Title	均衡と時間I : 有限主体・無限計画期間モデルの場合
Sub Title	Equilibrium and time I : a model with a finite number of infinitely lived agents
Author	福岡, 正夫(Fukuoka, Masao)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2001
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.93, No.4 (2001. 1) ,p.689(19)- 719(49)
JaLC DOI	10.14991/001.20010101-0019
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20010101-0019

「三田学会雑誌」93巻4号（2001年1月）

均衡と時間 I

——有限主体・無限計画期間モデルの場合*——

福岡正夫

1

時間をつうじてかならずしも定常状態にはない経済の均衡を通時的均衡（intertemporal equilibrium）ないしは完全予見均衡（perfect forsight equilibrium）として概念化する試みは，ハイエクやヒックスとともに古い(1)。しかし，そのような構想に伴う財の種類数，場合によっては主体数の無限性が提起する問題に理論家がまともな注意を向けはじめたのは，比較的近年のことではないかと思われる(2)。

いうまでもなく経済モデルに時間を導入するもっとも簡単な方法は，それぞれの財に期日をつけ，物的には同一であっても期日を異にする財たとえば今年のコメと来年のコメを別種の財としてとり扱うことであり，それは場所を異にする財たとえば生産地のコメと消費地のコメを別種の財として扱うのと同様であると考えられてきた。そのような便法を容認した上で時間や空間を連続的と考えれば，財の種類数は当然無限とならざるをえないが，それらを離散的と考えたとしても，時間に関するかぎりはそれが将来に限りなく拡がっているところから，やはり財の数は無限とならざるをえ

---

* 本稿は須田伸一教授との勉強会の産物である。貴重な教示を恵与された同教授ならびに匿名査読者のご好意に対して，深甚の謝意を表しておきたい。

（1） Friedrich A. Hayek, “Das intertemporale Gleichgewichtssystem der Preise und die Bewegungen des ‘Geldwertes’”, *Weltwirtschaftliches Archiv*, No. 2, 1928, John R. Hicks, “Gleichgewicht und Konjunktur”, *Zeitschrift für Nationalökonomie*, No. 4, 1933.

これらの論文は今日いずれも英訳され，のちの論文集に収録されている。F. A. Hayek, “Intertemporal Price Equilibrium and Movements in the Value of Money”, in Roy McCloughry ed., *F. A. Hayek, Money, Capital and Fluctuations : Early Essays*, 1984, Chapter 4, および John Hicks, *Money, Interest and Wages : Collected Essays on Economic Theory*, Vol. II, 1982, Chapter 3. とりわけ前者についてはその pp.72-77を，後者については pp.31-33を参照されたい。

（2） たとえば Karl Shell, “Notes on the Economics of Infinity”, *Journal of Political Economy*, September/October 1971 参照。

ない。したがってどのみち理論家は，その種の無限性がひき起こす分析上の諸論点に当面するほかはないのである。

ところで時間には元来，空間とはまた違ったある種の特性が伴っている。一つには現在時点を境として，過去は既知で確定しているが、将来は未知で可能性の幅をもつといった非対称性がある。それゆえ将来を含む均衡分析は，リスクないしは不確実性を重要な現象としてとり扱わざるをえない。しかし，いまさしあたってその種の問題はさておくとしても，なお時間にはもう一つ方向性ないしは不可逆性とも呼ぶべき他の特性がある。つまり時間をつうじて生起する諸現象はすべてあと先の順序をもち，その継起を逆にすることは不可能である。茶碗がテーブルから落ちて床に砕け散る様は誰しも目にすることがあろうが，逆にそれらの破片が床からテーブルにとび上がってまとまる様は決して見られないであろう。

以下本稿および次稿では，このようにもっぱら将来に向かって無限に進行する時間の中にある経済を対象とし，それをモデル化するにあたって含まれてこざるをえない上記の無限性がもたらす論点を解明する作業に努めてみたい。そのような目論見を実現するにさいしてまずわれわれが考慮しなければならないのは，対象となる経済がどこかで終末を迎えるのでないかぎり，組織体としての経済自体はいつまでも続いていくが，一方それを構成する個々の主体なかんずく消費者としての各個人は有限の寿命しかもたないという明白な事実である。その間（かん）の関係を分析上いかに処理するかをめぐっては，現在のところ相対比されるべき二つの理論モデルが択一的に存在している。その一つは，一貫して経済主体数を有限個数として処理し，そのそれぞれが不死の主体であって無限の将来にわたって最適化計画を立てると考えるものであり，もう一つは，各主体の寿命はおしなべて有限であるが，世代を異にするそのような主体が入れ替わり立ち替わり現れて限りなく新陳代謝を続けていくと想定するものである。すなわち前者は無限期間生きる有限個主体から成るモデルを構成しているのに対して，後者は有限期間しか生きない無限数主体から成るモデルを構成しているのである。

特定の1個人が不老不死でありえない以上，前者のタイプのモデルをもっともらしく解釈するには，そこでの各主体とはそれぞれが一つの家系であり，同一の家系に属する歴代の個人は不死ではないがつねに子々孫々のことまでをも考慮に入れて無限期にわたる最適化行動をとると考えるべきものであろう。すなわち，親が子の世代のことをも考え，子どももまた自分の子（もとの親から見れば孫）の世代のことを考えて行動するのであれば，その結果，親は子の子である孫の世代，さらには孫の子である曾孫（ひまご）の世代と，ずっとさきの子孫の経済状態をも間接に考慮して行動することになり，これは結局親の世代が無限にさきの世代のことにまで関心をもって行動することを意味するのである。同じ家系に属する各世代の個人はみな相似であると仮定すれば，これはこれで多少拵えすぎの感はあるにせよ，一つの首尾一貫した論理構成をもつと考えることができよう。現にニュー・クラシカルの立場に立つマクロ経済理論家のあいだでは，国債の世代間負担の問題などをはじ

めとしてこうした分析的アプローチが多用されているのが現状である。

他方このような万世一系モデルに対比されるべきもう一つのアプローチはいわゆる重複世代モデル（overlapping generations model）であり，この立場においては各世代の個人は後代のことをいっさい考えず，もっぱら有限の自分のライフ・スパンだけに限定された最適化行動をとると想定されている。したがってこのモデルでは，経済はつねに世代を異にする老若さまざまな年齢の主体から構成され，毎期人生の終末を迎えて市場を去る個人がいる一方，新しく誕生して市場に参加する個人が現れる。すなわち経済は，そうした世代間の交替をつうじて限りなく継続されていくのである。

前者のモデルでは未来永劫にわたる子孫への遺贈が考慮されており，また無限のさきまで予算制約式を一本化して考えるのがつねである。これに対して後者のモデルでは子孫への遺贈はまったく考慮されておらず，予算制約条件もまた当然自分の生存期間のみに限定されることになる。そのような意味においては，これらのモデルはいわば両極端のケースをあらわしているということができよう。現実の当事者たちは前者のそれよりはるかに近視眼的であり，それほど超合理的な行動をとるとは思われないが，さりとて相続について何らの配慮をも払わないというわけでもないから，真実はつねに両極のあいだにあるといわねばならない。事実，前者型のモデルでも，最適化計画が将来のどこかに期末をもつと想定されるか，あるいはまた資本市場が不完全で貸借関係に何がしかの制約があると想定されれば，それは重複世代モデルにいく分か近づくことになるであろう。また後者型のモデルであっても，資産が一代かぎりで消費されつくさず，次世代に若干の遺贈がなされると想定されれば，それは多少とも前者に似通った性格をもつことになろう。

ただそういった場合も，かりに有限の将来世代までの遺贈計画にとどまるとすれば，その期末にすべてが蕩尽されるのでないかぎり，さらにそののちの将来に残される資産を評価することが不可避となり，これを順繰りに繰り返していけば，結局は計画期間を限りなくさきに延ばしていくほかはない。つまり理論上，無限期間の最適化という一見非現実的な着想を巧みに免れうる逃げ道といったものは存在していないのである。

このような理由にもとづき，本稿とその続稿においては，もっぱら定式化のもっとも簡明な両極モデルのみをとり上げることとし，まず本稿では前者すなわち有限個の永続家系モデルのほうを，ついで続稿では後者すなわち重複世代モデルのほうを論考の対象とする。いずれの場合も，時間は離散的な形すなわち $t=0,1,2,\cdots\cdots$ の形で扱うから，前者のモデルでは財の種類数が可付番の無限個となり，後者のモデルでは財の種類数と主体数の両方が可付番の無限個となる。前述したように，そうした無限次元のモデルが新たに提起する問題点を究明しかつ解決すること，そして二つのモデルで帰結にどのような差が生じてくるかを照査すること，が以下での分析の主眼をなしている。

無限期にわたって消費計画を立てる有限個数の主体がいる純粋交換経済を考え，各期 $t=0, 1, 2,$ …… にはそれぞれ l 種類の財 $h=1, 2, \cdots\cdots, l$ と n 人の主体 $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ が存在するものとする。(3) t 期の i 主体の消費ベクトルは

$$x_{it}=(x_{1it}, x_{2it}, \cdots\cdots, x_{lit})$$

のように，したがって全計画期間にわたるその消費計画ベクトルは $x_i=(x_{i0}, x_{i1}, \cdots\cdots)$ のようにあらわされる。また各主体は

$$V_i(x_i)=\sum_{t=0}^{\infty}\delta_i^t u_i(x_{it})$$

の形をとる効用関数と，毎期同一と仮定される初期賦存量ベクトル

$$\omega_i=(\omega_{1i}, \omega_{2i}, \cdots\cdots, \omega_{li})$$

によって特徴づけられ，ここで δ_i は $0<\delta_i<1$ を満たす時間割引率である。u_i と ω_i については，以下一貫してつぎのような仮定が設定される。

A.1　$u_i : R_{++}^l \to R$ は C^2 級で，厳密に凹かつ単調。

A.2　$\omega_i \in R_{++}^l$, $i=1, 2, \cdots\cdots, n$。

また

$$Du_i(x_{it})=\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{1it}}, \frac{\partial u_i}{\partial x_{2it}}, \cdots\cdots, \frac{\partial u_i}{\partial x_{lit}}\right)$$

