，一般に世代1以降の主体については X_i^t の t を省いて X_i と記してよいことになる。以下ではさらに事態を単純化して，$X_i^0=R_{++}^l$，$X_i=R_{++}^{2l}$ と考えれば足りるであろう。

つぎにすべての世代 t について，主体 i による第 s 期の財 k の消費量を x_{kis}^t と書き，

$$x_{is}^t=(x_{1is}^t, x_{2is}^t, \cdots\cdots, x_{lis}^t)$$

と定義すれば，世代 t の主体 i の消費計画は世代0と世代1以降のそれぞれの場合について

$$x_i^0=x_{i1}^0$$
$$x_i^t=(x_{it}^t, x_{i,\,t+1}^t) \quad t=1, 2, \cdots\cdots,$$

のようにあらわされる。各主体はこれらの消費計画に対して，上記の消費可能集合上で定義される効用関数をもち，それらは世代0の主体については $u_i^0: R_{++}^l \to R$ によって，世代1以降の主体については $u_i: R_{++}^{2l} \to R$ によってあらわされる。地方，各主体の初期賦存量ベクトルもまた前記の想定により世代番号 t からは独立であり，世代0の主体については $\omega_i^0=\omega_{i,\,\mathrm{old}}^0=(\omega_{1i,\,\mathrm{old}}, \omega_{2i,\,\mathrm{old}}, \cdots\cdots, \omega_{li,\,\mathrm{old}})$ によって，世代1以降の主体については $\omega_i=(\omega_{i,\,\mathrm{young}}, \omega_{i,\,\mathrm{old}})=(\omega_{1i,\,\mathrm{young}}, \omega_{2i,\,\mathrm{young}}, \cdots\cdots, \omega_{li,\,\mathrm{young}}, \omega_{1i,\,\mathrm{old}}, \omega_{2i,\,\mathrm{old}}, \cdots\cdots, \omega_{li,\,\mathrm{old}})$ によってあらわされる。

そのほか世代0の主体は第1期の期首に m_i^0 と記される外部貨幣の初期ストックをもつと仮定される。ここで m_i^0 は正，負，ゼロいずれの符号をもとりうるとされるが，もしそれが非負であれば，もっとも自然に名目貨幣のストックであると解することができよう。が，もしそれが負であったとしても，そのことを正当づける制度的解釈はいろいろと可能である。たとえば若年期の主体にローンを貸与し，彼が老年期になったときにその返済を受ける機関があると考えれば，m_i^0 は利子を含めたその返済額に当たると解すればよい。ただしその場合，借入れ額は当然老年期の財賦存量価値額によって制約されると考えるのが適切であろう。

いずれにせよこのモデルでは資産が後世代に遺贈されることがないので，世代1以降の主体の賦存量には正負のいかんにかかわらずこの種の資産が含まれることはない。

さて前記の効用関数と財の初期賦存量ベクトルについては，以下前稿に準じてつぎのような仮定を設けることにする。

A. 1　u_i^0 は R_{++}^l を，u_i は R_{++}^{2l} を定義域とし，それぞれ C^2 級で，単調かつヘッセ行列がどの点においても負値定符号。

A. 2　ω_i^0 および ω_i は厳密に正。

---

(4)　これは基本的与件いわゆるファンダメンタルスの定常性を仮定するということであって，その下で生成される変数の均衡値がかならず定常値をとると仮定することではないから，注意されたい。以下で見るように，このモデルの均衡価格の時系列は実にさまざまな非恒常的パターンをとりうるのである。

A. 3　$x^0 \in \partial R^l_+ \backslash \{0\}$ のような x^0 について $x_i^{0\nu} \to x^0$ とするとき，$\|Du_i^0(x_i^{0\nu})\| \to \infty$。

　またx $x \in \partial R^{2l}_+ \backslash \{0\}$ のような x について $x^{t\nu} \to x$ とするとき，$\|Du_i(x_i^{t\nu})\| \to \infty$。

つぎに市場については各期ごとに現物市場が開かれ，そこで各財のその期の現物価格が決定されると考える。いま現在まで割り引いた各期の現物価格ベクトルを

$$p_t = (p_{1t}, p_{2t}, \cdots\cdots, p_{lt}) \in R^l_{++}, \quad t = 1, 2, \cdots\cdots$$

で記すことにすれば，時間をつうじての価格ベクトルの列は

$$p = (p_1, p_2, \cdots\cdots, p_t, p_{t+1}, \cdots\cdots)$$

としてあらわされる。それらは前稿の場合と同様，すべての主体によって正しく予想されると仮定する。

世代 0 の主体は，考察が始まる第 1 期にすでに後半生の老年期にあり，所与の $p_1 \in R^l_{++}$, $\omega_i^0 \in R^l_{++}$, $m_i^0 \in R$ の下で，プログラム

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & u_i^0(x_i^0) \\ \text{subject to} & p_1' x_i^0 \leqq p_1' \omega_i^0 + m_i^0 \\ & x_i^0 \in R^l_{++} \end{array}$$

にしたがった最大化行動をとると想定される。前記の仮定の下ではこのプログラムの解はかならず一意の内点解となるから，その結果すべての $p_1 \in R^l_{++}$ に対して財の需要関数が $x_i^0 = h_i^0(p_1, m_i^0)$ として確定し，それを用いて超過需要関数が $z_i^0(p_1, m_i^0) = h_i^0(p_1, m_i^0) - \omega_{i,\,\text{old}}^0$ のように定義される。そこでそれらを主体 i について集計し，m_i^0 の分配パラメターを $m^0 = (m_1^0, m_2^0, \cdots\cdots, m_n^0)$ と記せば，社会的超過需要関数が

$$z^0(p_1, m^0) = \sum_{i=1}^{n} z_i^0(p_1, m_i^0)$$

のように導かれることになる。

他方，世代 1 以降の主体の行動は，所与の $(p_t, p_{t+1}) \in R^{2l}_{++}$, $\omega_i \in R^{2l}_{++}$ の下で，プログラム

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & u_i(x_{it}^t, x_{i,\,t+1}^t) \\ \text{subject to} & p_t' x_{it}^t + p_{t+1}' x_{i,\,t+1}^t \leqq p_t' \omega_{i,\,\text{young}} + p_{t+1}' \omega_{i,\,\text{old}} \\ & (x_{it}^t, x_{i,\,t+1}^t) \in R^{2l}_{++} \end{array}$$

を解くこととしてあらわされ[(5)]，やはりその解は一意の内点解となる。そこですべての $(p_t, p_{t+1}) \in R^{2l}_{++}$ に対して需要関数 $x_{it}^t = h_{it}(p_t, p_{t+1})$, $x_{i,\,t+1}^t = h_{i,\,t+1}(p_t, p_{t+1})$ が確定されるから，世代 0 の場合に準じて超過需要関数を若年期については $y_i(p_t, p_{t+1}) = h_{it}(p_t, p_{t+1}) - \omega_{i,\,\text{young}}$ のように，老年期

については $z_i(p_t, p_{t+1})=h_{i,\,t+1}(p_t, p_{t+1})-\omega_{i,\,\text{old}}$ のように定義すれば，社会的超過需要関数が若年期，老年期のそれぞれについて

$$y(p_t, p_{t+1})=\sum_{i=1}^{n} y_i(p_t, p_{t+1})$$
$$z(p_t, p_{t+1})=\sum_{i=1}^{n} z_i(p_t, p_{t+1})$$

として導き出される。

前記の仮定の下では，陰関数の定理によりこれらの超過需要関数 z^0 は (p_1, m^0) に関して，z と y は (p_t, p_{t+1}) に関してそれぞれ連続微分可能となることが保証される。またA. 1の単調性の仮定から各主体の予算制約式はかならず等式で満たされるから，ワルラス法則として知られるつぎの恒等式

$$p_1' z^0(p_1, m^0)=m \qquad \text{ここで } m=\sum_{i=1}^{n} m_i^0 \tag{2.1}$$

および

$$p_t' y(p_t, p_{t+1})+p_{t+1}' z(p_t, p_{t+1})=0 \qquad \text{for} \quad t=1,\ 2, \cdots\cdots \tag{2.2}$$

がそれぞれ成立する。さらに z^0 は (p_1, m^0) に関して，z と y は (p_t, p_{t+1}) に関して，それぞれ0次の同次関数となる。

ここで上述の諸性質にさらに加えて，各超過需要関数がつぎのような境界条件をも満たすことに注目しておこう。すなわち z^0 については

$p\in\partial R_+^l\backslash\{0\}$ のような p について $p_1^\nu\to p$ とするとき，$\|z^0(p_1^\nu, m^0)\|\to\infty$，かつすべての $p_1\in R_{++}^l$ に対して z^0 は下から有界

というのがそれであり，また y，z については $q_t=(p_t, p_{t+1})$ と略記するとして

$q\in\partial R_+^{2l}\backslash\{0\}$ のような q について $q_t^\nu\to q$ とするとき，$\|y(q_t^\nu), z(q_t^\nu)\|\to\infty$，かつすべての $q_t\in R_{++}^{2l}$ に対して (y, z) は下から有界

というのがそれである。事実いまかりに帰結に反して上記の $\|z^0(p_1^\nu, m^0)\|$ や $\|y(q_t^\nu), z(q_t^\nu)\|$ の部分列が収束したとすれば，A. 1の単調性の仮定から，価格が0に近づく財のうちどれかへの需要が

（5） 各期 t の割り引かない現物価格ベクトルを $\hat{p}_t$ と書き，また t と $t+1$ のあいだの利子率を r_t と書けば，上記プログラムの予算制約式は元来

$$\hat{p}_t' x_{it}^t+m_{it}^t\leqq\hat{p}_t'\omega_{i,\,\text{young}}$$
$$\hat{p}_{t+1}' x_{i,\,t+1}^t\leqq\hat{p}_{t+1}'\omega_{i,\,\text{old}}+(1+r_t)m_{it}^t$$

のように定式化される。これらの両辺をそれぞれ $(1+r_1)(1+r_2)\cdots\cdots(1+r_{t-1})$ および $(1+r_1)(1+r_2)\cdots\cdots(1+r_t)$ で割って足し合わせ，$p_t=(1+r_1)(1+r_2)\cdots\cdots(1+r_{t-1})\hat{p}_t$ という関係を考慮すれば，本文の予算制約式を得ることができる。

限りなく増えることになるので，矛盾が生じるのである。他方，消費可能集合が正象限とされており，初期賦存量ベクトルが所与とされているところから，z^0 および y，z が下から有界となることは自明であろう。

財市場の需給均衡の条件は，これらの超過需要関数を用いて，第1期については

$$z^0(p_1, m^0)+y(p_1, p_2)=0 \tag{2.3}$$

第 t 期 $(t=2, 3, \cdots\cdots)$ については

$$z(p_{t-1}, p_t)+y(p_t, p_{t+1})=0 \tag{2.4}$$

として定式化される。これらをことごとく満たす財価格の列 $p=(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_t, \cdots\cdots)$ が，この経済の競争均衡である。

(2.1) と (2.3) から $-p_1'y(p_1, p_2)=m$ となり，ふたたびワルラス法則 $p_1'y(p_1, p_2)+p_2'z(p_1, p_2)=0$ と均衡条件 $z(p_1, p_2)+y(p_2, p_3)=0$ から $-p_2'y(p_2, p_3)=m$ となるから，以下同様の推論をつうじてすべての t について $-p_t'y(p_t, p_{t+1})=m$ となることが分かる。すなわちこのモデルではどの期にも同額の m が若年期の純財蓄となり，それが老年期になったときの消費への請求権を与えるのである。

ところである $p\in R_{++}^l$ とある $\beta\in R_{++}$ について $p_t=\beta^{t-1}p$ となっていて，均衡条件 (2.4) が

$$z(\beta^{t-2}p, \beta^{t-1}p)+y(\beta^{t-1}p, \beta^t p)=0$$

の形，あるいは同じことになるが[6]

$$z(p, \beta p)+y(p, \beta p)=0 \tag{2.5}$$

の形で満たされるときには，そのような $(p, \beta p)$ をこの経済の恒常状態 (steady state) と呼ぶ。ここで β は，r を利子率の恒常値とするとき，割引率 $1/(1+r)$ を意味すると解することができよう[7]。

恒常状態には，それが $m\neq 0$ の条件下で成り立つ場合と $m=0$ の下で成り立つ場合の二つがあり，それらを分けて論じるのが以下では有意義である。そこでそのそれぞれに対して名目的恒常状態 (nominal steady state) ならびに実質的恒常状態 (real steady state) の名を与え，その呼び方で両者

---

(6) z, y が (p_t, p_{t+1}) に関して0次同次であることによる。

(7) p_t が割り引かれた価格として定義されていることに注意。割り引かない価格 $\hat{p}_t$ の恒常状態は，いうまでもなく $(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3, \cdots\cdots, \hat{p}_t, \hat{p}_{t+1}, \cdots\cdots)=(\hat{p}, \hat{p}, \hat{p}, \cdots\cdots, \hat{p}, \hat{p}, \cdots\cdots)$ である。定義から $p_1=\hat{p}_1$, $p_t=\beta^{t-1}\hat{p}_t$, $\hat{p}_t=\hat{p}$ for all t であるから，$p_t=\beta^{t-1}p$ for all t となり，したがって p_t の恒常状態は $(p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots, p_t, p_{t+1}, \cdots\cdots)=(p, \beta p, \beta^2 p, \cdots\cdots, \beta^{t-1}p, \beta^t p, \cdots\cdots)$ となる。

を区別していくことにしよう。[8] するとまず名目的恒常状態の場合には，前記の議論から，かならず $\beta=1$ とならねばならないことがすぐ分かる。事実，前に見たように $-p_t'y(p_t, p_{t+1})=m$ であるから，恒常状態では $-\beta^{t-1}p'y(\beta^{t-1}p, \beta^t p)=m$ すなわち $-p'y(p, \beta p)=m$ であり，均衡条件（2.5）から，これは $p'z(p, \beta p)=m$ であることをも意味している。ところが他方ワルラス法則 $p'y(p, \beta p)+\beta p'z(p, \beta p)=0$ から $\beta p'z(p, \beta p)=m$ でもあるから，$\beta m=m$ すなわち $(\beta-1)m=0$ とならねばならず，よって $m\neq0$ であれば $\beta=1$ となるほかはない。

一方，実質的恒常状態の場合には，一般には $\beta\neq1$ であり，$\beta=1$ となるのは稀有な偶然の事態にすぎない。というのはこの場合，もし $\beta=1$ であれば（2.5）と前記の $-p'y(p, \beta p)=m$ の式から

$$\begin{aligned} z(p, p)+y(p, p)&=0 \\ -p'y(p,p)&=0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

とならねばならないからである。ここで最初の l 個の方程式はワルラス法則によって実質的には $l-1$ 個の独立な方程式から成り，また p は 0 次同次性によって実質的には $l-1$ 個の独立な未知数から成っている。したがって（2.6）の全体は $l-1$ 個の未知数を含む l 個の方程式システムであり，一般にはそれは解をもたない。そこで以下では正則な経済が満たすべき条件の一つとして

A. 4　(2.6) は解をもたない。

を仮定してしまい，実質的恒常状態において $\beta=1$ となるような事態は無視して進むことにしよう。事実キーホー＝レヴァインが示しているように，A. 4 を満たす経済の集合は経済全体の空間のなかで開稠密な部分集合をなしており，したがって上記の条件はほとんどすべての経済について満たされると考えて差し支えないのである。[9]

3

前述したように，ここでの考察の目的は上記のモデルの競争的均衡解，すなわち（2.3）および（2.4）を満たす財価格の列 $p=(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_t, \cdots\cdots)$, がもつ諸性質を解明することにおかれている。

---

(8)　これはキーホー＝レヴァインの命名にしたがう。それらはかつてゲイルが黄金律恒常状態（golden rule steady state），均斉恒常状態（balanced steady state）と呼んだものにそれぞれ対応している。D. Gale, "Pure Exchange Equilibrium of Dynamic Economic Models", *Journal of Economic Theory*, February 1973, p. 18 および p. 32 参照。

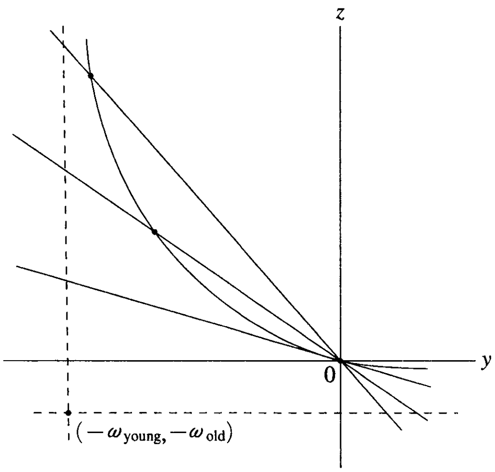
(9)　これらの議論については Kehoe and Levine, "Comparative Statics", p. 443, *ditto*, "Overlapping Generations Economies", p. 72 参照。A. 4 を満たす経済が開稠密集合となることの精確な証明については，後者の論文の p. 73, Proposition 3.1 を参照されたい。

この課題の一般的な分析に先立って，以下本節ではまず単純な $l=1$, $n=1$ という特殊事例，すなわち毎期実物財がただ１種類で，しかも各世代が１個人のみから成るスペシャル・ケースについて予備的な考察を与えておくことにする。[10] 重複世代モデルに関する論文で，これまでにもその種の事例が多く用いられてきたのは，たんにそれがもっとも簡単でとり扱いやすい事例であるばかりでなく，また重複世代モデルのもつ特性をもっとも尖鋭に示す事例でもあるからであろう。つまりこの場合には，交換はもっぱら異世代間で行われるほかはなく，さもなければ誰もがアウタルキー（自給自足）の事態に甘んずるのでなくてはならない。しかも所望の交換を実現しようとすれば，貨幣が不可欠な媒介手段とならざるをえないのである。

さてそのような単純モデルをしばらく想定するとすれば，p_t, p_{t+1} はそれぞれ一つの成分から成り，z や y もまた一つの値をとることになるから，ワルラス法則（2.2）を

$$\frac{z(p_t,\ p_{t+1})}{y(p_t,\ p_{t+1})}=-\frac{p_t}{p_{t+1}}$$

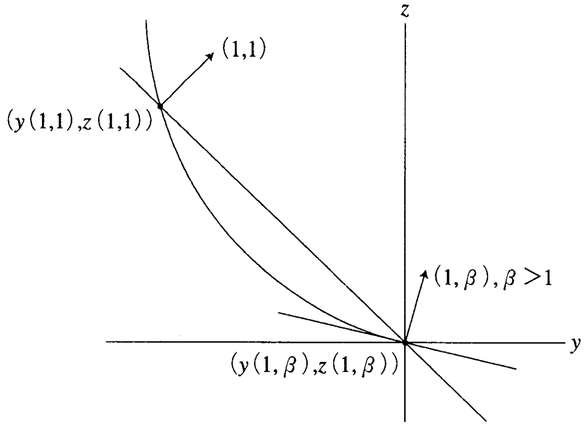
のように比の形で書きあらわすことができ，ここで右辺の価格比 $-p_t/p_{t+1}$ をさまざまに動かしたとき，そのそれぞれに応じて上記の等式を満たす $[y(p_t,\ p_{t+1}), z(p_t,\ p_{t+1})]$ の軌跡がいわゆるオファー・カーブとなる。いま対数線形の効用関数を想定してそのようなオファー・カーブを描いてみたものが第3.1図である。[11] それは図の原点を通って，つねにその第４象限と第２象限のなかに含まれ，それと勾配 $-p_t/p_{t+1}$ の直線との交点の座標が当該の価格 $(p_t,\ p_{t+1})$ の下での超過需要（超過供給）



第3.1図

(10) 以下の説明については，しばらく Kehoe, "Intertemporal Equilibrium Models", pp. 373-378 にすべてを負う。

(11) その具体的な計算については Kehoe, *op, cit.*, pp. 372-374 を参照されたい。



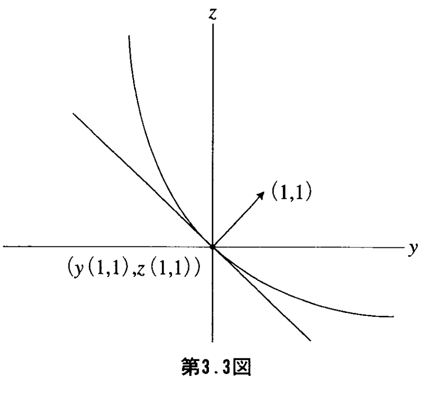
第3.2図

の組み合わせとなる。明らかに $-y<\omega_{\text{young}}$, $-z<\omega_{\text{old}}$ でなくてはならないから，オファー・カーブが図の点線の右上側に含まれることはいうまでもない。

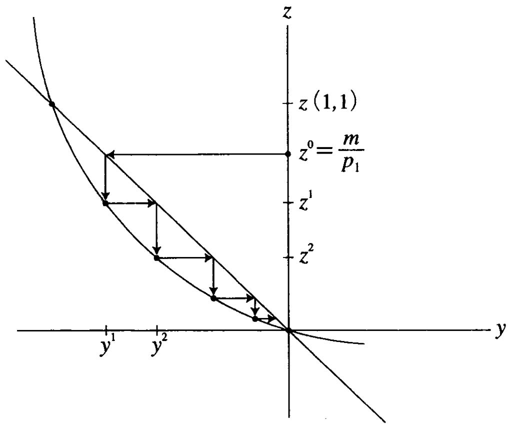
目下の単純モデルでは p はスカラであるから，0 次同次性より前節の恒常状態の条件 $z(p, \beta p)+y(p, \beta p)=0$ はいっそう簡単に $z(1, \beta)+y(1, \beta)=0$ と書くことができ，z と y の恒常値は前図の原点を通り -1 の勾配をもつ直線 $z=-y$ がオファー・カーブと交わる点の座標で与えられる。第3.2図に描かれているように，一般にはそのような恒常状態は 2 個存在し，そのうち 1 個は名目的恒常状態で $\beta=1$, もう 1 個は実質的恒常状態で $\beta\neq1$ である。(12)

これら二つの恒常状態以外の非恒常的な均衡を求めるには，まず出発点の p_1 を与え，縦軸上に $z^0(p_1, m^0)=m^0/p_1$ を定めて，そこから引いた水平線と勾配 -1 の直線とが交わる点として $y=-z^0$

(12) 第3.3図が示すように，たまたまオファー・カーブの勾配が原点で -1 となる場合には恒常状態はただ 1 個存在するにすぎず，実質的恒常状態でも $\beta=1$ となる。が，前節の末尾に記したように，そのような degenerate な事態はほとんど無視してよい。



第3.3図



第3.4図

を満たす y の値 y^1 を求める。つぎに，こんどはそこから垂線を下すことによって，それとオファー・カーブとの交点で $-p_1/p_2$ を求める。そのことによってつぎの価格 p_2 とつぎの z の値 z^1 が求められることになる。これで p_1，p_2 までが定まったので，つぎはふたたび z^1 を通る水平線と勾配 -1 の直線から $y=-z^1$ を満たす y の値 y^2 を求め，そこから垂線を下してオファー・カーブとの交点で $-p_2/p_3$ を求めれば，p_3 とつぎの z の値 z^2 が求められる。以下同様のステップを何回も繰り返していけば，第3.4図に矢印をつけて示したようなジグザグの均衡経路が求められるのである。

図から明らかなように，縦軸上で $z(1,1)$ を下回る z^0 から出発した場合には，アウタルキー恒常状態（原点）に向かって収束していく均衡経路が存在することになる。つまり目下の事態の下で名目的恒常状態を達成維持しようとすれば，当初の $m/p_1>0$ そのものを $z^0=z(1,1)$ を満たすように選ぶのでなくてはならない。他方，z^0 を $z(1,1)$ より上に選んだ場合（$m/p_1>z(1,1)>0$ のように m/p_1 が選ばれた場合）には，ますます左上方に発散していく解経路が得られ，やがてそのような経路は ω_{young} の制約にぶつかるので，それを越えて持続することができなくなる。つまりそのような経路は均衡経路にはなりえないのである。

均衡経路が存在するかぎりにおいて，価格の列は原点からオファー・カーブ上の $[y(p_t, p_{t+1}), z(p_t, p_{t+1})]$ に引いた直線の勾配から逐次的に求められていく。たとえば，いま原点と (y^1, z^1) を結べば p_1/p_2 という勾配が決まるから，出発点の p_1 の値から p_2 の値が決まり，つぎに $[y^2, z^2]$ から p_2/p_3 という勾配が決められると，p_3 の値が決まるといった具合である。こうして均衡価格の列 $[p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots, p_t, p_{t+1}, \cdots\cdots]$ が生成されていくのである。

本稿の見地からここで注目しておかねばならないのは，目下の場合これらの均衡のすべてがパレート最適になるとはかぎらないという事実である。第3.4図で $0<m/p_1<z(1,1)$ から始まる均衡の列やそれらの収束先であるアウタルキー恒常状態は，すべて $m/p_1=z(1,1)$ をもつ名目的恒常状態

に対してパレートの意味で劣位に立ち，したがってパレート最適にはなりえない。つまり世代0の個人は縦軸上で $z(1,1)$ から下に向かうほど，また世代1以降の個人は $[y(1,1), z(1,1)]$ から原点のアウタルキー状態に近づくほど，状況が悪化するのである。では $[y(1,1), z(1,1)]$ そのものがパレート最適になるかといえば，図による考察だけからは，上記の他の均衡よりパレートの意味で優越するということはいえても，まだパレート最適そのものになるかどうかは定かではない。しかし，この段階までの議論に限るとしても，重複世代モデルの場合はパレート最適にはなりえない均衡があることだけは，すでに明らかになったといってよいであろう。

実はこの種の均衡がパレート最適になるかならないかを立証する手段としては，かつてバラスコ＝シェルが開発したはなはだ便利な判別条件があり，それによれば一般に均衡価格ベクトル p_t について $\|p_t\|=(p_t'p_t)^{\frac{1}{2}}$ とするとき，$1/\|p_t\|$ の t に関する無限和 $\sum_1^\infty 1/\|p_t\|$ が ∞ となることが，パレート最適となるための必要十分条件であることが示されている(13)。目下の場合，p_t は1次元であるから，$\|p_t\|=(p_t^2)^{\frac{1}{2}}=p_t$ となり，上記の無限和は単純に

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{p_t}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\cdots\cdots$$