とすれば，

A.3　$x_{it}\to x$ で x が 0 成分を含むときには $\|Du_i(x_{it})\|\to\infty$。

　ただし x_{it} が R_{++}^l の有界部分集合に含まれているかぎりは $Du_i(x_{it})x_{it}$ は有界。

よく知られているように，最後の仮定の前半部はコーナー解を排除するためのもので，財の組み合わせが正象限の境界に近づくと無差別曲線がその座標超平面に平行になることを意味している。また後半部は，後出の所得移転額の無限和についてその一様収束性を保証する上で枢要な役割を果

(3)　以下のモデル構成については Timothy J. Kehoe, "Intertemporal General Equilibrium Models" in Frank Hahn ed., *The Economics of Missing Markets, Information, and Games*, 1989 および T. J. Kehoe and David K. Levine, "Comparative Statics and Perfect Foresight in Infinite Horizon Economies", *Econometrica*, March 1985 を参照されたい。

たすことになろう。

各期 t の価格ベクトルを $p_t=(p_{1t}, p_{2t}, \cdots\cdots, p_{lt})$, $t=0, 1, 2, \cdots\cdots$ とすれば，主体 i の行動は，所与の価格に対してつぎの効用最大化問題を解くこととしてあらわされる。

$$\text{Maximize} \quad V_i(x_i)=\sum_{t=0}^{\infty}\delta_i^t u_i(x_{it})$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{t=0}^{\infty}p_t x_{it} \leqq \sum_{t=0}^{\infty}p_t \omega_i$$

仮定 A.1～A.3 の下でこの問題が解をもてば，それはかならず厳密に正となり，かつ予算制約式を等号で満たすことになる。計画 $x_i=(x_{i0}, x_{i1}, \cdots\cdots)$ がその解となっているための必要十分条件は

$$\delta_i^t Du_i(x_{it})=\mu_i p_t \quad \text{for some} \quad \mu_i>0 \ (t=0, 1, 2, \cdots\cdots) \tag{2.1}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty}p_t x_{it}=\sum_{t=0}^{\infty}p_t \omega_i \tag{2.2}$$

が成立することであり，したがって経済 $((u_i, \delta_i, \omega_i)$, $i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ の競争均衡は，

すべての主体 $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ について $(x_{i0}, x_{i1}, \cdots\cdots)$ が上記 (2.1) および (2.2) の解となっていること。 (2.3)

$$\sum_{i=1}^{n}x_{it}=\sum_{i=1}^{n}\omega_i, \quad t=0, 1, 2, \cdots\cdots \tag{2.4}$$

の 2 条件を満たす価格ベクトル $(p_0, p_1, p_2, \cdots\cdots)$ と消費ベクトル $(x_{i0}, x_{i1}, x_{i2}, \cdots\cdots)$, $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ の組として定義される。

このような経済均衡を制度の視点から解釈する上では，二通りの仕方がある。その第一は，将来のどの期についても先物市場が完備しており，p_t, $t=1, 2, \cdots\cdots$ は先物価格のベクトルを意味していると解するものである。そう解釈する場合には，事実上の財のやりとりはそれぞれの期になってから行われるものの，取引の決定はすべて最初の期に同時かつ一斉に行われてしまうことになる。これに対して第二の解釈では，経済には現物市場しかなく，したがって価格の決定や取引の成立は当該の期がこないと実現しないと考えられる。それゆえこの解釈が最初のそれと整合するためには，各主体が完全予見という超能力をもち，将来成立するはずの現物市場価格の均衡値を事前にすべて正しく予想できること，また資本市場が完全であって，誰もが市場利子率の下で望みどおりの貸借を行いうること，の二つが仮定されるのでなくてはならない。

後者のようにモデルを解する場合には，上記の価格ベクトル $p_t=(p_{1t}, p_{2t}, \cdots\cdots, p_{lt})$, $t=1, 2, \cdots\cdots$ は厳密には将来決定される現物価格を現在時点まで割り引いた割引現物価格のベクトルと解すべきものである。すなわちいま t 期の現物価格ベクトルを $\hat{p}_t=(\hat{p}_{1t}, \hat{p}_{2t}, \cdots\cdots, \hat{p}_{lt})$ と書けば，t と $t+1$ のあいだの利子率を r_t として

$$p_t = \frac{\hat{p}_t}{(1+r_0)(1+r_1)\cdots\cdots(1+r_{t-1})} \quad t=1, 2, \cdots\cdots$$

の関係が成立する。第二の解釈の場合の予算制約式は，元来

$$\begin{aligned}
&\hat{p}_0 x_{i0} + m_{i0} \leqq \hat{p}_0 \omega_i \\
&\hat{p}_1 x_{i1} + m_{i1} \leqq \hat{p}_1 \omega_i + (1+r_0) m_{i0} \\
&\quad\vdots \\
&\hat{p}_t x_{it} + m_{it} \leqq \hat{p}_t \omega_i + (1+r_{t-1}) m_{i,\,t-1} \\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

のようにその期ごとにバラされた形で成立し，ここで m_{it} は，$m_{it}>0$ のときには主体 i が t, $t+1$ 間で行う貸付け，$m_{it}<0$ のときには同じく借入れを意味する内部貨幣であると解される。しかし，いまこれらの予算制約式の $t=1$ 以降のものをそれぞれ $(1+r_0)(1+r_1)\cdots\cdots(1+r_{t-1})$ で割って，$t=0$ から $t=T$ までについて足し合わせると，前記の p_t と $\hat{p}_t$ との関係から

$$\sum_{t=0}^{T} p_t x_{it} + \frac{m_{iT}}{(1+r_0)(1+r_1)\cdots\cdots(1+r_{T-1})} \leqq \sum_{t=0}^{T} p_t \omega_i$$

という式が導かれる。ゆえに

$$\lim_{T\to\infty} \frac{m_{iT}}{(1+r_0)(1+r_1)\cdots\cdots(1+r_{T-1})} = 0$$

という条件さえ満たされれば，第二の解釈の場合もその予算制約式は第一の解釈の場合のそれとまったく同じものになるのである。

上記の条件はかならず成り立つと考えてよいであろう。というのは，もし左辺が極限値をもたず，無限に発散したりいつまでも振動しつづけたりするとすれば，それは明らかに均衡と両立しないからである。すなわち借入れが無制限に許されるとすれば，当該の主体は少なくともある財に関するかぎりはそれをいくらでも購入することができ，したがって効用関数の単調性の仮定から効用の最大値をもつことができない。また貸手と借手のあいだを絶えず動揺するといったような事態が均衡に反することも，言を俟たないところである。そこで左辺に極限値 $\bar{m}_i$ が存在したとして，それが非ゼロであったとすれば，その場合はその場合で，やはり不合理が生ぜざるをえないのである。というのは，どの主体も $\bar{m}_i$ が負となるような選択をするであろうから，均衡では

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t x_{it} + \bar{m}_i = \sum_{t=0}^{\infty} p_t \omega_i, \quad i=1, 2, \cdots\cdots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{m}_i = \bar{m} < 0$$

となり，したがって主体について合計すれば

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=0}^{\infty}p_t x_{it}+\overline{m}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=0}^{\infty}p_t \omega_i$$

となるが，他方需給均衡方程式（2.4）に価格を掛け t について合計すれば

$$\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}p_t x_{it}=\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}p_t \omega_i$$

となるほかはないからである。

なお目下のモデルでは，前述したように m_{it} は内部貨幣と解されるが，一方そのような主体間の貸借関係に裏付けされない外部貨幣は存在できない。事実いまかりに外部貨幣の存在を認め，

$$\sum_{i=1}^{n}m_{it}=m_t>0$$

になるとすれば，やはり前のパラグラフと同様の推論をあてはめることにより，明らかに矛盾が導かれるのである。こうして外部貨幣の存在は当面のモデルと相容れないが，これと対照的に次稿の重複世代モデルの場合には，外部貨幣が一種の social contrivance（サミュエルソン）として顕著な役割を果たすことになる。この点がこれら二つのモデルの重要な相違点の一つをなしている。

3

さてここで，上に定義した競争均衡のもつさまざまな性質を明らかにする作業にとりかかろう。なかんずく重複世代モデルとの比較において焦点となるのは，それぞれのモデルの均衡がすべてパレート最適性を満たすかどうかの検討と，それらの均衡が実質上有限個の孤立点ばかりから成るかそれとも連続体をなすものをも含むかの究明である。

本稿で扱う有限個主体，無限計画期間のモデルの場合は，競争均衡がパレート最適となること，またほとんどすべての場合有限個の孤立点のみから成ることのいずれに対しても肯定的な答えを与えることができる。しかし，そのための推論の運びには，有限次元のモデルの場合とは異なり少なからぬ工夫を凝らすことが必要となる。この点についてはわれわれはキーホーの刮目すべき着想に負い(4)，つぎのような手順で事を進めることにする。すなわち上記の均衡条件（2.3）および（2.4）が無限個の方程式と無限個の未知数を含み，取扱いが困難であるところから、これをそれと同値でしかも有限個の方程式と有限個の未知数を含む条件に転換させ，もっぱら後者によって均衡を特徴づけようとするのである。この離れ業を演ずるにあたってキーホーが活用したのが，効用の加重和であらわされた経済的厚生を最大化することで競争均衡を特徴づけようとした1960年の根岸モデル(5)であった。

（4） Kehoe, *op.cit.*, pp.368-370, Kehoe and Levine, *op.cit.*, pp.437-439 参照。

元来の根岸モデルは有限種類数の財をもつ経済を対象としたものであるが，それを目下の無限次元モデルにあてはめると，つぎのような経済的厚生最大化問題が定式化されることになる。すなわちいま $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n)$ をある厳密に正のウェートのベクトルとし，それを用いて加重された効用の総和を $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i V_i(x_i)$ で定義すれば，

$$\text{Maximize} \quad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i V_i(x_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{t=0}^{\infty}\delta_i^t u_i(x_{it})$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n}x_{it}\leqq\sum_{i=1}^{n}\omega_i, \quad t=0, 1, 2, \cdots\cdots$$

と書かれる問題がそれである。

ふたたび仮定 A.1～A.3 の下では，この問題は厳密に正で制約条件を等式で満たす解をもち，その必要十分条件は

$$\lambda_i\delta_i^t Du_i(x_{it})=\pi_t \quad \text{for some} \quad \pi_t>0 \quad i=1, 2, \cdots\cdots, n, \quad t=0, 1, 2, \cdots\cdots \tag{3.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{it}=\sum_{i=1}^{n}\omega_i \quad t=0, 1, 2, \cdots\cdots \tag{3.2}$$