という形をとる。するとこの条件を利用すれば，$m/p_1=z(1,1)$ をもつ名目的恒常状態は事実かならずパレート最適となることがただちに知られ，またアウタルキー恒常状態はパレート最適にはなりえないことも容易に分かる。というのは，前者については $\beta=1$ であるところから，すべての t について $p_t=p$ となり，したがって

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{p_t}=\frac{1}{p}(1+1+1+\cdots\cdots)=\infty,$$

また後者については $\beta>1$，そして $p_t=\beta^{t-1}p$ であるところから

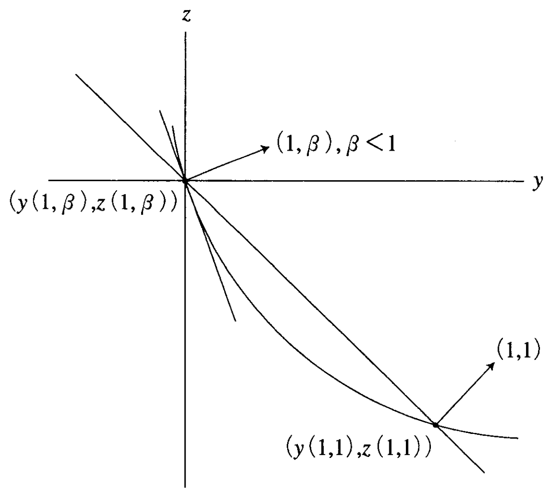
$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{p_t}=\frac{1}{p}(1+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}+\cdots\cdots)=\frac{1}{p}\frac{\beta}{\beta-1}<\infty$$

となるからである。一方，同じ条件を適用することにより，$0<m/p_1<z(1,1)$ から出発して $\beta>1$ のアウタルキー恒常状態に収束していく均衡の列もまたパレート最適にはならないことを示しうるが，この点についてはのちに一般的な多数財ケースをとり扱うさいに一括して論じるのが便利であろう。

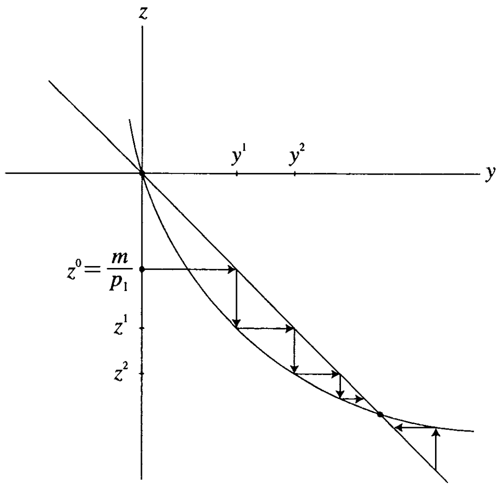
---

(13) Y. Balasko and K. Shell, "The Overlapping-Generations Model I : The Case of Pure Exchange Without Money", *Journal of Economic Theory*, December 1980, p. 297 参照。

なお J. L. Burke, "Inactive Transfer Policies and Efficiency in General Overlapping-Generations Economies", *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 16, No. 16 では，$\sum_{t=1}^{\infty}\|p_t\|^{-1}=\infty$ に代えて $\sum_{t=1}^{\infty}(p_t'\omega_t)^{-1}=\infty$ がそのための必十条件になることが示されている。この論文の p. 214 参照。



第3.5図



第3.6図

ところで以上の考察では，もっぱら $m>0$ の名目的恒常状態が成立する場合について述べてきたが，前にも触れたように，$m<0$ の名目的恒常状態が成立する場合ももちろん可能である。つまりそのような場合には，各世代の個人は若年期に借り越してその期の賦存量が与えうるより多くの消費をし，反面老年期になってからの余剰をもって次期若年者の同様な消費超過分を賄うのである。第3.5図と第3.6図は，第3.2図，第3.4図と対照的に，この種の事態が生じる場合を描いたものである。[14] ここでも名目的ならびに実質的な2個の恒常状態が存在するが，前者は第2象限にあり，また

(14)　第3.2図のケースと第3.5図のケースは，ゲイルによってそれぞれサミュエルソンのケースと古典派（とりわけフィッシャー）のケースと呼ばれたものに対応している。Gale, *op, cit.*, pp. 15-16 参照。

縦軸上で0を下回る z^0 から出発して前者に収束していく非恒常的な均衡経路がある。

こんどの場合は前の場合とは違って，$m/p_1=z(1,1)$ の名目的恒常状態 $[y(1,1), z(1,1)]$ が $m/p_1<0$ をもつ他の均衡やアウタルキー恒常均衡にパレートの意味で勝(まさ)ると主張することはできない。というのは，世代 1, 2, …… の個人にとっては右下方の均衡に移るほうがより望ましく，原点のアウタルキー恒常均衡に近づくのはより不利な事態となろうが，他方世代0の個人にとっては第3.4図の場合とは裏腹に，アウタルキー状態に近づくほうが事態をより有利化することになるからである。事実こんどの場合，アウタルキー恒常状態では前とは逆に $\beta<1$ したがって $1/\beta>1$ となっており，前記のバラスコ＝シェルの条件

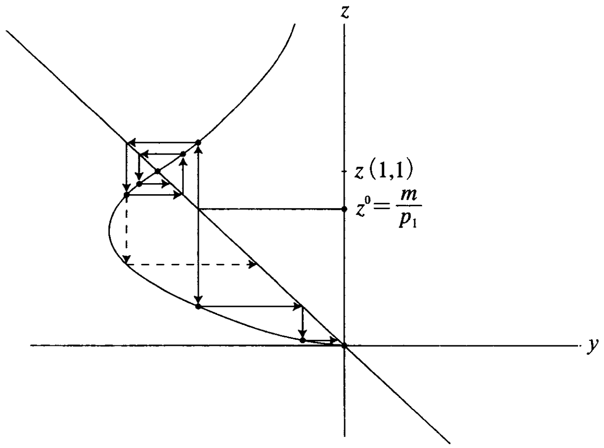
$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\cdots\cdots=\infty$$

が満たされるから，それはパレート最適である。また同様な論法で，$m/p_1<0$ の初期点から出発して $\beta=1$ の恒常均衡に収束する均衡の列もパレート最適となることを示すことができる。が，後者の点についてはやはりのちに一般的な多数財ケースをとり扱うさいに，まとめてとり上げることにしよう。

こうして重複世代モデルにおいては，名目的恒常状態はつねにパレート最適になるとしても，実質的恒常状態ならびにそれに収束する非恒常的な均衡の列は，パレート最適になる場合もあればならない場合もありうる。各主体の行動の合理性や競争・情報の完全性など標準的な仮定をことごとく満たしているにもかかわらず，なおすべての均衡がパレート最適になるとはかぎらないという事実は，このモデルが前稿のモデルに対してもつ際立った特異性を示すものといわなければならない。

一方，それぞれの均衡がほとんどすべての場合孤立点になっているという前稿モデルのもう一つの特徴について比較してみても，目下の重複世代モデルはやはりそうした性質をもち合わせないという特異性をもつ。第3.4図や第3.6図において，そこでの $z^0=m/p_1\neq0$ に限りなく近い点から出発した場合も，同様に当該の恒常状態に収束する別個の均衡の列が見出され，それらを互いに相距てることができないという意味で，このモデルには連続体をなす均衡の集合が存在しうるのである。この点もまた重複世代モデルがもつ異例な特性の一つに数えられるべきものであろう。

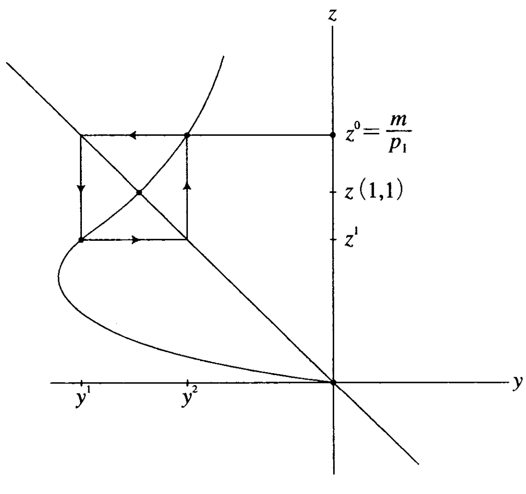
単純モデルによる予備的な考察を離れる前に，この種のモデルに限ってさえ均衡のあり様(よう)には上掲のパターンでは尽くしえぬきわめて多種多様なヴァラエティーがあることに言及しておこう。第3.4図や第3.6図に図示された事例ではオファー・カーブが全長にわたって右下がりであり，これは t 期の現在財の価格 p_t が将来財の価格 p_{t+1} に対して下落した場合，$y(p_t, p_{t+1})$ が増大し $z(p_t, p_{t+1})$ が減少すること，換言すれば現在財と将来財とのあいだにつねに粗代替財の関係があることを意味するものである。もしそのような関係がかならずしも満たされず，粗補完財の存在をも無視しえないとすれば，オファー・カーブは第3.7図に描かれているように，ある点から反転して右上がりになることができ，新しい事態が発生する。すなわちこの場合，一つには $z(1,1)$ の十分近傍か



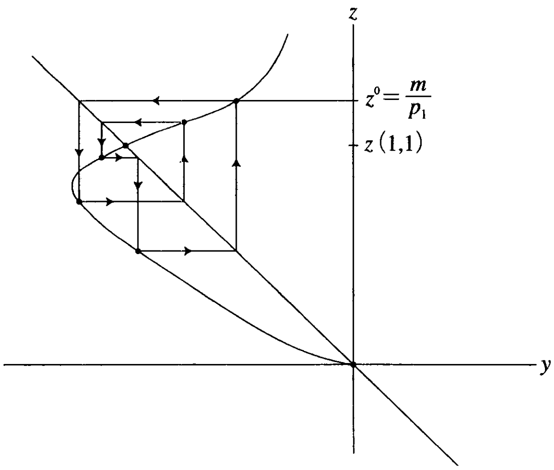
第3.7図

ら出発するかぎりは，振動しながら恒常状態 $[y(1,1), z(1,1)]$ に近づいていく均衡経路が存在しうる。ただし，そのような収束が生じるためには，$[y(1,1), z(1,1)]$ でのオファー・カーブの勾配が1よりも小でなくてはならない。またもう一つには，同じ y の値に対して2個の z の値が対応し，したがって z^0 から引いた水平線が勾配 -1 の直線と交わる点で上下への分岐が生じる可能性もある。その場合にはいずれの z を選ぶかによって，上記の振動経路のほかにアウタルキー恒常均衡に向かって収束する均衡経路もまた同時に存在しうるのである。

さらにこの種の事例は，どんな恒常状態にも収束しない均衡の列をもつ可能性をも含んでいる。たとえば第3.8図に示したような事態では，z^0 から出発する均衡経路は $(z^0, z^1), (z^0, z^1), \cdots\cdots$ そして $(y^1, y^2), (y^1, y^2), \cdots\cdots$ という2期を周期とする循環運動を永久に繰り返す。そこでは



第3.8図



第3.9図

$$[y(p_1, p_2), z(p_1, p_2)] = [-z(p_1, p_2), -y(p_1, p_2)]$$

となっており，$(p_1, p_2, p_1, p_2, \cdots\cdots)$ が均衡価格の列となる。また同様に第3.9図には周期5の循環均衡解の存在する場合が描かれている。

この線に沿ってさらにさまざまな可能性を詮索していけば，出発点の位置やオファー・カーブの形状いかんによっては，どんな長さの周期解をも反復しないで，いつまでも過去とは違った不規則変動を続けていくような均衡解の存在もまた排除できないことが推測されよう。重複世代モデルに極限循環解がありうることをはじめて指摘したのはゲイルであったが[(15)]，さらに進んでカオス的変動解が存在しうる可能性をも明らかにしたのはベンハビブ＝デイであった[(16)]。そしてこれらの発見の上に立って，グランモンがシャルコフスキーの定理にもとづきいわゆる内生的景気変動理論を提唱した[(17)]ことは，今日ではよく知られたところである。

が，これらの進展を概観するのは本稿の主題ではないから，ここでこれ以上その方向に立ち入るのは差し控えることにしよう。目下の場合注目しておくべきは，これらの均衡解のパターンが初期条件やファンダメンタルスの微小な変化に対してもきわめて敏感に反応し，大きくその性格を変えることである。前稿のモデルでは，ほとんどすべての経済において，均衡が与件の変化に対して連続的に反応すること，したがって与件の変化が微小なものであれば，均衡点の数やそのパターンは

(15) Gale, *op. cit.*, pp. 22-23.

(16) J. Benhabib and R. H. Day, “A Characterization of Erratic Dynamics in the Overlapping Generations Model”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 4, 1982, pp. 37-55.

(17) J. M. Grandmont, “On Endogenous Competitive Business Cycles”, *Econometrica*, September 1985.