のように記される。ここで $\pi_t=(\pi_{1t}, \pi_{2t}, \cdots\cdots, \pi_{lt})$ が上記の制約条件に伴うラグランジュ乗数（いわゆる影の価格）のベクトルであることは，いうまでもない。

以下においては，前述の競争均衡条件（2.3）および（2.4）がいま導いた最適条件（3.1）および（3.2）と同値になることをまず示す。はじめに（2.3），（2.4）を満たす競争均衡解から出発し，そこでの $\mu_i>0$ を用いて

$$\lambda_i=\frac{1}{\mu_i}, \quad i=1, 2, \cdots\cdots, n$$

と定義すれば，（2.3）から

$$\lambda_i\delta_i^t Du_i(x_{it})=p_t, \quad i=1, 2, \cdots\cdots, m$$

となる。そこで p_t を π_t とおけば，ある $\pi_t>0$ が存在して，それについて（3.1）の等式が満たされることになる。（2.4）は（3.2）と同じ式であるから，これで（2.3），（2.4）が（3.1），（3.2）を意味することが示された。厚生最大化問題の解はいうまでもなくパレート最適解であるから，上記の推論をつうじて目下のモデルの競争均衡はかならずパレート最適となること，すなわち厚生経済学の第一基本定理が成り立つこと，が示されたわけである。

他方逆に第二基本定理のほうもまた成立し，そのことにもとづいて（3.1），（3.2）から（2.3），

（5） Takashi Negishi, "Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy", *Metroeconomica*, Vol. XII, Agosto-Dicembre 1960.

(2.4) が導かれることがつぎのような推論をつうじて明らかとなる。まずある $\pi_t>0$ があって (3.1) が満たされているとしよう。するとその π_t について $\pi_t=p_t$ とおき，さらに所与の λ_i について $\mu_i=1/\lambda_i$ とおくことにより (3.1) からただちに (2.1) が導かれる。そして (3.2) から当然 (2.4) が成立するから，これで所与の λ の下で求められるパレート最適解が，各主体の予算制約式 (2.2) を除く競争均衡条件のすべてを満たすことが示された。つまりどんなパレート最適解も所得の移転を伴う競争均衡になっているという周知の帰結が，当面の場合もやはり成り立つのである。よって残された推論は，もっぱら (2.2) を満たすような正しいウェート λ，すなわち所得の移転を行わなくても最適解が当初の ω_i の下での競争均衡解となるような λ，を見出しうることの証明に充てられる。

ここからが思案のしどころとなるが，まずそのために任意所与の λ の下で得られる最適化問題の解を $\pi_t(\lambda), x_t(\lambda)$ のように記し，$\pi_t(\lambda)$ を $p_t(\lambda)$ とおいて，$s_i(\lambda)$ を

$$s_i(\lambda)=\sum_{t=0}^{\infty}p_t(\lambda)(\omega_i-x_{it}(\lambda)),\quad i=1,2,\cdots\cdots,n \tag{3.3}$$

のように定義することにしよう。もし $s_i(\lambda)$ がそう定義できるとすれば，それは当該の λ の下での最適解を競争均衡として実現する上で必要とされる所得の移転額を意味することになる。よって上記のわれわれの課題は，

$$s_i(\lambda)=0,\quad i=1,2,\cdots\cdots,n \tag{3.4}$$

となるような λ が存在することを示す仕事に絞られる。そのような λ が存在すれば，その下で解かれる最適解が，元来の競争均衡解と一致する解すなわち予算制約式 (2.2) をも満たす解を与えることになるのである。

が実は (3.3) のような $s_i(\lambda)$ がきちんと定義できるためには，右辺に t に関する無限和が含まれるところから，それなりに周到な数理による基礎づけが必要である。キーホーたちの所論では(6)その点がやや簡略に処理されている感があるので，以下では細部を充填しつつなるべく明解に筋が辿れるような推論を志したい。

はじめにまず示さねばならないのは，前記の仮定 A.1～A.3 の下で (3.3) 右辺の無限和が R^n_{++} のどんなコンパクト部分集合上でも一様に収束すること，その結果 $s_i(\lambda)$ が首尾よく定義でき，各項 $p_t(\lambda)(\omega_i-x_{it}(\lambda))$ が連続であれば，無限和 $s_i(\lambda)=\sum_{t=0}^{\infty}p_t(\lambda)(\omega_i-x_{it}(\lambda))$ もまた連続になること，である。いまそれらのことを示すにあたって，しばらくのあいだ $p_t(\lambda)(\omega_i-x_{it}(\lambda))=a_t(\lambda)$ とおいて，記号を簡略化することにしよう。すると当面の目的にぴったり適合する数学の定理として，われわれは下記の定理(7)を援用することができるのである。

---

(6) Kehoe, *op.cit.*, p.369, Kehoe and Levine, *op.cit.*, p.438.

定理A　Λ を R^n_{++} のコンパクト部分集合とするとき，すべての $\lambda\in\Lambda$ についてつねに $|a_t(\lambda)|\leqq b_t,\ b_t\geqq 0$ で，かつ $\sum_{t=0}^{\infty}b_t<\infty$ となるような $\{b_t\}_{t=0}^{\infty}$ があるならば，

（イ）$\sum_{t=0}^{\infty}a_t(\lambda)$ は Λ 上で一様に収束する。

（ロ）各項 $a_t(\lambda)$ が Λ 上で連続ならば，和 $\sum_{t=0}^{\infty}a_t(\lambda)$ もまた Λ 上で連続である。

上でわれわれが示さねばならぬといった主張は上記定理（イ），（ロ）の帰結にほかならないから，結局われわれは仮定A.1～A.3の下で定理の前件すなわちすべての $\lambda\in\Lambda$ について $|a_t(\lambda)|\leqq b_t$, $b_t\geqq 0$, $\sum_{t=0}^{\infty}b_t<\infty$ となるような $\{b_t\}_{t=0}^{\infty}$ があることと，（ロ）の前件 $a_t(\lambda)$ が Λ 上で連続になること，の二つを示せばよいわけである。

後者については簡単で，まず仮定A.1により u_i は厳密に凹であるから，$x_{it}(\lambda)$ は λ に対して一意に決定され，周知のベルジュの定理から λ の連続関数となる。また，やはり仮定A.1により Du_i が x_{it} の連続関数であるところから，(3.1) の左辺も λ の連続関数となり，したがって π_t すなわち p_t も一意で λ の連続関数となる。よって $a_t(\lambda)=p_t(\lambda)(\omega_i-x_{it}(\lambda))$ は一意に定まり，λ の連続関数となる。

つぎに前者すなわち定理Aの前件が満たされることの証明に移る。いま一般性を失うことなく $\delta_1=\max\delta_i,\ i=1,2,\cdots\cdots,n$ とすれば，(3.1) から

$$a_t(\lambda)=\lambda_i\delta_i^t Du_i(x_{it}(\lambda))(\omega_i-x_{it}(\lambda))$$
$$=\lambda_i\delta_1^t\left(\frac{\delta_i}{\delta_1}\right)^t Du_i(x_{it}(\lambda))(\omega_i-x_{it}(\lambda))$$

と書くことができる。ここでまずどんな $\lambda\in\Lambda$, $t=0,1,\cdots\cdots$ に対しても

$$\|\omega_i-x_{it}(\lambda)\|\leqq c$$

となるような $c>0$ があることは自明である。なぜなら $0<x_{it}(\lambda)\leqq\sum_{k=1}^{n}\omega_i$ であり，ω_i の成分はすべて正，しかも λ, t に対して独立だからである。

そこでつぎに，やはりどんな $\lambda\in\Lambda,\ t=0,1,\cdots\cdots$ に対しても

$$\left\|\lambda_i\left(\frac{\delta_i}{\delta_1}\right)^t Du_i(x_{it}(\lambda))\right\|\leqq d$$

となるような $d>0$ があることを示すことにしよう。ふたたび (3.1) により

$$\lambda_i\delta_i^t Du_i(x_{it}(\lambda))=p_t(\lambda)=\lambda_1\delta_1^t Du_1(x_{1t}(\lambda))$$

であるから，上記の主張は

（7）　この定理については小平邦彦『解析入門II』，岩波講座基礎数学9，1976，p.218，あるいは同じことであるが同『解析入門』，岩波基礎数学選書，1991，p.220参照。

$$\|\lambda_1 Du_1(x_{1t}(\lambda))\| \leqq d$$

となる $d>0$ があるということと同値である。以下でそのことを立証するが，そのためにはあらかじめ $x_{1t}(\lambda)$ が R^l_+ の境界点には収束しないこと，すなわちある $\varepsilon>0$ が存在して

$$(\varepsilon, \cdots\cdots, \varepsilon) \leqq x_{1t}(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda, \forall t=0, 1, \cdots\cdots$$

となることが保証されるのでなくてはならない。というのは，もし境界点への収束が生じたとすれば，仮定 A.3 の前半部から $\|Du_1(x_{1t})\| \to \infty$ とならねばならないからである。

そこでいま背理法の仮定として，事実そのようなことが生じたとしてみよう。するとそのことからは，少なくともある財 h とある t の点列 $\{t'\}$ について $Du_1(x_{1t'})_h \to \infty$ とならねばならないことになる。ところがこんどは A.3 の後半部から $Du_1(x_{1t})x_{1t}$ は有界であるから，上記の事実の下では $x_{h1t'} \to 0$ となるのでなくてはならない。他方

$$Du_i(x_{it})_h = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)\left(\frac{\delta_1}{\delta_i}\right)^t Du_1(x_{1t})_h, \quad i \neq 1$$

であるところから，前記のように $Du_1(x_{1t'})_h \to \infty$ となるのであれば，$Du_i(x_{it'})_h \to \infty$ ともならねばならず，ふたたび A.3の後半部から $x_{nit'} \to 0$ となる。よって第 h 財についてはすべての個人の $x_{hit'}$ が 0 に収束することになるが，これは（$x_{1t}, \cdots\cdots, x_{nt}$）がパレート最適であることに矛盾する。なぜならそれがパレート最適であれば，定義から $\sum_{i=1}^n x_{hit} = \sum_{i=1}^n \omega_{hi} > 0$ とならねばならないからである。よって仮定 A.3 の下では，どの財についても $x_{h1t} \geqq \varepsilon > 0$ となるのでなくてはならない。