変化しないことが結論された。これに対して重複世代モデルではそのような帰結は成立せず，カオス文献でしばしば「バタフライ効果」と呼称されるたぐいの複雑な現象を排除しえないのである。

4

ここで本来の各期の財が l 種類，各世代の個人が n 人の多数財・多数主体モデルに戻り，前節の特殊事例について得られた諸帰結が果たして一般モデルにも妥当するものであるかどうかを検討する作業にとりかかりたい。

まずは恒常状態の存在を確かめることから始めるが，結論をさきにいえば多数財・多数主体モデルの場合も単純モデルの場合と同様，名目的恒常状態と実質的恒常状態の両者がいずれもかならず存在する。ただしそれらはもはや一意的であるとはかぎらず，一般には複数個になることも可能であり，実はほとんどの場合その個数は奇数個になる。これらの，主張の証明はキーホー＝レヴァイン[(18)]に見出されるが，それは定石の不動点定理にもとづくばかりでなく，クーン＝タッカーの定理の巧妙な適用をも含み，概要を摘記しておくに値するものである。

まず名目的恒常状態の場合から始めるとして[(19)]，e を l 個の1から成る列ベクトルとし，$S_0=\{p\in R^l|p'e=1, p_h\geqq 0\}$, $S_\varepsilon=\{p\in R^l|p'e=1, p_h\geqq\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$ と定義する。すると境界条件により，$p^\nu\to p$, $p\in\partial R^l_+\backslash\{0\}$ のときには $e'(z(p,p)+y(p,p))\to\infty$ となるから，ある α を定めて，すべての $p\in S_0\backslash S_\varepsilon$ に対し $e'(z(p,p)+y(p,p))>\alpha$ となるように十分小さく ε を選ぶことができる。

$\varepsilon<1/l$ とすれば，S_ε は明らかに非空，コンパクトかつ凸の集合となる。そこで任意の $p\in S_\varepsilon$ について，$f(p)$ をユークリッドの距離の意味で $p+z(p,p)+y(p,p)$ にもっとも近い S_ε のベクトルと定義する（第4.1図参照）。そのような写像 $f(p)$ は当然連続であるから，ブラウワーの不動点定理によって，それには不動点 $p=f(p)$ が存在する。

ところで $f(p)$ はそのつくり方から，どの $p\in S_\varepsilon$ においてもつぎの最小化問題

$$\begin{array}{ll}\text{Minimize} & \frac{1}{2}\|f-p-z(p,p)-y(p,p)\|^2 \\ \text{subject} & f\geqq\varepsilon e, \quad f'e=1\end{array}$$

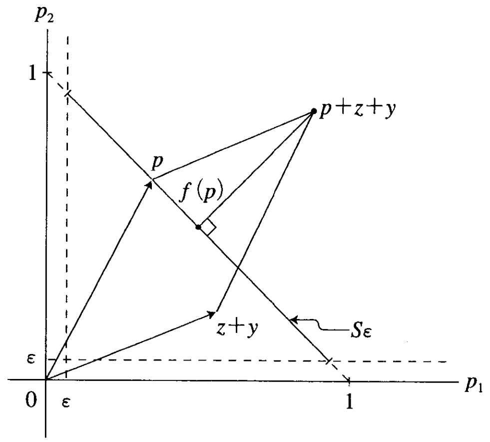
の解になっている。よって

$$L=\frac{1}{2}\|f-p-z(p,p)-y(p,p)\|^2+\lambda_1(\varepsilon e-f)+\lambda_2(f'e-1)$$

---

(18) Kehoe and Levine, "Regularity in Overlapping Generations Exchange Economies", pp. 73-77 参照。

(19) *op. cit.*, pp. 73-74, Proposition 3, 2.



第4.1図

を f について微分すれば，クーン＝タッカーの定理から

$$f-p-z(p,p)-y(p,p)-\lambda_1+\lambda_2 e \geqq 0$$
$$\varepsilon e-f \geqq 0, \quad f'e-1 \geqq 0$$
$$f'(f-p-z(p,p)-y(p,p)-\lambda_1+\lambda_2 e)=0$$
$$(\varepsilon e-f)'\lambda_1=0, \quad (f'e-1)\lambda_2=0$$
$$\text{for some} \quad \lambda_1 \in R^l_+, \quad \lambda_2 \in R$$

となり，しかも p したがって f は厳密に正であるから，上記の第一の式は等式

$$f-p-z(p,p)-y(p,p)-\lambda_1+\lambda_2 e=0$$

で成立する。そこでこの式に左から $(p-\varepsilon e)'$ を掛け，不動点では $f=p$ であること，また $p'(z(p,p)+y(p,p))=0$ であること，$(p-\varepsilon e)'\lambda_1=0$ であること，そして $\varepsilon e'e=\varepsilon(1+1+\cdots\cdots+1)=l\varepsilon$ であることを考慮して，整頓すれば

$$(1-l\varepsilon)\lambda_2=-\varepsilon e'(z(p,p)+y(p,p))$$

となる。つぎにやはり前と同じ式に左から p' を掛け，ふたたび $f=p$ であること，$p'(z(p,p)+y(p,p))=0$ であること，そして $p'e=1$ であることを考慮すれば

$$\lambda_2=p'\lambda_1$$

となる。

ここで，もし $p \in \partial S_\varepsilon$ すなわち不動点が S_ε の境界点にきたとすれば，ある h については $p_h=\varepsilon$

ということになり，しかも ε は十分小さく選んでいるから，その p については $e'(z(p, p)+y(p, p))>\alpha$ の条件を使うことができる。そこでその両辺に ε を掛けて

$$\varepsilon e'(z(p, p)+y(p, p))>\varepsilon\alpha$$

とし，これを前のパラグラフで導いた式に用いれば

$$(1-l\varepsilon)\lambda_2<-\varepsilon\alpha$$

となって，

$$0>-\varepsilon\alpha>(1-l\varepsilon)\lambda_2=(1-l\varepsilon)p'\lambda_1\geqq 0$$

という矛盾が生じることになる。よって不動点の p は S_ε の内点になっているのでなくてはならない。

これはどの h についても $p_h>\varepsilon$ となっていることを意味しており，したがって $p=f>\varepsilon e$ すなわち $\varepsilon e-f<0$ となる。よってクーン＝タッカー条件 $(\varepsilon e-f)'\lambda_1=0$ から $\lambda_1=0$ となり，前記の帰結 $\lambda_2=p\lambda_1$ から $\lambda_2=0$ となる。ゆえにさきに導いた

$$f-p-z(p, p)-y(p, p)-\lambda_1+\lambda_2 e=0$$

は

$$z(p, p)+y(p, p)=0$$

にひとしく，不動点 p は名目的恒常均衡の条件を満たしていることが明らかとなった。

つぎに実質的恒常状態の存在証明に移る[20]。前の場合に準じて，ある $\alpha>0$ を定めれば，$p\in S_0\backslash S_\varepsilon$ のようなすべての p，そしてすべての $\beta>0$ に対して $e'(z(p, \beta p)+y(p, \beta p))>\alpha$ となるように，十分小さく $\varepsilon>0$ を選ぶことができる。事実もしそうすることができず，$p^\nu\to p\in\partial S_0$ のとき $e'(z(p^\nu, \beta^\nu p^\nu)+y(p^\nu, \beta^\nu p^\nu))\leqq\alpha$ となるような点列 $(p^\nu, \beta^\nu)\in S_0\times R_{++}$ がとれたとすれば，そのような (p^ν, β^ν) については（イ）(p^ν, β^ν) の部分列で β^ν もまた収束するものがあるか，あるいは（ロ）β^ν が発散するもの，すなわち $1/\beta^\nu$ が収束するものがあるか，のいずれかである。ところが（イ）であれば，$(p^\nu, \beta^\nu p^\nu)$ が R^{2l}_+ の境界に収束する点列となるから，背理法の仮定に矛盾する。また（ロ）であったとしても，同様に $((1/\beta^\nu)p^\nu, p^\nu)$ がそのような点列となるから，やはり背理法の仮定に矛盾する。ゆえに恒常状態 $(p, \beta p)$ があるとすれば，そのどれもがかならず $p\in S_\varepsilon$ となる p をもつように ε がとれるのでなくてはならない。

---

(20) *op. cit.*, p. 75, Proposition 3, 3.

ところでいま $p\in S_\varepsilon$ のような任意の p について $\beta^\nu\to 0$ とすれば，かならず $p'z(p,\beta^\nu p)\to\infty$ となるのでなくてはならない。事実 $\beta^\nu p\to 0$ となれば，境界条件から $\|y(p,\beta^\nu p),z(p,\beta^\nu p)\|\to\infty$ となるから $y(p,\beta^\nu p),z(p,\beta^\nu p)$ の少なくとも一つの座標が ∞ に発散するのでなくてはならず，$p\in S_\varepsilon$ であるところからその成分はすべて正であるから，結局 $p'y(p,\beta^\nu p),p'z(p,\beta^\nu p)$ のいずれかが ∞ に発散しなければならないことになる。ゆえに，もし所望の結論に反して $p'z(p,\beta^\nu p)\to\infty$ にならなかったとすれば，$p'y(p,\beta^\nu p)\to\infty$ となるほかはない。ところがワルラスの法則から $p'y(p,\beta^\nu p)+\beta^\nu p'z(p,\beta^\nu p)=0$，したがって $(1/\beta^\nu)p'y(p,\beta^\nu p)+p'z(p,\beta^\nu p)=0$ であるところから，上記のように $p'y(p,\beta^\nu p)\to\infty$ になれば $(1/\beta^\nu)p'y(p,\beta^\nu p)\to\infty$，したがって $p'z(p,\beta^\nu p)\to-\infty$ とならねばならないが，$p\in S_\varepsilon$ で z が下から有界であることを考えれば，これは不可能である。よって $\beta^\nu\to 0$ であれば $p'z(p,\beta^\nu p)\to\infty$ とならざるをえないのである。

他方また同様に，$\beta^\nu\to\infty$ とすれば，かならず $p'y((1/\beta^\nu)p,p)\to\infty$ となるのでなくてはならない。この場合も論法は前とまったく同じで，$p'y((1/\beta^\nu)p,p)\to\infty$ にならなかったとすれば $p'z((1/\beta^\nu)p,p)\to\infty$ とならねばならないが，するとワルラス法則 $p'y((1/\beta^\nu)p,p)+\beta^\nu p'z((1/\beta^\nu)p,p)=0$ から $p'y((1/\beta^\nu)p,p)\to-\infty$ となるほかはなく，これもまた y が下から有界であることを考えれば不可能である。

上記の議論は，一方では $p\in S_\varepsilon$ のどんな p についてもある $\underline{\beta}(p)$ が存在して，$\beta\leqq\underline{\beta}(p)$ のようなすべての β について $p'z(p,\beta p)>0$ あるいは同じことであるが $-p'y(p,\beta p)>0$ となること，また他方では同じく $p\in S_\varepsilon$ のどんな p についてもある $\overline{\beta}(p)$ が存在して，$\beta\geqq\overline{\beta}(p)$ のようなすべての β について $-p'y(p,\beta p)<0$ となることを意味している。そして S_ε はコンパクトであるから，あらためて $\min_{p\in S_\varepsilon}\underline{\beta}(p)=\underline{\beta}$, $\max_{p\in S_\varepsilon}\overline{\beta}(p)=\overline{\beta}$ とおけば，結局われわれは

$$-p'y(p,\beta p)>0\quad\forall\beta\leqq\underline{\beta},\ \forall p\in S_\varepsilon$$
$$-p'y(p,\beta p)<0\quad\forall\beta\geqq\overline{\beta},\ \forall p\in S_\varepsilon$$

という帰結を得たことになる。実質的恒常状態は $-p'y(p,\beta p)=0$ を条件としているから，この帰結から β については $\underline{\beta}$ を下限とし $\overline{\beta}$ を上限とする閉区間を考えれば事足りることが知られたわけである。

さてそのように $\underline{\beta}$，$\overline{\beta}$ を定めて，$S_\varepsilon\times[\underline{\beta},\overline{\beta}]$ という集合を考えることにする。それが非空，コンパクトかつ凸の集合になることはいうまでもない。そこでこの集合に属する点からそれ自体の点への写像 $f(p,\beta)$ を考えて，それを前の場合になぞらえ

$$[p+(I-ep')(z(p,\beta p)+y(p,\beta p)),\beta-p'y(p,\beta p)]$$

から最短距離にある $S_\varepsilon\times[\underline{\beta},\overline{\beta}]$ のベクトルと定義する。ここで ep' は $(p_1,p_2,\cdots\cdots,p_l)$ を各行とする $l\times l$ の行列である。$f(p,\beta)$ は明らかに連続であるから，ふたたびブラウワーの定理により，そ

れには不動点が存在することになる。

前の場合と同様，$f(p,\beta)=(f_p(p,\beta),f_\beta(p,\beta))$ はどの $(p,\beta)\in S_\varepsilon\times[\underline{\beta},\overline{\beta}]$ においてもつぎの最小化問題

$$\begin{aligned}&\text{Minimize}\quad \frac{1}{2}\|[f_p-p-(I-ep')(z(p,\beta p)+y(p,\beta p)),f_\beta-\beta-p'y(p,\beta p)]\|^2\\&\text{subject to}\quad f_p\geqq\varepsilon e,f_p'e=1,f_\beta\geqq\underline{\beta},f_\beta\leqq\overline{\beta}\end{aligned}$$