こうして x_{1t} の動きうる範囲は $(\varepsilon, \cdots\cdots, \varepsilon) \leqq x_{1t} \leqq \sum_{i=1}^n \omega_i$ を満たす R^l_{++} のコンパクト集合 C に限定され，どんな $\lambda \in \Lambda$，どんな $t=0, 1, \cdots\cdots$ についても x_{1t} は C に含まれていなければならないことが判明した。すると，仮定 A.1 から $Du_1(x_{1t})$ は連続であるから，$Du_1(C)$ もまたコンパクト集合となり，$\lambda_1 Du_1(x_{1t}(\lambda))$ は有界となる。よって $\|\lambda_1 Du_1(x_{1t}(\lambda))\| \leqq d$ となるような $d>0$ があることになるのである。

これでそれぞれ

$$\|\omega_i - x_{it}(\lambda)\| \leqq c$$

$$\left\|\lambda_i \left(\frac{\delta_i}{\delta_1}\right)^t Du_i(x_{it}(\lambda))\right\| \leqq d$$

となるような $c, d>0$ の存在することが示されたので，当然 $\omega_i - x_{it}(\lambda)$ および $\lambda_i \left(\frac{\delta_i}{\delta_1}\right)^t Du_i(x_{it}(\lambda))$ の各成分の絶対値もそれぞれ c, d によって上から押えられ，

$$|a_t(\lambda)| \leqq \delta_1^t (d, \cdots\cdots, d) \begin{pmatrix} c \\ \vdots \\ c \end{pmatrix} = \delta_1^t lcd$$

と書けることになる。よって

$$lcd=b, \quad \delta_1^t b=b_t$$

とおけば，$|a_t(\lambda)|\leqq b_t$, $b_t>0$ となるような b_t が存在し，しかも

$$\sum_{t=0}^{\infty} b_t=\sum_{t=0}^{\infty}\delta_1^t b=\frac{1}{1-\delta_1}b<\infty$$

となるので，定理Aの前件がすべて満たされることになったのである。

これだけの議論をつうじて前記定理A（イ），（ロ）の帰結がすべて成立し，$s_i(\lambda)$ が R^n_{++} の任意のコンパクト集合上で一様に収束すること，したがって λ について連続関数になること，の根拠が確立されたことになる。

つぎに $s_i(\lambda)$ は λ について1次同次関数になることが容易に分かる。事実（3.1）および（3.2）で λ を α 倍（$\alpha>0$）したとき，x_{it} を不変に保って p_t を α 倍すれば，やはりそれらはすべて満たされる。よって（3.3）の定義から，s_i の値もまた α 倍になるのである。

さらに加えて $s_i(\lambda)$ の i に関する合計はゼロになる。すなわち

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}s_i(\lambda)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=0}^{\infty}p_t(\omega_i-x_{it})\\&=\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}p_t(\omega_i-x_{it})\\&=\sum_{t=0}^{\infty}p_t\sum_{i=1}^{n}(\omega_i-x_{it})\end{aligned}$$

であるが，最後の式は（3.2）から $=0$ となるほかはない。

という次第で以上に導いた $s_i(\lambda)$ の三性質を考慮に入れ，$f_i(\lambda)=s_i(\lambda)/\lambda_i$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ という新関数を定義すれば，それは n 種の財をもつ純粋交換経済の超過需要関数とまったく同じ性質をもつことがただちに理解されよう。すなわち $s_i(\lambda)$ が λ について連続なら $f_i(\lambda)$ もまた λ について連続であり，$s_i(\lambda)$ が λ について1次同次なら $f_i(\lambda)$ は同じく λ について0次同次であり，さらに $\sum_{i=1}^{n}s_i(\lambda)=0$ なら $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(\lambda)=0$ となってワルラス法則が満たされるのである。それゆえ

$$f_i(\lambda)=0, \quad i=1, 2, \cdots\cdots, n$$

について定石どおりの存在証明法が適用され，それを満たす解 λ が存在すると主張できることになる。これはいうまでもなく

$$s_i(\lambda)=0, \quad i=1, 2, \cdots\cdots, n$$

を満たす λ が存在することをも意味し，よって前にも述べたようにその λ を用いて最適化問題の解を求めれば，それがとりもなおさず当初の競争均衡となっているのである。

前述の仮定の下では最適化問題の解はかならず存在するから，以上までの議論をつうじてわれわれはつぎの定理を得たことになる。

定理 1　仮定 A.1～A.3 の下では，経済（$(u_i, \delta_i, \omega_i)$, $i=1, 2, \cdots\cdots, n$）には競争均衡が存在し，それはつねにパレート最適となっている。その競争均衡はもっぱら $s_i(\lambda)=0$ の解 λ_i, $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ によって特徴づけられる。

4

前節では $f_i(\lambda)=s_i(\lambda)/\lambda_i$ という関数が純粋交換経済での超過需要関数とまったく同じ諸性質をもつこと，そのことの結果として当該経済の均衡を特徴づける条件が，n 財をもつ純粋交換経済の均衡を特徴づける条件と形式上同値になることを明らかにした。この点を勘案すれば，かつてドブリューが超過需要関数の性質にもとづいて，ほとんどすべての純粋交換経済の均衡が有限個の孤立点のみから成ることを示したように，当面の経済についても $f_i(\lambda)$ ないしは $s_i(\lambda)$ の性質にもとづいて同種の帰結を導くという発想がおのずと浮かんでくるであろう。ただそのことを示すには，ドブリューの前例において超過需要関数が連続性，0 次同次性，ワルラス法則のほか，さらに連続微分可能性をもっていなければならなかったように，目下のモデルの $s_i(\lambda)$ もまた連続微分可能性を満たしているのでなくてはならない。そこでキーホーとレヴァインは，さらにその点を保証するためのプリミティブな仮定として，

A.4　$Du_i D^2 u_i^{-1}$ が R^l_{++} の有界部分集合上で有界。

という仮定をつけ加えた[8]。ここで D^2u_i は $\partial^2 u_i/\partial x_{hit}\partial x_{jit}(h, j=1, 2, \cdots\cdots, l)$ から成る $l\times l$ の行列であり，仮定 A.1 からそれは負の定符号となるから，当然逆行列 $D^2u_i^{-1}$ をもつ。仮定 A.4 がつけ足されれば，以下に見るように $s_i(\lambda)$ はすべての $\lambda\in\Lambda$ において連続微分可能となることを示すことができる。しかし，その主張の証明は彼らの『エコノメトリカ』論文では省略されており，またそのもととなった同名のディスカッション・ペーパー[9]でも大略が述べられているにとどまる。そこで以下では彼らより多少とも肌理(きめ)細かい推論を行うことで，細部を埋めながら議論を進めていくことにしたい。

当面の数理として拠り所となるのは，ふたたびつぎのような数学の定理[10]である。

定理 B　つぎの三条件

(8)　Kehoe and Levine, *op.cit.*, p.438 の Assumption a. 6.

(9)　T. J. Kehoe and D. K. Levine, "Comparative Statics and Perfect Foresight in Infinite Horizon Economies", MIT Working Paper, Number 312, December 1982, pp.9-11.

(10)　この定理については，ふたたび小平，前掲講座1976，pp.221-222，また前掲単行本，1991，pp. 223-224参照。

(1) 各関数 $a_t(\lambda)$ は Λ 上で連続微分可能。

(2) $\sum_{t=0}^{\infty} a_t(\lambda)$ は Λ 上で収束する。

(3) $\sum_{t=0}^{\infty} Da_t(\lambda)$ の各成分は Λ 上で一様に収束する。

が満たされれば，無限和 $\sum_{t=0}^{\infty} a_t(\lambda)$ もまた Λ 上で連続微分可能となる。

さて目下の場合，$a_t(\lambda)$ はその定義から $p_t(\lambda)(\omega_i - x_{it}(\lambda))$ であり，したがって $\sum_{t=0}^{\infty} a_t(\lambda)$ は $s_i(\lambda)$ であるが，それらについてまず上記 (2) の条件が仮定 A.1～A.3 の下で成り立つことは，すでに証明ずみである。つぎに (1) の条件の $a_t(\lambda)$ の連続微分可能性は $p_t(\lambda)$ と $x_{it}(\lambda)$ の連続微分可能性に分解され，これは陰関数定理の帰結にほかならない。すなわち，いま条件 (3.1)，(3.2) を

$$\lambda_i \delta_i^t \frac{\partial u_i}{\partial x_{hit}} - p_{ht} = 0 \qquad h=1, 2, \cdots\cdots, l, \quad i=1, 2, \cdots\cdots, n \tag{3,1$'$}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{hit} - \sum_{i=1}^{n} \omega_{hi} = 0 \qquad h=1, 2, \cdots\cdots, l \tag{3.2$'$}$$

と書き，それらをまとめて

$$f(\lambda, x_t, p_t) = 0$$

と書けば，陰関数の定理から，もし

$$\det D_{(x_t, p_t)} f(\lambda, x_t, p_t) \neq 0$$

なら，$x_t(\lambda), p_t(\lambda)$ は C^1 級となり，したがって $a_t(\lambda)$ もまた C^1 級すなわち連続微分可能となるのである。ゆえにこの点について示されるべきは，上記のヤコービ行列の行列式がわれわれの仮定の下で 0 にはならないということのみである。この主張はつぎのような行列式の演算をつうじて証明される。

まず (3.1)$'$，(3.2)$'$ を用いて計算すれば，上記の $\det D_{(x_t, p_t)} f(\lambda, x_t, p_t)$ はつぎの $l(n+1) \times l(n+1)$ の行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 \delta_1^t D^2 u_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & -I \\ 0 & \lambda_2 \delta_2^t D^2 u_2 & \cdots\cdots & 0 & -I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \lambda_n \delta_n^t D^2 u_n & -I \\ I & I & \cdots\cdots & I & 0 \end{vmatrix}$$

となることが分かる。そこでこれを以下に注記するようなやり方で順次に変形することにより，結局は

$$\prod_{i=1}^{n}|\lambda_i\delta_i^t D^2u_i|\cdot\sum_{i=1}^{n}|(\lambda_i\delta_i^t D^2u_i)^{-1}|$$