の解となっている。するとふたたびクーン＝タッカーの定理によって，写像 $f(p,\beta)$ の不動点，すなわち $(p,\beta)=f(p,\beta)$ となる (p,β) においては

$$\begin{gathered}-(I-ep')(z(p,\beta p)+y(p,\beta p))-\lambda_1+\lambda_2 e=0\\-p'y(p,\beta p)+\lambda_3-\lambda_4=0\\(\varepsilon e-p)'\lambda_1=0,(p'e-1)\lambda_2=0\\(\beta-\underline{\beta})\lambda_3=0,(\overline{\beta}-\beta)\lambda_4=0\\\text{for some}\quad \lambda_1\in R^l{}_+,\lambda_2\in R,\lambda_3,\lambda_4\in R_+\end{gathered}$$

という条件が満たされることになり，$\underline{\beta}<\beta<\overline{\beta}$ であるところから，$\lambda_3=\lambda_4=0$ である。また名目的恒常状態の存在証明の場合と同様な推論を用いることにより $\lambda_1=0$ となるから，$\lambda_2=0$ にもなる。よって上記の式から

$$\begin{gathered}(I-ep')(z(p,\beta p)+y(p,\beta p))=0\\-p'y(p,\beta p)=0\end{gathered}$$

となり，$-p'y(p,\beta p)=0$ は $p'z(p,\beta p)=0$ をも意味するから，

$$z(p,\beta p)+y(p,\beta p)=0$$

となって，不動点は実質的恒常状態の条件をすべて満たしていることが知られるのである。

以上で一般的なモデルの場合も名目的恒常状態ならびに実質的恒常状態がそれぞれたしかに存在することが示されたが，さらに経済が正則であることを仮定すれば，それらの恒常状態は名目的，実質的いずれの場合もそれぞれ奇数個になると主張することができる。[21] まず名目的恒常状態の場合については，均衡条件

$$z(p,p)+y(p,p)=0$$

の z の最初の p に関する偏導関数の行列を D_1z，第二の p に関する偏導関数の行列を D_2z のよう

(21) 以下の議論については Kehoe and Levine, *op. cit.*, p. 74 および pp. 76-77 参照。

に書くことにして，正則性の仮定を

A. 5　どの名目的恒常均衡 (p, p) においても

$$D_1z(p, p)+D_2z(p, p)+D_1y(p, p)+D_2y(p, p)$$

は階数 $l-1$ をもつ。

の形で課することにしよう。いまこれらの行列の各要素を当該の恒常状態 (p, p) において評価して $J=D_1z+D_2z+D_1y+D_2y$ とし，それから第1行，第1列をとり去った $(l-1)\times(l-1)$ の行列を $\bar{J}$ と記して，行列式 $|-\bar{J}|$ を考えたときに，$|-\bar{J}|>0$ なら index $(p)=+1$，また $|-\bar{J}|<0$ なら index $(p)=-1$ のように p に指数をつけるとすれば，ポアンカレ＝ホップの指数定理[22]によってすべての名目的恒常状態 p に関するそれらの総和 $\sum$ index (p) はかならず $+1$ になる。よって名目的恒常状態の個数は奇数個にしかなれないことが知られる。

他方，実質的恒常状態の場合は，均衡条件が

$$(I-ep')(z(p, \beta p)+y(p, \beta p))=0$$
$$-p'y(p, \beta p)=0$$

となるので多少手が混むが，やはり A. 5 に準ずる正則性の仮定

A. 6　どの実質的恒常状態 $(p, \beta p)$ においても

$$\begin{bmatrix} (I-ep')(D_1z+\beta D_2z+D_1y+\beta D_2y) & (I-ep')(D_2z+D_2y)p \\ -y'-p'(D_1y+\beta D_2y) & -p'D_2yp \end{bmatrix}$$

は階数 l をもつ。

を課すならば，前と同様，上記の行列から第1行，第1列を除いた行列に負の符号をつけた行列の行列式が >0 なら index $(p, \beta)=+1$，<0 なら index $(p, \beta)=-1$ とすることによって，すべての実質的恒常状態 (p, β) に関するそれらの総和 $\sum$ index (p, β) は $+1$ になると主張できる。つまり実質的恒常状態の個数もまた奇数個となるほかないのである。

こうして仮定 A. 4～A. 6 の下では恒常状態はつねに奇数個の孤立点から成ることが知られ，その限りではこれらは前稿モデルの均衡と似通った性質をもつということができよう。たとえばそれらは初期賦存量のような与件の変化に対して連続的に変化し，その個数を変えることはない。しかもキーホー＝レヴァインが詳述しているように[23]，上記正則性の条件を満たす経済は全経済の集合の

(22)　John W. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, 1965, pp. 35-41, 蟹江幸博訳『微分トポロジー講義』，1998, pp. 51-59。

(23)　Kehoe and Levine, *op. cit.*, p. 74 および p. 76。

なかで開稠密な部分集合を形成するから，上述の諸性質は negligible な例外を除いてほとんどすべての経済に妥当すると考えてよいのである。

ただこれらの恒常状態がパレート最適性を満たすかどうかという点になると，前稿の場合とは話が違ってくる。前節でも採用したバラスコ＝シェルの判別条件をふたたび適用することにすれば，名目的恒常状態の場合は $\beta=1$ であるから，すべての t について $p_t=p$，したがって

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{\|p_t\|}=\frac{1}{\|p\|}(1+1+1+\cdots\cdots)=\infty$$

となり，それはかならずパレート最適となる。ところが実質的恒常状態の場合は一般に $\beta\neq1$ であり，したがって β が 1 より大であるか小であるかに応じて

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{\|p_t\|}=\frac{1}{\|p\|}\left(1+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}+\cdots\cdots\right)\begin{cases}<\infty & \text{if}\quad \beta>1\\ =\infty & \text{if}\quad \beta<1\end{cases}$$

となるから，$\beta<1$ の実質的恒常状態はパレート最適となるが，$\beta>1$ のそれはパレート最適とはならない。目下のモデルではそのいずれの場合も可能であるから，この事情からして重複世代モデルはパレート最適ではない均衡を排除しえないことになるのである。

以上までの議論をひとまず要約すれば，つぎのとおりになる。

定理 1　仮定 A. 1 ～A. 3 の下では，どの経済にも名目的恒常状態と実質的恒常状態の両者が存在する。また加えて仮定 A. 4 ～A. 6 もが満たされる場合には，それらは奇数個の孤立点となり，与件の変化とともに連続的に変化する。さらにそれらのうち $\beta\leqq1$ をもつ恒常状態はパレート最適となるが，$\beta>1$ をもつ恒常状態はパレート最適とはならない。

5

では一方，恒常状態ではない均衡の列についてはどれだけのことが主張できるであろうか。以下この問題について検討を加えていくことにするが，それにはまず一，二の留意点がある。一つには，すでに単純モデルの段階で指摘したように，場合によっては解経路が初期賦存量の制約に阻まれて自己を継続していけなくなる事態が生じうる（第3.4図で $z(1,1)$ より大きい $z^0=m^0/p_1$ から出発する場合）。条件（2.4）が (p_{t-1}, p_t) に対してつねにつぎの p_{t+1} を与えつづけることができ，したがって均衡経路が得られるためには，そうした事態は避けられねばならないであろう。またもう一つには，所与の (p_{t-1}, p_t) に対して 1 個よりも多い p_{t+1} が対応する場合があり（第3.7図に示されている場合），そのような場合も一意の解経路を keep していくことができないから，これまた避けてすますのが望ましいであろう。

そこでこれらの事情を勘案しつつ，しかも所期の分析目的を全うしようとすれば，一つの活路と

してつぎのような便法をとることが考えられる。すなわちさしあたっては p_{t+1} に関する $y(p_t, p_{t+1})$ の偏導関数から成る行列が非特異な恒常状態，つまり所与の (p_{t-1}, p_t) に対して $z(p_{t-1}, p_t)+y(p_t, \cdot)$ が逆関数をもちうる恒常状態を選び，そこを拠点としてその近傍に考察を限定するというのがそれである。そうすれば陰関数の定理により (p_{t-1}, p_t) の関数として p_{t+1} がかならず一意に求められるから，所望の解経路を確定することができ，その挙動なかんずくそれが当該の恒常状態に収束するかどうかを検討する途が開かれるのである。もちろんそのようなアプローチはある種の興味ある均衡パターンを視野の外におくことになるから，過度に保守的であると思われるかもしれない。しかし，ここでの狙い目がパレート最適ではない均衡や不確定的は均衡の**可能性**を示すことに求められるのであれば，それはそれとして当面の目論見には叶うのである。

よって以下ではしばらくそのような構想にもとづいて行論を進めることにし，上記の条件を満たす恒常状態 $(p, \beta p)$ を中心として均衡条件（2.4）を

$$D_1z(p_{t-1}-\beta^{t-1}p)+(D_2z+\beta^{-1}D_1y)(p_t-\beta^t p)+\beta^{-1}D_2y(p_{t+1}-\beta^{t+1}p)=0 \qquad (5.1)$$

のような形に線形化することを考えよう[24]。ここでの偏導関数がすべて当該の $(p, \beta p)$ において評価されたものであることはいうまでもない。さて z, y が $(p, \beta p)$ に関して 0 次同次であること，したがってオイラーの定理により

$$D_1z\beta^{t-1}p+D_2z\beta^t p=0$$
$$D_1y\beta^t p+D_2y\beta^{t+1}p=0$$

が成り立つことを考えれば，(5.1) はさらに

$$D_1zp_{t-1}+(D_2z+\beta^{-1}D_1y)p_t+\beta^{-1}D_2yp_{t+1}=0 \qquad (5.2)$$

のように書き換えることができる。以下では，われわれはこの式を原モデルのよき近似とみなして考察を進めていく立場をとる。

ここで前述の方針にしたがい，

A. 7　D_2y はどの恒常均衡 $(p, \beta p)$ においても非特異である。

という正則性の仮定を明示的に導入するとしよう。A. 7 を前提とすることで，(5.2) は (p_{t-1}, p_t) に対して一意的に p_{t+1} を定める 2 階の線形定差方程式システムとみなせることになる。この仮定により D_2y^{-1} の存在が保証されるので，この式に左から βD_2y^{-1} を掛け，

$$\beta D_2y^{-1}D_1zp_{t-1}+\beta D_2y^{-1}(D_2z+\beta^{-1}D_1y)p_t+Ip_{t+1}=0$$

(24)　以下の分析については Kehoe and Levine, "Comparative Statics", pp. 441-442, *ditto*, "Overlapping Generations Economies", pp. 79-86 に負う。

すなわち

$$p_{t+1} = -\beta D_2 y^{-1} D_1 z p_{t-1} - D_2 y^{-1}(\beta D_2 z + D_1 y) p_t$$

を得る。そこでこれを

$$p_t = 0 p_{t-1} + I p_t$$

と連立させて

$$\begin{bmatrix} p_t \\ p_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\beta D_2 y^{-1} D_1 z & -D_2 y^{-1}(\beta D_2 z + D_1 y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{t-1} \\ p_t \end{bmatrix}$$

と書き，

$$q_t = (p_t,\ p_{t+1})$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\beta D_2 y^{-1} D_1 z & -D_2 y^{-1}(\beta D_2 z + D_1 y) \end{bmatrix}$$

とおけば，(5.2) は結局

$$q_t = G q_{t-1} \tag{5.3}$$

という1階の線形定差方程式システムに転換される。以下の行論では，しばらくこの式が均衡価格の時間的経路を検討する上での基本方程式となる。

ここで恒常状態 $(p, \beta p)$ についてふたたび0次同次性から $D_1 zp + \beta D_2 zp = 0$ すなわち $D_1 zp = -\beta D_2 zp$ となること，また $D_1 yp + \beta D_2 yp = 0$ すなわち $D_1 yp = -\beta D_2 yp$ となることを考慮すれば

$$-D_2 y^{-1} D_1 zp - D_2 y^{-1}(\beta D_2 z + D_1 y) p = \beta I p$$

となるので，$q = (p, \beta p)$ とすれば

$$Gq = \beta q$$

となることが容易に確かめられる。すなわち G は β にひとしい固有根をもち，q がその固有ベクトルとなることが知られるのである。他方またワルラス法則から

$$p'(D_1 y + D_2 y + \beta D_1 z + \beta D_2 z) = 0,$$

よって

$$p'(-\beta D_1 z-\beta D_2 z-D_1 y)=p'D_2 y$$

となり，そこでこれを用いて計算すれば

$$p'[-\beta D_1 z \quad D_2 y]G=p'[-\beta D_1 z \quad D_2 y]$$

となるから，Gは1にひとしい固有根をももつことがやはり容易に知られよう。

以下Gについては，さらに

A. 8　Gは非特異で，その固有根として別根をもち，かつそれらが同じ絶対値をもつのは共役の場合に限る。

という仮定を設け，A. 4～A. 6のほかにA. 7，A. 8をも満たすような経済を正則な経済と考えていくことにする。

さて上記の推論で恒常状態$q=(p, \beta p)$はGの固有根βの固有ベクトルとなっていることが分かったが，いまGを写像と考えると，$\beta q=Gq$であることから，qの像はβqとなり，逐次$q, \beta q, \beta^2 q,$…… となっていく。したがって文字どおり恒常状態を不動点とみなすためには，Gの代わりに$(1/\beta)G$という写像を考え，(5.3) の代わりに，

$$q_t=\frac{1}{\beta}Gq_{t-1} \tag{5.4}$$

という定差方程式システムを考えてみるのが便利である。そうすれば恒常均衡価格ベクトルqは写像$(1/\beta)G$の不動点であり，q_tのqへの収束を考える上では，$(1/\beta)G$の固有根でその絶対値が1より小さいもの，すなわち単位円の内側に入るものに注目すればよいことになる。仮定A. 8により固有根の総数は$2l$個あり，以下ではそれらのうち絶対値が1より小さいものの個数をl_s個として示すことにする。するとこれはもとのGに戻していえば，絶対値がβより小さい固有根の個数がl_s個であることに対応する。