という帰結を得るのである[11]。前にも見たように，ここですべての $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ について D^2u_i は負の定符号，したがって $D^2u_i^{-1}$ もまた負の定符号であることを考え，λ_i, δ_i は正であることを考えれば，上記の帰結から $\det D_{(x_t, p_t)}f(\lambda, x_t, p_t)\neq 0$ となることは明らかである。よって陰関数定理の前件が満たされ，$a_t(\lambda)$ は連続微分可能性を満たすことになる。

---

(11) 記号を簡略化して $\lambda_i\delta_i^t D^2u_i=A_i$ とおけば，

$$\begin{vmatrix} A_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & -I \\ 0 & A_2 & \cdots\cdots & 0 & -I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & A_n & -I \\ I & I & \cdots\cdots & I & 0 \end{vmatrix} \overset{(イ)}{=} (-1)^l \begin{vmatrix} A_1 & 0 & \cdots\cdots & -I & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots\cdots & -I & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & -I & A_n \\ I & I & \cdots\cdots & 0 & I \end{vmatrix} \overset{(ロ)}{=} \begin{vmatrix} A_1 & 0 & \cdots\cdots & I & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots\cdots & I & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & I & A_n \\ I & I & \cdots\cdots & 0 & I \end{vmatrix}$$

$$\overset{(ハ)}{=} \begin{vmatrix} I & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & I & -A_n \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & 0 & \cdots\cdots & I & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots\cdots & I & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & I & A_n \\ I & I & \cdots\cdots & 0 & I \end{vmatrix}$$

$$\overset{(ニ)}{=} \begin{vmatrix} A_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & I & 0 \\ 0 & A_2 & & 0 & I & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & A_{n-1} & I & 0 \\ -A_n & -A_n & \cdots\cdots & -A_n & I & 0 \\ I & I & \cdots\cdots & I & 0 & I \end{vmatrix} \overset{(ホ)}{=} \begin{vmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & I \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{n-1} & I \\ -A_n & -A_n & \cdots & -A_n & I \end{vmatrix}$$

$$\overset{(ヘ)}{=} \begin{vmatrix} I & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & I & 0 \\ A_nA_1^{-1} & A_nA_2^{-1} & \cdots\cdots & A_nA_{n-1}^{-1} & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & I \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & A_{n-1} & I \\ -A_n & -A_n & \cdots\cdots & -A_n & I \end{vmatrix}$$

$$\overset{(ト)}{=} \begin{vmatrix} A_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & I \\ 0 & A_2 & \cdots\cdots & 0 & I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & A_{n-1} & I \\ A_n-A_n & A_n-A_n & \cdots\cdots & A_n-A_n & \sum_{i=1}^{n-1}A_nA_i^{-1}+I \end{vmatrix}$$

$$\overset{(チ)}{=} |A_1|\,|A_2|\cdots\cdots|A_{n-1}|\,\left|\sum_{i=1}^{n-1}A_nA_i^{-1}+I\right|$$

$$=|A_1|\,|A_2|\cdots\cdots|A_{n-1}|\,|A_n|\,|A_1^{-1}+A_2^{-1}+\cdots\cdots+A_n^{-1}|$$

ここまでの推論で上掲定理Bの前件（1），（2）の満たされることが示されたことになる。よってあと（3）の成り立つことさえ示されれば，$s_i(\lambda)$ すなわち $\sum_{t=0}^{\infty} a_t(\lambda)$ の所望の連続微分可能性が成り立つことになるわけである。ところで（3）が成り立つとは，$a_t(\lambda)$ の定義から

$$\sum_{t=0}^{\infty} Da_t(\lambda)=\sum_{t=0}^{\infty}(-p_t(\lambda)Dx_{it}(\lambda)+(\omega_i-x_{it}(\lambda))Dp_t(\lambda))$$

の各成分が Λ 上で一様に収束すること，すなわち

$$\sum_{t=0}^{\infty} Da_t(\lambda)=\left(\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\partial a_t(\lambda)}{\partial\lambda_1},\ \cdots\cdots,\ \sum_{t=0}^{\infty}\frac{\partial a_t(\lambda)}{\partial\lambda_n}\right)$$

であるところから，すべての $j=1, 2, \cdots\cdots, n$ について

$$\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\partial a_t(\lambda)}{\partial\lambda_j}=\sum_{t=0}^{\infty}(-p_t(\lambda)\frac{\partial x_{it}(\lambda)}{\partial\lambda_j}+(\omega_i-x_{it}(\lambda))\frac{\partial p_t(\lambda)}{\partial\lambda_j}) \tag{4.1}$$

の右辺が Λ 上で一様に収束すること，である。以下ではしばらく，そのことを立証するための推論に専念することにしよう。

まず（3.1），（3.2）にもとづき，陰関数定理を用いて計算すれば，

$$\begin{bmatrix} \lambda_1\delta_1^t D^2u_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & 0 & -I \\ 0 & \lambda_2\delta_2^t D^2u_2 & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & 0 & -I \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \lambda_j\delta_j^t D^2u_j & \cdots\cdots & 0 & -I \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & \lambda_n\delta_n^t D^2u_n & -I \\ I & I & \cdots\cdots & I & \cdots\cdots & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{1t}}{\partial\lambda_j} \\ \frac{\partial x_{2t}}{\partial\lambda_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_{jt}}{\partial\lambda_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_{nt}}{\partial\lambda_j} \\ \frac{\partial p_t}{\partial\lambda_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\delta_j^t Du_j \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ここで

（イ）は最後の二つのブロック列を入れ替えた。

（ロ）は $n-1$ 番目のブロック列の負号を除去した。そのため -1 を l 回掛け，さきの $(-1)^l$ と相殺される結果となっている。

（ハ）左から掛けている行列式は $=1$ であるから，それを掛けても同じである。

（ニ）二つの行列 A，B について $|A|\cdot|B|=|A\cdot B|$ となることによる。

（ホ）最後のブロック列で余因数展開をしている。

（ヘ）ふたたび左から掛けている行列式は $=1$。

（ト）（ニ）と同じ。

（チ）対角ブロックの左下がすべて0となることによる。

上記の演算については須田伸一教授からの教示に負う。

からブロックごとに

$$
\left.\begin{aligned}
&\lambda_1\delta_1^t D^2 u_1 \frac{\partial x_{1t}}{\partial\lambda_j}-\frac{\partial p_t}{\partial\lambda_j}=0\\
&\qquad\vdots\\
&\lambda_j\delta_j^t D^2 u_j \frac{\partial x_{jt}}{\partial\lambda_j}-\frac{\partial p_t}{\partial\lambda_j}=-\delta_j^t D u_j\\
&\qquad\vdots\\
&\lambda_n\delta_n^t D^2 u_n \frac{\partial x_{nt}}{\partial\lambda_j}-\frac{\partial p_t}{\partial\lambda_j}=0\\
&\frac{\partial x_{1t}}{\partial\lambda_j}+\cdots\cdots+\frac{\partial x_{jt}}{\partial\lambda_j}+\cdots\cdots+\frac{\partial x_{nt}}{\partial\lambda_j}=0
\end{aligned}\right.\tag{4.2}
$$

という結果が得られる。

そこでまずこの (4.2) の $k\neq j$ のブロックから

$$\frac{\partial x_{kt}}{\partial\lambda_j}=(\lambda_k\delta_k^t D^2 u_k)^{-1}\frac{\partial p_t}{\partial\lambda_j}\tag{4.3}$$

を求め，またその最後のブロックから

$$\frac{\partial x_{jt}}{\partial\lambda_j}=-\sum_{k\neq j}\frac{\partial x_{kt}}{\partial\lambda_j}$$

を求めて，右辺に上の結果を代入すれば

$$\frac{\partial x_{jt}}{\partial\lambda_j}=-\sum_{k\neq j}(\lambda_k\delta_k^t D^2 u_k)^{-1}\frac{\partial p_t}{\partial\lambda_j}$$

となる。つぎに同じく (4.2) の $k=j$ のブロックから

$$\frac{\partial x_{jt}}{\partial\lambda_j}=(\lambda_j\delta_j^t D^2 u_j)^{-1}\frac{\partial p_t}{\partial\lambda_j}-(\lambda_j\delta_j^t D^2 u_j)^{-1}\delta_j^t D u_j,$$

よって

$$\frac{\partial x_{jt}}{\partial\lambda_j}=(\lambda_j\delta_j^t D^2 u_j)^{-1}\frac{\partial p_t}{\partial\lambda_j}-\frac{1}{\lambda_j}D^2 u_j^{-1} D u_j\tag{4.4}$$

となるから，その左辺に前の結果を代入すれば

$$-\sum_{k\neq j}(\lambda_k\delta_k^t D^2 u_k)^{-1}\frac{\partial p_t}{\partial\lambda_j}-(\lambda_j\delta_j^t D^2 u_j)^{-1}\frac{\partial p_t}{\partial\lambda_j}=-\frac{1}{\lambda_j}D^2 u_j^{-1} D u_j$$

となり，整頓して

$$\frac{\partial p_t}{\partial\lambda_j}=\frac{1}{\lambda_j}\Big(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k\delta_k^t D^2 u_k)^{-1}\Big)^{-1} D^2 u_j^{-1} D u_j\tag{4.5}$$

を得る。そこで最後にこの結果を $i\neq j$ ブロックの (4.3) 式に代入することにより，

$$\frac{\partial x_{it}}{\partial \lambda_j}=\frac{1}{\lambda_j}(\lambda_i\delta_i^t D^2 u_i)^{-1}(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k\delta_k^t D^2 u_k)^{-1})^{-1}D^2 u_j^{-1}Du_j \tag{4.6}$$

が得られることになる。一方 $i=j$ ブロックの (4.4) 式に同様の代入を行えば,

$$\frac{\partial x_{jt}}{\partial \lambda_j}=\frac{1}{\lambda_j}(\lambda_j\delta_j^t D^2 u_j)^{-1}(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k\delta_k^t D^2 u_k)^{-1})^{-1}D^2 u_j^{-1}Du_j-\frac{1}{\lambda_j}D^2 u_j^{-1}Du_j \tag{4.7}$$

が得られるのである。

以上の計算で $\partial x_{it}(\lambda)/\partial\lambda_j$, $\partial p_t(\lambda)/\partial\lambda_j$ がすべて求められたので, これらの結果 (4.5), (4.6) および (4.7) を (4.1) に代入し, (3.1) を考慮すれば, まず一般に $j\neq i$ の場合には

$$\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\partial a_t(\lambda)}{\partial\lambda_j}=\frac{1}{\lambda_j}\sum_{t=0}^{\infty}(-Du_iD^2u_i^{-1}+(\omega_i-x_{it}))(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k\delta_k^t D^2 u_k)^{-1})^{-1}D^2 u_j^{-1}Du_j \tag{4.8}$$

となり, $j=i$ の場合には

$$\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\partial a_t(\lambda)}{\partial\lambda_i}=\frac{1}{\lambda_i}\sum_{t=0}^{\infty}((-Du_iD^2u_i^{-1}+(\omega_i-x_{it}))(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k\delta_k^t D^2 u_k)^{-1})^{-1}+\lambda_i\delta_i^t Du_i)D^2 u_i^{-1}Du_i \tag{4.9}$$

となることが分かる。[(12)]

こうして $\sum_{t=0}^{\infty}Da_t(\lambda)$ の各成分 $\sum_{t=0}^{\infty}\partial a_t(\lambda)/\partial\lambda_j$ の一様収束性を証明するには, (4.8) および (4.9) の右辺が一様に収束することを示せばよいというところまで議論が進んだ。この点を立証する作業のためには, われわれはふたたび, 前に $\sum_{t=0}^{\infty}a_t(\lambda)$ の一様収束性を立証するときに用いた第 3 節の定理 A を, こんどは $\sum_{t=0}^{\infty}\partial a_t(\lambda)/\partial\lambda_j$ に適用すればよいわけである。すなわち今回は, $|\partial a_t(\lambda)/\partial\lambda_j|\leqq b_t$, $b_t\geqq 0$ で, かつ $\sum_{t=0}^{\infty}b_t<\infty$ となるような $\{b_t\}_{t=0}^{\infty}$ があることを示せばよいのである。

そのための推論は前回のときよりやや複雑ではあるが, 原理はまったく同一である。まず (4.8) から始めることにしよう。いまその右辺の構成因となっている各項について見ると, (ω_i-x_{it}) の部分は, すでに見たように $0<x_{it}\leqq\sum_{k=1}^{n}\omega_k$ の条件に服するところから,

$$\|\omega_i-x_{it}\|\leqq c$$

となるような $c>0$ が明らかに存在する。また $Du_iD^2u_i^{-1}$ の部分については, やはり上記の理由から仮定 A.4 が使えて $Du_iD^2u_i^{-1}$ は有界となり, したがって

---

(12) キーホー＝レヴァインはそのディスカッション・ペーパー, p.10 において (4.8), (4.9) の左辺をそれぞれ $\partial s_i/\partial\lambda_j$, $\partial s_i/\partial\lambda_i$ と記している。s_i の定義からこれは $\partial\sum_{t=0}^{\infty}a_t(\lambda)/\partial\lambda_j$, $\partial\sum_{t=0}^{\infty}a_t(\lambda)/\partial\lambda_i$ にひとしいが, 無限和の場合は $\sum_{t=0}^{\infty}\partial a_t(\lambda)/\partial\lambda_j$ の一様収束性が保証されているのでないと,

$$\frac{\partial\sum_{t=0}^{\infty}a_t(\lambda)}{\partial\lambda_j}=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\partial a_t(\lambda)}{\partial\lambda_j}$$

になるとはかぎらない。目下の推論の目的は $\sum_{t=0}^{\infty}\partial a_t(\lambda)/\partial\lambda_j$ の一様収束性を証明すること自体にあるわけであるから, 彼らの表記は元来証明すべきことを先取りしていることになる。

$$\|Du_i D^2 u_i^{-1}\| \leqq e$$

となるような $e>0$ が存在するということができる。同様に最右端の項 $D^2u_j^{-1}Du_j$ についても

$$\|Du_j D^2 u_j^{-1}\| \leqq f$$

となるような $f>0$ があることはいうまでもない。

するとあと残るのは $(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k \delta_k^t D^2 u_k)^{-1})^{-1}$ の部分のみであり，以下では前と同様に $\delta_1 = \max \delta_i$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ となる δ_1 を用いてこれを $\delta_1^t(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k\left(\frac{\delta_k}{\delta_1}\right)^t D^2u_k)^{-1})^{-1}$ と書き換え，

$$\|(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k\left(\frac{\delta_k}{\delta_1}\right)^t D^2u_k)^{-1})^{-1}\| \leqq g \tag{4.10}$$

となるような $g>0$ があることを示すことにする。

そのための最初の手順として，まず

$$\sup_{\|y\|=1} y'(\lambda_1 D^2 u_1(x_{1t}))^{-1} y \leqq -\frac{1}{g}$$

となることを示したい。事実いま

$$Q(x_{1t}) = \sup_{\|y\|=1} y'(\lambda_1 D^2 u_1(x_{1t}))^{-1} y = \max_{\|y\|=1} y'(\lambda_1 D^2 u_1(x_{1t}))^{-1} y$$

とおけば，仮定A.1から $x_{1t} \in R_{++}^l$ については $D^2u_1(x_{1t})$ は負の定符号となるから，$\lambda_1 D^2 u_1(x_{1t})$ したがって $(\lambda_1 D^2 u_1(x_{1t}))^{-1}$ もまた負の定符号となる。よってすべての $y \neq 0$ について

$$y'(\lambda_1 D^2 u_1(x_{1t}))^{-1} y < 0 \quad \text{for all } x_{1t} \in R_{++}^l$$

となり，

$$Q(x_{1t}) < 0 \quad \text{for all } \ x_{1t} \in R_{++}^l$$

となる。さらにやはり仮定 A.1 から u_1 は連続微分可能であるから，$y'(\lambda_1 D^2 u_1(x_{1t}))^{-1} y$ は所与の y の下で x_{1t} の連続関数，したがってそれを最大化するような y を固定しても，ベルジュの最大値定理から $Q(x_{1t})$ は x_{1t} の連続関数となる。そこですべての $\lambda \in \Lambda$，すべての $t=0, 1, \cdots\cdots$ について x_{1t} を含むコンパクト部分集合上での $Q(x_{1t})$ の最大値を g^* とすれば，上で見たように $Q(x_{1t})<0$ for all $x_{1t} \in R_{++}^l$ であるから，当然 $g^*<0$ でなくてはならない。よって $g^* = -1/g, g>0$ とおけば

$$Q(x_{1t}(\lambda)) \leqq -\frac{1}{g}$$

となり，所期の帰結が示されたことになる。

すると明らかに

$$\sup_{\|y\|=1} y'\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k\left(\frac{\delta_k}{\delta_1}\right)^t D^2 u_k\right)^{-1}\right)y \leqq -\frac{1}{g}$$

となることが分かる。なぜなら1以外の主体についても仮定A.1から $D^2 u_k(x_{kt})$ は負の定符号となり，したがって $\lambda_k\left(\frac{\delta_k}{\delta_1}\right)^t D^2 u_k(x_{kt})$ も負の定符号，その逆行列 $\left(\lambda_k\left(\frac{\delta_k}{\delta_1}\right)^t D^2 u_k(x_{kt})\right)^{-1}$ も負の定符号となるからである。不等式に等号を含めているのは，$t\to\infty$ のとき $(\delta_k/\delta_1)^t\to 0$ となる可能性をおもんぱかってのことである。

そこで最後に，上の帰結から（4.10）を満たすような g があることを示す。記号の簡単化のため

$$A_t(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k\left(\frac{\delta_k}{\delta_1}\right)^t D^2 u_k(x_{kt})\right)^{-1}$$

とおけば，示したいことは $g>0$ が存在して

$$\|A_t(\lambda)^{-1}\|\leqq g \quad \text{for all } \lambda\in\Lambda, \quad \text{all } t=0, 1, \cdots\cdots$$

が成り立つことであり，つぎのような数理がそれを立証する。

まず $D^2 u_k(x_{kt}(\lambda))$ が対称行列であるところから，$A_t(\lambda)^{-1}$ もまた対称行列であることを考慮すれば，その固有根 $\alpha_1(t,\lambda), \alpha_2(t,\lambda), \cdots\cdots, \alpha_l(t,\lambda)$ はすべて実根であり，ある直交行列 $T_{t,\lambda}$ について

$$T'_{t,\lambda}A_t(\lambda)^{-1}T_{t,\lambda}=\begin{bmatrix} \alpha(t,\lambda) & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2(t,\lambda) & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \alpha_l(t,\lambda) \end{bmatrix}$$

のように書くことができる[(13)]。そして $T'_{t,\lambda}T_{t,\lambda}=I$ であるから，$T'_{t,\lambda}=T_{t,\lambda}^{-1}$ でもある。

つぎに

$$\sup_{\|y\|=1} y'A_t(\lambda)y=A_t(\lambda)\text{の最大固有根}$$

となること[(14)]に注目すれば，$A_t(\lambda)$ の固有根を $c_1(t,\lambda), c_2(t,\lambda), \cdots\cdots, c_l(t,\lambda)$ と書くことによって，前の帰結から

$$0\leqq -\frac{1}{g}\geqq c_h(t,\lambda) \quad \text{for all } h=1, 2, \cdots\cdots, l$$

となり，$\alpha_h(t,\lambda)=1/c_h(t,\lambda)$ であるから，

(13) たとえば小山昭雄『経済数学教室2』，1994， p.315，定理5.3参照。
(14) 小山，前掲書，p.336，定理5.11参照。

$$-g \leqq \alpha_h(t, \lambda) < 0 \quad \text{for } h=1, 2, \cdots\cdots, l,$$

よって

$$g \geqq \max_{h=1,2,\cdots\cdots,l} |\alpha_h(t, \lambda)|$$

となる。そこで

$$\begin{bmatrix} \alpha_1(t, \lambda) & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2(t, \lambda) & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \alpha_l(t, \lambda) \end{bmatrix} = D$$

とおけば，行列のノルムの定義から

$$\|D\| = \sup_{\|x\|=1} \|Dx\| = \sup_{\|x\|=1} \left\| \begin{bmatrix} \alpha_1(t, \lambda)x_1 \\ \alpha_2(t, \lambda)x_2 \\ \vdots \\ \alpha_l(t, \lambda)x_l \end{bmatrix} \right\|$$
$$= \max_{h=1,2,\cdots\cdots,l} |\alpha_h(x, \lambda)|$$