すると (5.3) が安定性

$$\lim_{t\to\infty}\frac{q_t}{\|q_t\|}=\frac{q}{\|q\|}$$

を満たす解をもつためには，それらl_s個の固有根$\alpha_1, \alpha_2,$……$, \alpha_{l_s}$とその固有ベクトル$v_1, v_2,$……$, v_{l_s}$が生かされ他が消されるように初期条件が選ばれるのでなくてはならない。そこでそのような初期条件$q_1=(p_1, p_2)$の集合をV_sと書くことにすれば，V_sは$v_1, v_2,$……$, v_{l_s}$とqによって張られるl_s+1次元の部分空間$\{c_1v_1+c_2v_2+\cdots\cdots+c_{l_s}v_{l_s}+c_{l_s+1}q|(c_1, c_2, \cdots\cdots, c_{l_s+1})\in R^{l_s+1}\}$となる。その次元が$l_s$より1個増えて$l_s+1$となっているのは，$q_1$が安定性を満たす初期条件であれば，0次同次性からすべての$\theta\neq 0$についてθq_1もまたそのような初期条件となるからである。

他方，前記の仮定A. 7の下では陰関数の定理により均衡条件 (2.4) を恒常状態qの近傍で解

くことができ，q を含む開錐 $C \subset R^{2l}_{++}$ について定義された非線形定差方程式システム $q_t = g(q_{t-1})$ を得ることができる。そこでこのシステムについて，(5.3) の場合に準じ安定性 $\lim_{t \to \infty} q_t / \|q_t\| = q/\|q\|$ を満たすような初期条件 q_1 の集合を W_s とすれば，W_s は V_s と同じ l_s+1 次元をもつ多様体となっており，$Dg(q) = G$ となるところからそれは q において V_s にひとしい接空間をもつ。換言すれば，V_s は W_s に対する最善の線形近似となっている。このことからわれわれは q の近傍において (5.2) を (2.4) への線形近似とみなし，前者の解をあたかも後者の解であるかのごとくにみなしていくことを正当づけられるのである。

上に述べた帰結はとりわけ仮定 A. 7 および A. 8 の下で導かれたものであるから，すべて正則な経済においてのみ成り立つと考えねばならない。しかし，キーホー＝レヴァインが詳しく論じているように，[25] これらの仮定は実のところほとんどすべての経済について満たされると考えてよい。つまりより精確にいえば，正則な経済はその十分近傍にある経済がやはりすべて正則な経済であり，またどんな経済を考えてもそのすぐ近傍にかならず正則な経済が見出されるという意味において，全経済の空間のなかで開稠密な部分集合をなしているのである。が，この点をめぐっては，本稿ではその数理に詳しく立ち入る余裕がないので，興味ある読者は注記した論文の該当箇所を参照されたい。

以上を要するに，われわれが対象としている経済の集合は，その空間内で開稠密となっている正則経済の集合をもち，後者に属する経済はそのどれもが奇数個の名目的恒常状態ならびに実質的恒常状態をもっている。そのような各恒常状態 (p, β) には，それぞれそこで評価された超過需要関数の偏導関数から成る行列 G が対応しており，それらの G はすべて β にひとしい固有根，そして $\beta \neq 1$ の場合は β のほか 1 にひとしい固有根をもっていること，また β には q にひとしい固有ベクトルが対応すること，が知られている。しかし，固有根の集合については，それらが知られていることのすべてであり，それを越える情報はいっさい存在していない。つまりわれわれの経済は，上記の事実以外に固有根の集合に対して何らかの制約を課しうる根拠をまったく持ち合わせていないのである。

上記の論脈のなかには，経済とりわけ正則経済を定義するファンダメンタルな与件（効用関数や初期賦存量ベクトル）の集合ないしはそれらから導かれる超過需要関数の集合から，それらが含むそれぞれの恒常状態で評価された超過需要関数のヤコービ行列の集合へ，さらにはそのような超過需要関数のヤコービ行列の集合から，それらに対応する G の固有根の集合へ，といういくつかの対応関係が含まれており，それらを合成すれば，起点である経済の集合と終点である固有根の集合とを関係づける一つの大きな写像が存在していることになる。すると当面の仮定と既知の情報制約の下では，この合成写像は結局上への連続な開写像となっていることが示されるのである。この主

(25) Kehoe and Levine, "Overlapping Generations Economies", pp. 72–84.

張の詳細厳密な証明もまたキーホー＝レヴァインの所論中[26]に見出されるが，ここでそれを首尾一貫した形で総合再述するのはそれ自体が1個の論文に匹敵する大仕事となるので，都合上割愛せざるをえない。以下ではその事実を前提とした上で，何がいえるかという考察にもっぱら限定して進むことにしたい。

そこで前期のとり決めにしたがい β より絶対値の小さい固有根の個数を l_s で記し，$2l-1 \geqq l_s \geqq 0$ を満たす l_s を任意に定めたとしてみよう。すると β，1以外の固有根の大きさについては何らの制約もないわけであるから，β より絶対値の小さい l_s 個の根を任意に選び，また β より絶対値の大きい $2l-l_s-1$ 個の根を任意に選べば，これらはいずれも既知の情報制約を満たす G の固有根の集合のなかに含まれることになる。したがって，前のパラグラフに述べた主張から，それらの固有根の組に対応するような恒常状態をもつ経済がかならず存在し，しかもその経済の近傍の経済もまたすべて上に定めた安定根 l_s 個という条件を同様に満たしていることになる。よってわれわれは，つぎのような定理を主張することができるのである。

定理 2　正則性の仮定の下では，$2l-1 \geqq l_s \geqq 0$ を満たす任意の l_s に対して，β より小さい絶対値をもつ固有根が l_s 個あり，β より大きい絶対値をもつ固有根が $2l-l_s-1$ 個あるような恒常状態をもつ経済の開集合がかならず存在する。

もしかりに $l_s=2l-1$ とすれば，そのような恒常状態をもつ経済では β が最大根となるから，その恒常状態の近傍ではどんな初期条件から出発しても，均衡価格の列はやがて当該の恒常状態に収束することになる。他方 $l_s=0$ とすれば，そのような恒常状態をもつ経済では絶対値が β を下回る根は存在せず，したがってその恒常状態以外の初期値から出発する均衡価格の列はかならず当該の恒常状態から離反していく。が，それら二つのケースを両極端として，そのあいだにあるケースはどれもが可能であり，そのそれぞれに対応する恒常状態をもつ経済で初期条件を V_s から選びさえすれば，かならず当該の恒常状態に収束する均衡価格の列を見出すことができる。このような帰結は negligible な経済を除けばすべての経済について妥当するものであり，しかも各 l_s に対応する経済の集合は開集合であるから，そのそれぞれを僅かずらしたとしてもやはり同じ l_s に対応する経済になっていて，あらかじめ定めた l_s は不変である。これが上記定理の含意するところにほかならないのである。

当該の恒常状態が名目的恒常状態であれば $\beta=1$ であるから，安定根の最大可能個数が $2l-1$ となることは自明である。またそれが実質的恒常状態であるとしても，$\beta>1$ であれば，安定根の最

(26)　Kehoe and Levine, *op. cit.*, pp. 80-84 とりわけ Proposition 6.2 および Proposition 7.1 参照。ただしキーホー＝レヴァインは超過需要関数から出発しているので，各主体の効用関数や初期賦存量の集合と超過需要関数の集合との対応関係については彼らの所論は補完されなくてはならない。この点に関する補強工事は興味ある読者に委せたい。

大可能個数はやはり β のみを除いた $2l-1$ となる。他方 $\beta<1$ である場合は，1もまた安定根にはなれず，安定根の最大可能個数は β と1を除いて $2l-2$ となるが，この事実は決して前記の定理と矛盾するものではない。それはもし l_s を $2l-1$ に選んだとすれば，$\beta\geqq1$ となるような G をもつ経済が選ばれるのでなければならず，$\beta<1$ となるような G に対応する経済が選ばれるのは l_s が $2l-2$ 以下とされる場合のみとなるということを意味するにすぎない。つまり前記の主張は，それがもとづく恒常状態の名目的，実質的のいかんを問わず，共通に妥当するのである。

6

これで正則性の条件を満たす恒常状態の近傍に限定して考えるかぎり，当該の恒常状態に収束する均衡価格の列を構想することがあながち不自然な思いつきではないことが明らかにされたと思われる。そこでこの帰結を前にも用いたバラスコ＝シェルの判別基準と結びつけて考えることにすれば，非恒常的な均衡の列についてもつぎのような最適性定理が容易に導き出せることになる。

定理 3　$\beta\leqq1$ の恒常状態に収束する均衡の列はすべてパレート最適となる。これに対して，$\beta>1$ の恒常状態に収束する均衡の列はすべてパレート最適とはならない。

まずもっとも簡単な $\beta=1$ のケースから証明していくことにしよう。この場合 p_t は $(p, p, \cdots\cdots, p, \cdots\cdots)$ という名目的恒常状態に収束するわけであるから，$\varepsilon>0$ を任意に選べば，ある T が存在して，すべての $t\geqq T$ に対して

$$\|p_t-p\|\leqq\varepsilon$$

とすることができる。すると三角不等式 $\|p_t-p\|+\|p\|\geqq\|p_t-p+p\|=\|p_t\|$ にもとづき

$$\varepsilon+\|p\|\geqq\|p_t-p\|+\|p\|\geqq\|p_t\|$$

となるので，

$$\|p_t\|\leqq\|p\|+\varepsilon$$

となり，したがってすべての $t\geqq T$ に対して

$$\frac{1}{\|p_t\|}\geqq\frac{1}{\|p\|+\varepsilon}$$

という結果を得る。よって

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{\|p_t\|}=\sum_{t=1}^{T-1}\frac{1}{\|p_t\|}+\sum_{t=T}^{\infty}\frac{1}{\|p_t\|}\geqq\sum_{t=1}^{T-1}\frac{1}{\|p_t\|}+\sum_{t=T}^{\infty}\frac{1}{\|p\|+\varepsilon}=\infty$$

となり，$\beta=1$ の名目的恒常状態に収束する均衡の列はパレート最適となることが分かる。

つぎに $\beta<1$ のケースについて考えると，この場合 p_t は $(p, \beta p, \beta^2 p, \cdots\cdots, \beta^{t-1} p, \beta^t p, \cdots\cdots)$ という実質的恒常状態に収束することになるから，やはり $\varepsilon>0$ を任意に選べば，ある T が定まって，すべての $t \geqq T$ に対して

$$\|p_t-\beta^{t-1}p\| \leqq \varepsilon$$

とできる。すると $\beta=1$ の場合に準じた推論から

$$\|p_t\| \leqq \|\beta^{t-1}p\|+\varepsilon$$

とでき，$\beta<1$ であることから当然

$$\|p_t\| \leqq \|p\|+\varepsilon,$$

したがって

$$\frac{1}{\|p_t\|} \geqq \frac{1}{\|p\|+\varepsilon}$$

となる。よって前とまったく同様に

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{\|p_t\|}=\infty$$

となり，$\beta<1$ の実質的恒常状態に収束する均衡の列もまたやはりパレート最適となる。

他方 $\beta>1$ のケースについては，$\varepsilon>0$ を選ぶことで T が定まって，すべての $t \geqq T$ に対して

$$\|p_t-\beta^{t-1}p\| \leqq \varepsilon$$

とできることまでは同様であるが，いま左辺の β^{t-1} を括り出して，$\beta>1$ であることを考慮すれば

$$\left\|\frac{p_t}{\beta^{t-1}}-p\right\| \leqq \frac{\varepsilon}{\beta^{t-1}} \leqq \varepsilon$$

となる。よってふたたび三角不等式を用い，上記の結果を勘案することをつうじて，

$$\|p\|=\left\|\left(p-\frac{p_t}{\beta^{t-1}}\right)+\frac{p_t}{\beta^{t-1}}\right\| \leqq \left\|p-\frac{p_t}{\beta^{t-1}}\right\|+\left\|\frac{p_t}{\beta^{t-1}}\right\| \leqq \varepsilon+\left\|\frac{p_t}{\beta^{t-1}}\right\|$$

となるので，

$$\|p\|-\varepsilon \leqq \left\|\frac{p_t}{\beta^{t-1}}\right\|=\frac{1}{\beta^{t-1}}\|p_t\|$$

となることが分かる。そこで $\|p\|-\varepsilon>0$ となるように ε を選んで，その ε を固定して考えれば，

$$\beta^{t-1}(\|p\|-\varepsilon) \leqq \|p_t\|$$

から

$$\frac{1}{\beta^{t-1}(\|p\|-\varepsilon)} \geqq \frac{1}{\|p_t\|}$$

を得る。ゆえに

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{\|p_t\|}=\sum_{t=1}^{T-1}\frac{1}{\|p_t\|}+\sum_{t=T}^{\infty}\frac{1}{\|p_t\|}\leqq\sum_{t=1}^{T-1}\frac{1}{\|p_t\|}+\sum_{t=T}^{\infty}\frac{1}{\beta^{t-1}(\|p\|-\varepsilon)}=\sum_{t=1}^{T-1}\frac{1}{\|p_t\|}+\frac{1}{\|p\|-\varepsilon}\cdot\sum_{t=T}^{\infty}\frac{1}{\beta^{t-1}}<\infty$$