となるから，これを上の帰結に代入して

$$g \geqq \|D\|$$

となる。

他方やはり行列のノルムの定義から

$$\|T_{t,\lambda}\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_{t,\lambda}\, x\| \overset{(15)}{=} \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1,$$

また同様に $\|T'_{t,\lambda}\| = 1$ となるので，

$$\|T_{t,\lambda}\, DT'_{t,\lambda}\| \leqq \|T_{t,\lambda}\|\, \|D\|\, \|T'_{t,\lambda}\| = \|D\|,$$

よって前に導いた $g \geqq \|D\|$ と併せて，

$$g \geqq \|T_{t,\lambda}\, DT'_{t,\lambda}\|$$

---

(15)　$\|x\|^2 = x'x = (T'_{t,\lambda} T_{t,\lambda}\, x)'x = x' T'_{t,\lambda} T_{t,\lambda}\, x = \|T_{t,\lambda}\, x\|^2$ から $\|x\| = \|T_{t,\lambda}\, x\|$ となる。

という帰結を得る。定義から

$$D = T_{t,\lambda}^{-1} A_t(\lambda)^{-1} T_{t,\lambda}$$

すなわち

$$T_{t,\lambda} D T_{t,\lambda}^{-1} = T_{t,\lambda} D T'_{t,\lambda} = A_t(\lambda)^{-1}$$

であるから，以上の推論すべてをつうじて

$$\|A_t(\lambda)^{-1}\| \leqq g$$

すなわち

$$\left\|\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k\left(\frac{\delta_k}{\delta_1}\right)^t D^2 u_k(x_{kt}(\lambda))\right)^{-1}\right)^{-1}\right\| \leqq g$$

という所期の結果を得たことになる。

以上の結果をすべて用いれば

$$\left|\frac{\partial a_t(\lambda)}{\partial \lambda_j}\right| \leqq \frac{1}{\lambda_j}\delta_1^t(e+c, \cdots\cdots, e+c)\begin{pmatrix} g & \cdots\cdots & g \\ \vdots & & \vdots \\ g & \cdots\cdots & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}$$

$$= \delta_1^t \lambda_j^{-1} l^2 (e+c) g f$$

と書けることになり，ここで

$$\lambda_j^{-1} l^2 (e+c) g f = b$$

$$\delta_1^t b = b_t$$

とおけば，前と同様

$$\left|\frac{\partial a_t(\lambda)}{\partial \lambda_j}\right| \leqq b_t,\ b_t > 0$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} b_t < \infty$$

のような $\{b_t\}_{t=0}^{\infty}$ が存在するという所期の結果が示されたのである。

(4.9) の場合は右辺に $\lambda_i \delta_i D u_i$ の項が余分に含まれるが，すでに

$$\left\|\lambda_i\left(\frac{\delta_i}{\delta_1}\right)^t D u_i\right\| \leqq d$$

となるような $d > 0$ のあることは第 3 節で示したとおりであるから，上記の b が

$$\lambda_j^{-1}(l^2(e+c)gf+ldf)=b, \quad ここで\ f=e$$

と変わるだけで，あとの推論はまったく同様である。

以上で $s_i(\lambda)$ の連続微分可能性を導く議論はすべて終了したことになる。

5

考察下にある経済の均衡が，有限個の方程式と未知数から成る均衡条件

$$s_i(\lambda)=0, \quad i=1, 2, \cdots\cdots, n$$

によって特徴づけられることは，すでに明らかにしたとおりである。

これまたすでに述べたように，$s_i(\lambda)$ は1次同次であるから，未知数 λ_i のうち1個は過剰であり，また $\sum_{i=1}^{n} s_i(\lambda)=0$ であるから，方程式のうち1個もやはり過剰である。したがって上記の均衡条件は，実質的には $n-1$ 個の未知数をもつ $n-1$ 個の方程式から成ると考えてよいであろう。以下では，さらに仮定

A.5　どの均衡 λ においても $Ds(\lambda)$ の階数は $n-1$。

を満たす経済を正則経済（regular economy）と定義し，また加えて境界条件を

A.6　$\lambda^\nu \to \lambda \in R^n_+ \backslash \{0\}$ で λ が0成分を含むときには $\left\| \frac{s_1(\lambda^\nu)}{\lambda_1^\nu}, \frac{s_2(\lambda^\nu)}{\lambda_2^\nu}, \cdots\cdots, \frac{s_n(\lambda^\nu)}{\lambda_n^\nu} \right\| \to \infty$。

として新たに導入することにする。すると関数 $f_i=s_i(\lambda)/\lambda_i$ は，前節で立証した連続微分可能性をはじめ，0次同次性，ワルラス法則，境界条件のすべてを満たし，したがってさらに経済が正則経済であることを想定すれば，かつてドブリューが有限種類数の財をもつ純粋交換経済を分析したときの超過需要関数の諸性質をことごとく満たすことになる。よって目下の経済の場合にも，彼の定理の帰結がそのままあてはまると考えてよいことになろう。すなわち，そのような経済の均衡はかならず有限個（実は後述するように奇数個）の孤立点から成り，それらはパラメターである初期賦存量が変化したとき，それに対して連続的に変化する，というのがそれである。

これらの主張の成立についてはすでにドブリュー自身やディールカーの所論があるので[16]，ここでその詳細には立ち入ることなく，多少の注釈を加えるにとどめておこう。

---

(16)　Gerard Debreu, "Economies with a Finite Set of Equilibria", *Econometrica*, May 1970, *ditto*, "Regular Differentiable Economies", *American Economic Review*, May 1976, E.Dierker, "Regular Economies: A Survey", in M. D. Intriligator ed., *Frontiers of Quantitative Economics*, vol. IIIA, 1977. また福岡正夫『一般均衡理論』，1979，pp.489-496をも参照されたい。

まず正則性の仮定の下で均衡が孤立点となることは，よく知られた逆関数の定理[17]の帰結である。すなわちいま $\lambda_n=1$ とし，$s_n(\lambda)=0$ を省いて

$$J=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial s_1(\lambda)}{\partial\lambda_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial s_1(\lambda)}{\partial\lambda_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial s_{n-1}(\lambda)}{\partial\lambda_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial s_{n-1}(\lambda)}{\partial\lambda_{n-1}} \end{bmatrix}$$

というヤコービ行列を考えたとき，均衡点 λ^* において $\det J\neq 0$ ならば，λ^* を含む R^{n-1}_{++} のある開近傍 V と，0 を含む R^{n-1} のある開近傍 W が存在して，V に制限された $s: V\to W$ の逆関数 $s^{-1}: W\to V$ が定まり，W の各点に V の点が一意的に対応する。つまり $s^{-1}(0)=\lambda^*$ となるほかはないのである。

さらに目下の経済は境界条件をも満たすと仮定されており，この場合の均衡点の集合はかならずコンパクトとなる。よって上記の結果と併せて，均衡点は可算無限個となることはできず，有限個とならねばならないのである[18]。

ちなみにそのような有限個の均衡点の個数はかならず奇数個となることが知られている。事実いま正則な均衡点 λ^* において評価された前記ヤコービ行列 J に負の符号をつけ，その行列式 $|-J|$ を考えたときに，$|-J|>0$ なら $\mathrm{index}\,(\lambda^*)=+1$，また $|-J|<0$ なら $\mathrm{index}\,(\lambda^*)=-1$ のように λ^* に指数をつけるとすれば，ポアンカレ＝ホップの指数定理[19]により，すべての λ^* に関するそれらの総和 $\sum \mathrm{index}\,(\lambda^*)$ はかならず $+1$ になる。この帰結から均衡点の個数は奇数個にしかなれないのである[20]。

つぎに以上の議論では所与とされてきた初期賦存量 ω_i が変化するとき，それに対して均衡が連続的に変化するという帰結は，やはりよく知られた陰関数の定理[21]の含意である。いまそのような ω_i の変化として総和 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i$ は一定に保たれるような変化を考えるとすれば，もともとの (3.1)，(3.2) の $p_t(\lambda)$ および $x_{it}(\lambda)$ は ω_i の和の下で定義された最適化問題の解であるから，そのような ω_i の変化に対しては不変である。ゆえに前に証明した帰結と併せて考えれば，

---

(17) 逆関数の定理については，たとえば杉浦光夫『解析入門II』，1985，p.17参照。

(18) この点についてはまたのちにふたたび触れる。本稿第 6 節参照。

(19) ポアンカレ＝ホップの指数定理については，たとえば John W. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, 1965, pp.35-41 参照。

(20) この議論について，より詳しくは E. Dierker, "Two Remarks on the Number of Equilibria of an Economy", *Econometrica*, September 1972, H. Varian, "A Third Remark on the Number of Equilibria of an Economy", *Econometrica*, September-November 1975 を参照されたい。

(21) 陰関数の定理については，杉浦光夫，前掲書，pp.11-12参照。

$$s_i(\lambda, \omega)=\sum_{t=0}^{\infty} p_t(\lambda)(\omega_i - x_{it}(\lambda))$$

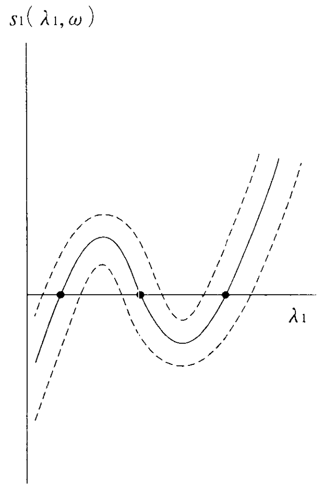
は連続微分可能であり，しかも

$$\det J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial s_1(\lambda, \omega)}{\partial \lambda_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial s_1(\lambda, \omega)}{\partial \lambda_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial s_{n-1}(\lambda, \omega)}{\partial \lambda_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial s_{n-1}(\lambda, \omega)}{\partial \lambda_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0$$