という結果となり，$\beta>1$ の実質的恒常状態に収束する均衡の列はパレート最適となることはできない。

7

ところで $\beta=1$ の（名目的）恒常状態そのものが存在することはすでに証明ずみであるから，以上の議論から少なくとも目下の一般的重複世代モデルがパレート最適を満たす均衡をもつことは，当該の恒常状態に収束する均衡の列をも含めて，確かなところである。が一方，同様にこの一般モデルがパレート最適ではない均衡をもちうるかどうかについては，まだこれまでの所論からは明確な解答を引き出すことはできない。というのは，$\beta\neq 1$ の（実質的）恒常状態が存在することはやはりすでに証明ずみであるけれども，それが $\beta<1$ の場合にも $\beta>1$ の場合にも主張できるかどうかは，かならずしも明らかではないからである。そこで以下本節ではこの点についてさらにもう一歩を踏み込み，つぎの主張が成立しうることを示して，上記の問題への及ぶかぎりでの答とすることにしよう。(27)

定理 4　どの経済にも $\beta\leqq 1$ で，しかも $m\geqq 0$ であるような恒常状態が少なくとも 1 個はかならず存在する。また $\beta\geqq 1$ で，しかも $m\leqq 0$ であるような恒常状態も少なくとも 1 個はかならず存在する。

この主張を証明するには，まず恒常状態の必要条件である $z(p, \beta p)+y(p, \beta p)=0$ とは，やや異なったつぎの形の条件から始めるのが有益である。すなわちいま $p'e=\sum_{i=1}p_i=1$ という基準化の条件を満たす p と $[\underline{\beta}, \overline{\beta}]$ に含まれる β の対について，$(I-ep')(z(p, \beta p)+y(p, \beta p))$ という関数の最初の $l-1$ 個の座標で与えられる写像 $f: S_\varepsilon\times[\underline{\beta}, \overline{\beta}]\rightarrow R^{l-1}$ を考え，$z(p, \beta p)+y(p, \beta p)=0$ の代わりに

$$f(p, \beta)=L(I-ep')(z(p, \beta p)+y(p, \beta p))=0$$

という条件を考えるのである。ここで L は $(l-1)\times l$ の行列

---

(27)　下記の主張およびその証明については Kehoe and Levine, *op. cit.*, pp. 87-90 参照。

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

で，$(I-ep')(z(p,\beta p)+y(p,\beta p))$ の l 個の行を最初の $l-1$ 個の行に転換する射影オペレーターをあらわしている。ここで $z+y$ そのものを対象とせず $(I-ep')(z+y)$ の形に直した関数を考えるのは，$p'(I-ep')(z+y)=0$ が自動的に成り立つところから[(28)]，最初の $l-1$ 個の成分が 0 となれば，l 番目の成分もまた恒常状態の条件とは関わりなく 0 となるからである。これに反して $z+y$ のままの形で考える場合には，$p'(z+y)=0$ が成り立っていないと，はじめの $l-1$ 個の成分が 0 であることから l 番目の成分が 0 になるという帰結を導くことができず，しかも $p'(z+y)=0$ の条件は恒常状態の成立を俟たないと利用できないのである。

以下での推論の目標は，まずほとんどすべての経済において，0 が前記 f の正則値になることを示す点にある。そのためには横断性定理を用いることになるので，ここで仮定をいささか強めて

A. 9　f は 2 回連続微分可能。

としておくのでなくてはならない。その上で y, z を $v\in R^{l+1}$ でパラメタライズして，$f(p,\beta,v)=f_v(p,\beta)$ と書くことにすれば，上記の課題は，ほとんどすべての v に対して $D_{(p,\beta)}f_v(p,\beta)$ が $f_v(p,\beta)=0$ の点でフル・ランクになること，すなわちその階数が $l-1$ になること，を示すにひとしく，それにはつぎの形の横断性定理がもっとも，しっくりと適合することになる。

定理　もし $M\times(N+S)$ の行列 $Df(\tilde{v},q)$ が，$f(\tilde{v},q)=0$ のときつねに階数 M をもてば，ほとんどすべての q に対して $M\times N$ の行列 $D_{\tilde{v}}f(\tilde{v},q)$ は，$f(\tilde{v},q)=0$ のときつねに階数 M をもつ[(29)]。

ここで M を $l-1$，N を l，S を $l+1$，$\tilde{v}$ を (p,β)，q を v，よって $f(\tilde{v},q)$ を $f(p,\beta,v)$，$Df(\tilde{v},q)$ を $Df(p,\beta,v)$，$D_{\tilde{v}}f(\tilde{v},q)$ を $D_{(p,\beta)}f(p,\beta,v)$ に置き換えて，目下の文脈にこの定理を翻訳すれば，

(28)　$p'e=p_1+p_2+\cdots\cdots+p_l=1$ とされていることを考慮すれば，

$$(p_1,p_2,\cdots\cdots,p_l)\begin{bmatrix} z_1+y_1-p'(z+y) \\ z_2+y_2-p'(z+y) \\ \vdots \\ z_l+y_l-p'(z+y) \end{bmatrix}$$
$$=p_1(z_1+y_1)+p_2(z_2+y_2)+\cdots\cdots+p_l(z_l+y_l)-(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_l)p'(z+y)$$
$$=p'(z+y)-p'(z+y)=0.$$

(29)　A. Mas-Colell, M. D. Whinston and J. R. Green, *Microeconomic Theory*, 1995, p. 595.

定理　もし $(l-1)\times(2l+1)$ の行列 $Df(p,\beta,v)$ が，$f(p,\beta,v)=0$ のときつねに階数 $l-1$ をもてば，ほとんどすべての v に対して $(l-1)\times l$ の行列 $D_{(p,\beta)}f(p,\beta,v)$ は $f(p,\beta,v)=0$ のときつねに階数 $l-1$ をもつ。

ということになり，前述の主張は定理の結論そのものにほかならない。よってここでの課題としては，その前件すなわち $Df(p,\beta,v)$ の階数が $f(p,\beta,v)=0$ の点で $l-1$ になることを示せばよいのである。

そこでそのことを示すために，以下では各 $h=1,2,\cdots\cdots,l$ について $v_1\in R^l$, $v_2\in R$ として

$$y_{hv}=y_h+\frac{\sum_{k=1}^{l}p_{k1}v_{k1}}{\sum_{k=1}^{l}p_{k1}}-v_{h1}+\frac{p_{h2}}{p_{h1}}v_2$$

$$z_{hv}=z_h-v_2$$

となるような perturbation を構成する(30)。そして

$$f_v(p,\beta)=L(I-ep')(z_v(p,\beta p)+y_v(p,\beta p))$$

と定義して，それを v について微分し，計算すれば，

$$\begin{aligned}
&D_vf_v(p,\beta)\\
&=D_vL(I-ep')(z_v+y_v)\\
&=L(I-ep')D_v(z_v+y_v)\\
&=L(I-ep')\begin{bmatrix} p_1-1 & p_2 & \cdots\cdots & p_l & \beta-1\\ p_1 & p_2-1 & \cdots\cdots & p_l & \beta-1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ p_1 & p_2 & \cdots\cdots & p_l-1 & \beta-1\end{bmatrix}\\
&=L(I-ep')(ep'-I\quad(\beta-1)e),
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&L(I-ep')(ep'-I)\\
&=L(ep'-I-ep'ep'+ep')\\
&=L(ep'-I)\qquad(\because p'e=1)
\end{aligned}$$

(30)　右辺の p_1 と p_2 は y,z の依存する2期分の価格の第1部分と第2部分をそれぞれ意味している。したがって恒常状態においては，すべての h について $p_{h2}/p_{h1}=\beta$ である。ここで (y_v,z_v) が連続微分可能性，ワルラス法則，0次同次性など超過需要関数の性質をすべて満たすようにつくられていることに注意されたい。

となるが，他方

$$
\begin{aligned}
&L(I-ep')(\beta-1)e\\
&=(\beta-1)L(I-ep')e\\
&=(\beta-1)L\begin{bmatrix}1-p_1 & -p_2 & \cdots\cdots & -p_l\\ -p_1 & 1-p_2 & \cdots\cdots & -p_l\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -p_1 & -p_2 & \cdots\cdots & 1-p_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}\\
&=(\beta-1)L\begin{bmatrix}1-\sum_h p_h\\ 1-\sum_h p_h\\ \vdots\\ 1-\sum_h p_h\end{bmatrix}=(\beta-1)L\underset{(l\text{コ})}{\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}}=\underset{(l-1\text{コ})}{\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}},
\end{aligned}
$$

となるので，結局

$$D_v f_v(p,\beta)=[L(ep'-I) \qquad 0]$$

となることが分かる。[31]

すると，ここで $L(ep'-I)$ の階数が $l-1$ になることを以下のように示すことができる。それには任意の列ベクトル $w\in R^{l-1}$ をとったとき，$w'L(ep'-I)=0$ ならば，すなわち

$$(w_1, w_2, \cdots\cdots, w_{l-1})\begin{bmatrix}p_1-1 & p_2 & \cdots\cdots & p_{l-1} & p_l\\ p_1 & p_2-1 & \cdots\cdots & p_{l-1} & p_l\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ p_1 & p_2 & \cdots\cdots & p_{l-1}-1 & p_l\end{bmatrix}=0$$

ならば，$w=0$ となることを示せばよいわけである。ところが一般に $x'(ep'-I)=0$ であるときは $x'ep'=x'$ すなわち $(\sum_h x_h)p'=x'$ となって，x' は p' をスカラー倍したものになっている。そこで上記の $w'L$ を x' とみなせば，上の考察から $w'L$ は p' のスカラー倍になっているはずである。ところが $w'L=(w_1, w_2, \cdots\cdots, w_{l-1}, 0)$ であるから，ここで最後の成分が 0 であるということは共通の倍数が 0 であるということでしかありえない。よって $w'=0$ とならざるをえず，$L(ep'-I)$ の階数が $l-1$ となることが示された。

以上の議論により，ヤコービ行列

(31)　この行列は $(l-1)\times(l+1)$ でキーホー＝レヴァインが $l\times(l+1)$（彼らの記号では $n\times(n+1)$）としているのは間違いである。

$$Df_v(p,\beta)=Df(p,\beta,v)=[D_{(p,\beta)}f(p,\beta,v)\quad D_vf(p,\beta,v)]$$

で $D_vf(p,\beta,v)$ の部分の階数が $l-1$ になることが分かったので，いうまでもなく上記の行列全体 $Df(p,\beta,v)$ の階数もまた $l-1$ になる。ゆえに前記横断性定理の前件が満たされることになり，その結論から，ほとんどすべての v に対して $D_{(p,\beta)}f(p,\beta,v)$ の階数もまた $l-1$ になるという帰結が導かれるのである。これはいい換えれば，ほとんどすべての (y,z) すなわち当該経済の開稠密な部分集合に属するすべての (y,z) に対して，0 が f の正則値になるということにほかならない。

さて所期の性質をもつ恒常均衡の存否を確かめてみるためには，$f=0$ を満たす (p,β) の集合すなわち f による 0 の逆像 $f^{-1}(0)$ がどのような相を呈するかを明らかにすることがポイントとなる。まず f の定義域 $S_\varepsilon\times[\underline{\beta},\bar{\beta}]$ がコンパクトで，f が連続であることにより，$f^{-1}(0)$ は明らかにコンパクトである。つぎに f は S_ε の境界上のどんな p に対しても 0 にはなりえない。というのは，$z(p,\beta p)+y(p,\beta p)$ の場合と同様，$\varepsilon>0$ を十分に小さく選べば，ある $\alpha>0$ が定まって，どんな $p\in S_0\backslash S_\varepsilon$ かつ $\underline{\beta}\leqq\beta\leqq\bar{\beta}$ に対しても $e'(I-ep')(z(p,\beta p)+y(p,\beta p))>\alpha$ となるからである。

事実いま，ある列 $(p^\nu,\beta^\nu)\to(p,\beta),\ p\in\partial S_0,\ \beta\in[\underline{\beta},\bar{\beta}]$ について $e'(I-ep^{\nu\prime})(z(p^\nu,\beta^\nu p^\nu)+y(p^\nu,\beta^\nu p^\nu))\leqq\alpha$ になったとしてみると，

$$\begin{aligned}&e'(I-ep^{\nu\prime})(z(p^\nu,\beta^\nu p^\nu)+y(p^\nu,\beta^\nu p^\nu))\\&=e'(z(p^\nu,\beta^\nu p^\nu)+y(p^\nu,\beta^\nu p^\nu))-e'ep^{\nu\prime}(z(p^\nu,\beta^\nu p^\nu)+y(p^\nu,\beta^\nu p^\nu))\\&=e'(z(p^\nu,\beta^\nu p^\nu)+y(p^\nu,\beta^\nu p^\nu))-lp^{\nu\prime}(z(p^\nu,\beta^\nu p^\nu)+y(p^\nu,\beta^\nu p^\nu))\end{aligned}$$

で，$e'(z(p^\nu,\beta^\nu p^\nu)+y(p^\nu,\beta^\nu p^\nu))\to\infty$ であるから，この式が上から α で押えられるためには第 2 項 $lp^{\nu\prime}(z(p^\nu,\beta^\nu p^\nu)+y(p^\nu,\beta^\nu p^\nu))\to\infty$ とならねばならず，よって

$$p^{\nu\prime}(z(p^\nu,\beta^\nu p^\nu)+y(p^\nu,\beta^\nu p^\nu)\to\infty$$

とならねばならないことになる。そしてこの結果はまた $\beta\neq1$ とならねばならないことをも意味している。なぜなら，もし $\beta=1$ であれば，ワルラス法則から $p^{\nu\prime}(z(p^\nu,\beta^\nu p^\nu)+y(p^\nu,\beta^\nu p^\nu))=0$ となって，明らかに上の結果と矛盾するからである。ところが他方 $p^{\nu\prime}(z(p^\nu,\beta^\nu p^\nu)+y(p^\nu,\beta^\nu p^\nu))$ は，$\beta\neq1$ のときのワルラス法則を用いれば，$(1-\beta^\nu)p^{\nu\prime}z(p^\nu,\beta^\nu p^\nu)$ あるいは $(1/\beta^\nu)(\beta^\nu-1)p^{\nu\prime}y(p^\nu,\beta^\nu p^\nu)$ と書き換えられる。ここでもし $\beta>1$ とすれば，$(1-\beta^\nu)p^{\nu\prime}z(p^\nu,\beta^\nu p^\nu)$ は，$z(p^\nu,\beta^\nu p^\nu)$ したがって $p^{\nu\prime}z(p^\nu,\beta^\nu p^\nu)$ が下から有界で，$1-\beta^\nu$ が負であるところから，上から有界となる[32]。また $\beta<1$ とすれば，$(1/\beta^\nu)(\beta^\nu-1)p^{\nu\prime}y(p^\nu,\beta^\nu p^\nu)$ は，$y(p^\nu,\beta^\nu p^\nu)$ したがって $p^{\nu\prime}y(p^\nu,\beta^\nu p^\nu)$ が同様に下から有界で，$1/\beta^\nu$ が正，$\beta^\mu-1$ が負であるところから，やはり上から有界となる。よってどの途

(32)　キーホー＝レヴァインが “bounded from below” としているのは間違い。

$p^{\nu\prime}(z(p^{\nu}, \beta^{\nu}p^{\nu})+y(p^{\nu}, \beta^{\nu}p^{\nu}))$ は上から有界となるので，矛盾が生じる。

こうして f は S_{ε} の境界上のどんな p に対しても 0 にはなりえないことが判明した。したがって $S_{\varepsilon}\times[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$ の境界上で f が 0 になっている点があるとすれば，それは，int S_{ε} に属してしかも $\beta=\underline{\beta}$ あるいは $\beta=\bar{\beta}$ になっている点のみである。しかし β を $\underline{\beta}\leqq\beta\leqq\bar{\beta}$ のどこか，なかんずく $\beta=\underline{\beta}$ あるいは $\beta=\bar{\beta}$ に固定して，そのような β について f を $S_{\varepsilon}\times\{\beta\}$ に限定して定義した場合も，やはりほとんどすべての (β, v) に対して 0 が f の正則値になっているということはできる[33]。つまり $S_{\varepsilon}\times[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$ の内点ばかりでなく，上記の意味でのその境界上でも，0 が generic に f の正則値になっているという帰結には変わりはない。

遺憾なことに $S_{\varepsilon}\times[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$ は閉集合の直積でコーナーをもっているから，境界を含んだスムーズな多様体にはなりえない。が，上述したように，$f^{-1}(0)$ は S_{ε} の境界は含まないので，これらのコーナーからは離れており，したがってそれについてはつぎの逆像定理を適用することができるのである。

逆像定理　y を $f:X\rightarrow Y$ の正則値とすれば，逆像 $f^{-1}(y)$ は X の部分多様体であって，$\dim f^{-1}(y)=\dim X-\dim Y$ となる[34]。

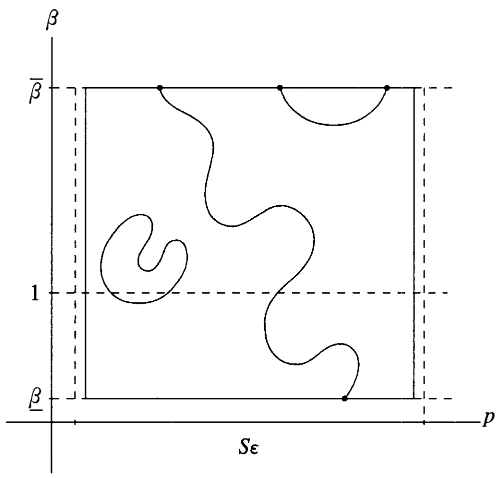
よって $f^{-1}(0)$ は $S_{\varepsilon}\times(\underline{\beta}, \bar{\beta}]$ の部分多様体で，$\dim S_{\varepsilon}\times[\underline{\beta}, \bar{\beta}]=(l-1)+1=l$，また $\dim R^{l-1}=l-1$ であるから，$\dim f^{-1}(0)=\dim S_{\varepsilon}\times[\underline{\beta}, \bar{\beta}]-\dim R^{l-1}=l-(l-1)=1$ となる。すなわち $f^{-1}(0)$ は 1 次元の多様体であり，これは $f=0$ を満たす (p, β) が，多次元の空間のなかでも 1 本の曲線としてあらわされることを意味している。

また上記のように，ほとんどすべての β に対してそのどれかを固定し f を $S_{\varepsilon}\times\{\beta\}$ に制限して考えても，0 がその正則値となるのであるから，その場合の $f^{-1}(0)$ は有限個であり，それに前と同様，指数定理を用いれば，そのときの p の個数は奇数個であることになる。よって，とくに $\beta=\underline{\beta}, \beta=\bar{\beta}$ としたときも，$f^{-1}(0)$ に含まれる p の個数は奇数個であることが分かる。

これらの結果を目で見て会得できるように，p を 1 次元として視覚化したものが第7.1図である。ここで $f^{-1}(0)$ は図中の曲線として描かれており，それは前述のところから β の境界上にくることはできるが，S_{ε} の境界上にくることはできない。β を区間 $[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$ のどこかに定めるとき，ほとんどすべての β の場合それが曲線を截る p の個数は奇数個であり，それが偶数個になるような β の測度はゼロである。さらに $f^{-1}(0)$ は多様体であるから，これらの曲線が互いに交わることは決してない。それらは，図中に例示したように，$\underline{\beta}$ 上の点から出て $\bar{\beta}$ 上の点にいたるか，出発点と同

(33)　これは横断性定理を前のように $Df_v(p, \beta)=[D_{(p, \beta)}f_v(p, \beta)\quad D_vf_v(p, \beta)]$ に対してではなく，$Df_v(p, \beta)=[D_pf_v(p, \beta)\quad D_{(\beta, v)}f_v(p, \beta)]$ として用いることにすれば，ほとんどすべての (β, v) に対して $D_pf_v(p, \beta)$ の階数が，$f_v(p, \beta)=0$ となる任意の p において $l-1$ になるといえるからである。

(34)　V. Guillemin and A. Pollack, *Differential Topology*, 1974, p. 21, 三村護訳『微分位相幾何学』, 1998, p. 26.



第7.1図

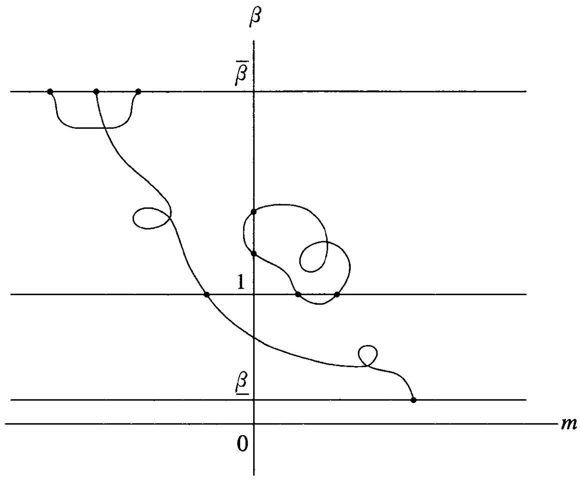
じ $\underline{\beta}$ 上あるいは $\bar{\beta}$ 上の点にまた戻るか，あるいは内部で閉じた環になるかのいずれかである。また $f(p,\beta)=0$ は $\underline{\beta}$ 上あるいは $\bar{\beta}$ 上で奇数個の解をもつのであるから，同じ $\underline{\beta}$ 上あるいは $\bar{\beta}$ 上に戻る曲線があったとしても，少なくとも1本は $\underline{\beta}$ 上から出発して $\bar{\beta}$ 上に達する曲線があるのでなくてはならない。

ところで $f^{-1}(0)$ に含まれる (p,β) はいずれも恒常状態の必要条件を満たし，その候補たりうるが，まだ恒常状態そのものとなるには資格が足りず，さらに加えて $m=0$ の条件を満たしているか，さもなければ $\beta=1$ の条件を満たしているのでなくてはならない。そこで m に関する条件を図形上で表現するため，あらためて $(p,\beta)\in f^{-1}(0)$ となっているすべての (p,β) について $m(p,\beta)=-p'y(p,\beta)$ と定義し，

$$\{(p,\beta,m)\in S_\varepsilon\times[\underline{\beta},\bar{\beta}]\mid f(p,\beta)=0,\ m=m(p,\beta)\}$$

を満たす m のグラフを考えることにする。それは明らかに境界を含む1次元のスムーズな多様体であり，$f^{-1}(0)$ と微分同相である。恒常状態はその m のグラフが $m=0$ を満たす $S_\varepsilon\times[\underline{\beta},\bar{\beta}]\times R$ の $l-1$ 次元部分多様体と交わる点か，あるいは $\beta=1$ を満たす $l-1$ 次元部分多様体と交わる点にほかならない。そしてこれらの事情を理解するには，$S_\varepsilon\times[\underline{\beta},\bar{\beta}]$ を $[\underline{\beta},\bar{\beta}]\times R$ 上に射影して，そこに描かれる曲線を見るのがもっとも手っ取り早い。

前掲の第7.1図を用いていえば，つぎのようなことになろう。まず図の平面に垂直に m を測る軸を原点に立て，図中の曲線上の各点 (p,β) に応ずる m の値すなわちそれぞれの (p,β) に立てた柱の頂点が描く軌跡を，図の左の β 軸と，それに直交する m 軸とがつくる平面上に映すとする。その結果を図示したものが第7.2図である。



第7.2図

この射影は明らかにいわゆる嵌め込み型の写像（immersion）になっているから，スムーズ性は維持されている。しかし一方，m のグラフが自己と交わる可能性は排除しえないから，それは位相同型にはなりえず，したがって埋め込み型の写像（embedding）になることはできない。(35)

さて以上に述べてきたところを総合して考えれば，所期の帰結を導き出すことはもはや容易であろう。$\beta=\underline{\beta}$ 上には前述したように $f^{-1}(0)$ の点が奇数個あり，それらの点では境界条件によってかならず $m(p, \beta p)>0$ となっている。他方 $\beta=\bar{\beta}$ 上にはやはり $f^{-1}(0)$ の点が奇数個あり，そこでは同じ理由から逆に $m(p, \beta p)<0$ となっている。(36) そして前者の点からは，そこから出発して後者の点にいたるグラフがかならず少なくとも1本は存在し，仮定 A. 4 からそれは $(1, 0)$ の点を通ることはできない。しかも仮定 A. 5 からそれは $\beta=1$ の直線を横断的に截り，また仮定 A. 6 から $m=0$ の直線を横断的に截るのでなくてはならない。よってそれは $m=0$ の直線と $\beta<1$ のところで交わるか，あるいは $\beta=1$ の直線と $m>0$ のところで交わるかのいずれかであるほかはない。つまり $\beta<1, m=0$ の恒常状態か，さもなければ $\beta=1, m>0$ の恒常状態がかならず存在しなければならないことになる。他方，同様のグラフを $\bar{\beta}$ 上の点から $\underline{\beta}$ 上の点にいたる方向で見れば，同じ推論をつうじてそれは $\beta=1$ の直線と $m<0$ のところで交わるか，あるいは $m=0$ の直線と $\beta>1$ のところで交わるかのいずれでしかないことが分かり，これは $m<0, \beta=1$ の恒常状態か，$\beta>1, m=0$

(35) 嵌め込みならびに埋め込みの概念については，Guillemin and Pollack, *op. cit.*, p. 14 および p. 17, 三村訳，p. 17 および pp. 20-21 参照。

(36) すでに第4節で示したように，すべての $\beta\leqq\underline{\beta}$，すべての $p\in S_\varepsilon$ について $-p'y(p, \beta p)>0$ となっており，またすべての $\beta\geqq\bar{\beta}$，すべての $p\in S_\varepsilon$ について $-p'y(p, \beta p)<0$ となっている。

の恒常状態かがかならず存在することを意味している。

よって以上のところから，$\beta \leqq 1$ かつ $m \geqq 0$ の恒常状態が少なくとも1個は存在し，また $\beta \geqq 1$ かつ $m \leqq 0$ の恒常状態が少なくとも1個は存在することが知られるのである。(この稿つづく)

(名誉教授)