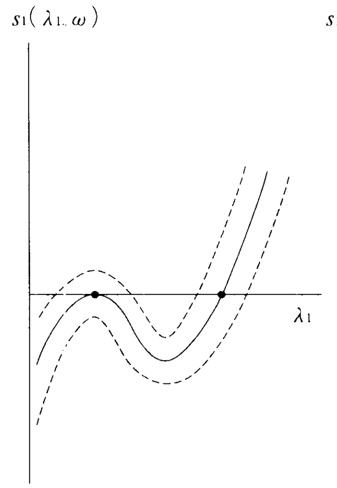
であるから，陰関数の定理が使えるところとなる。すなわちいま U を $R_{++}^{(n-1)+l(n-1)}$ の開集合とし，s を $U \to R^{n-1}$ の C^1 級関数とすれば，$(\lambda, \omega) \in V \times W \subset U$ を満たす R_{++}^{n-1}, $R_{++}^{l(n-1)}$ の開集合 V, W と関数 $g: W \to V$ が存在して，しかも g は C^1 級となる。つまり V, W に限定して考えれば，$s(\lambda, \omega)=0$ を $\lambda=g(\omega)$ の形で一意的に解くことができ，λ は ω について連続微分可能となるのである。

いまこれを主体が2人の場合について，主体1の λ_1 と s_1 との関係をつうじて簡単に図示すれば第5.1図のごとくであり，そこでは3個の孤立的均衡点がある場合が描かれている。この場合には，ω_1 の微小な変化によりグラフが僅かに移動したときに，均衡点もまた僅かに位置を変えるだけで，依然として3個存在しつづける。ところが第5.2図，第5.3図のように正則性の条件が満たされない場合には，グラフが僅かに移動しただけで，均衡点は不連続に変化し，その個数を連続的に維持できるとは限らないことになる。

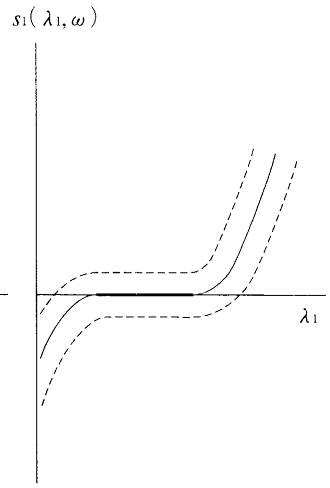
こうして以上の推論は，われわれを本稿第二の重要な定理



第5.1図



第5.2図



第5.3図

定理 2　仮定 A.1～A.6 の下では経済 $((u_i, \delta_i, \omega_i), i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ の均衡は有限個（奇数個）の孤立点から成り，かつそれらは特定の与件の変化すなわち総量 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i$ を一定とする初期賦存量 $\omega=(\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_n)$ の変化に対して連続的に変化する。

に導くことになる。この主張が成り立つ上では，図からも分かるように正則性の仮定がきわめて重要な役割を演ずるが，以下ではさらに，それを満たす経済すなわちいわゆる正則経済がどれほど一般的であるかを最後の課題として評価することにしよう。実はこの点についてもドブリューの所論とまったく同様，正則な経済は初期賦存量をパラメターとする経済空間で開稠密な集合を形成し，それ以外の経済はその集合の測度がゼロになるという意味ではほとんど無視可能（negligible）であることを示しうるのである。

この帰結は微分位相幾何学のいわゆる横断性定理（transversality theorem）によるものであるが，いまその含意を明らかにするために，所与の $\omega=(\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_n)$ から出発して，各主体の ω_i を ω_i+v_i に，すなわち v_i だけ変化させてみることにしよう。ただし v_i については，いうまでもなく $\omega_i+v_i>0, i=1, 2, \cdots\cdots, n$ の条件が課せられ，また $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=$ 一定と想定されているところから $v_n=-\sum_{i=1}^{n-1}v_i$ となるのでなくてはならない。すると，もとの ω_i は固定されているので，経済は $R^{l(n-1)}$ の 1 点 $v=(v_1, \cdots\cdots, v_{n-1})$ としてあらわされ，s 関数は v をも含めて

$$s_i(\lambda, v)=\sum_{t=0}^{\infty}p_t(\lambda)(\omega_i+v_i-x_{it}(\lambda))\quad i=1, 2, \cdots\cdots, n-1 \tag{5.1}$$

$$s_n(\lambda, v)=\sum_{t=0}^{\infty}p_t(\lambda)(\omega_n-\sum_{i=1}^{n-1}v_i-x_{nt}(\lambda)) \tag{5.2}$$

と書かれることになる。以下では λ を規準化した集合を

$$\tilde{\Lambda}=\{\lambda\in R^n_{++}|\lambda_n=1\}$$

とし，v の集合を

$$V=\{(v_1, \cdots\cdots, v_{n-1})\in R^{l(n-1)}|\omega_i+v_i>0, \omega_n-\sum_{i=1}^{n-1}v_i>0\}$$

であらわすことにしよう。また $s_i(\lambda, v)=0, i=1, 2, \cdots\cdots, n$ から最後の n 番目の式をとり除いた $s_i(\lambda, v)=0, i=1, 2, \cdots\cdots, n-1$ をあらためて $\bar{s}(\lambda, v)=0$ と記すことにしよう。

さて横断性定理をマスコレルの表記にしたがってそのまま掲げれば，(22) つぎのとおりである。

定理 C　M, P, N および $Z\subset N$ を C^r 級多様体とし，$F: M\times P\to N$ は C^r 級の関数で，

---

(22)　横断性定理については Victor Guillemin and Alan Pollack, *Differential Topology*, 1974, pp.68-69, Andreu Mas-Collell, *The Theory of General Equilibrium : A Differentiable Approach*, 1985, pp.43-45, pp.319-322 参照。ここではその p.45 所掲のものを借用した。

r は $r>\max\{0, \dim M+\dim Z-\dim N\}$ を満たし，また各 $p\in P$ に対して $F_p:M\to N$ を $F_p(x)=F(x, p)$ によって定義するものとする。そのとき F が N 上で Z に対して横断的であれば，ほとんどすべての $p\in P$ について F_p は N 上で Z に対して横断的である。

ここで関数 F, F_p がそれぞれ N 上で Z に対して横断的であるとは，$Z=\{z\}$ であるときには z が F, F_p の正則値になることを意味している。目下の応用にあたっては，前記の $\tilde{\Lambda}$ が M に，V が P に，R^{n-1} が N に，$\{0\}\subset R^{n-1}$ が Z に，$\tilde{s}$ が F に対応しており，$r=1$ である。

するとここでの $\tilde{\Lambda}, V, R^{n-1}, \{0\}$ は当然 C^1 級の多様体になっており，$\tilde{s}:\tilde{\Lambda}\times V\to R^{n-1}$ は C^1 級の関数，また $\dim\tilde{\Lambda}=n-1, \dim\{0\}=0, \dim R^{n-1}=n-1$，したがって $1>\max\{0, (n-1)+0-(n-1)\}=0$ であるから，さらに $v\in V$ に対し $\tilde{s}_v(\lambda)=\tilde{s}(\lambda, v)$ によって $\tilde{s}_v:\tilde{\Lambda}\to R^{n-1}$ を定義すれば，定理の仮定はことごとく満たされていることが分かる。ゆえに定理の帰結が使用できて，$\tilde{s}$ が R^{n-1} で $\{0\}$ に対して横断的ならば，ほとんどすべての $v\in V$ について $\tilde{s}_v$ は R^{n-1} で $\{0\}$ に対して横断的となることが主張できるのである。

そこで以下ではまず上記の主張の前件が成り立つこと，すなわち $\tilde{s}$ が R^{n-1} で $\{0\}$ に対して横断的となることを明らかにしよう。これは言い換えれば 0 が $\tilde{s}$ の正則値になっているということであり，さらに言い換えれば $\tilde{s}(\lambda, v)=0$ となる任意の $\lambda\in\tilde{\Lambda}, v\in V$ において $(n-1)\times((n-1)+l(n-1))$ の行列 $D\tilde{s}(\lambda, v)=(D_\lambda\tilde{s}(\lambda, v), D_v\tilde{s}(\lambda, v))$ の階数が $n-1$ になるということである。ところがいま（5.1）および（5.2）を $v_i\,(i=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$ で微分すれば

$$D_v s(\lambda, v)=\begin{bmatrix} \frac{\partial s_1(\lambda, v)}{\partial v_{11}} & \cdots\cdots & \frac{\partial s_1(\lambda, v)}{\partial v_{l1}} & \cdots\cdots & \frac{\partial s_1(\lambda, v)}{\partial v_{1,n-1}} & \cdots\cdots & \frac{\partial s_1(\lambda, v)}{\partial v_{l,n-1}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial s_{n-1}(\lambda, v)}{\partial v_{11}} & \cdots\cdots & \frac{\partial s_{n-1}(\lambda, v)}{\partial v_{l1}} & \cdots\cdots & \frac{\partial s_{n-1}(\lambda, v)}{\partial v_{1,n-1}} & \cdots\cdots & \frac{\partial s_{n-1}(\lambda, v)}{\partial v_{l,n-1}} \\ \frac{\partial s_n(\lambda, v)}{\partial v_{11}} & \cdots\cdots & \frac{\partial s_n(\lambda, v)}{\partial v_{l1}} & \cdots\cdots & \frac{\partial s_n(\lambda, v)}{\partial v_{1,n-1}} & \cdots\cdots & \frac{\partial s_n(\lambda, v)}{\partial v_{l,n-1}} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sum_{t=0}^{\infty} p_{1t}(\lambda) & \cdots\cdots & \sum_{t=0}^{\infty} p_{lt}(\lambda) & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & \sum_{t=0}^{\infty} p_{1t}(\lambda) & \cdots\cdots & \sum_{t=0}^{\infty} p_{lt}(\lambda) \\ -\sum_{t=0}^{\infty} p_{1t}(\lambda) & \cdots\cdots & -\sum_{t=0}^{\infty} p_{lt}(\lambda) & \cdots\cdots & -\sum_{t=0}^{\infty} p_{1t}(\lambda) & \cdots\cdots & -\sum_{t=0}^{\infty} p_{lt}(\lambda) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sum_{t=0}^{\infty} p_t(\lambda) & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \sum_{t=0}^{\infty} p_t(\lambda) & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \sum_{t=0}^{\infty} p_t(\lambda) \\ -\sum_{t=0}^{\infty} p_t(\lambda) & -\sum_{t=0}^{\infty} p_t(\lambda) & \cdots\cdots & -\sum_{t=0}^{\infty} p_t(\lambda) \end{bmatrix},$$

ここで $\sum_{t=0}^{\infty} p_t(\lambda)=(\sum_{t=0}^{\infty} p_{1t}(\lambda), \cdots\cdots, \sum_{t=0}^{\infty} p_{lt}(\lambda))$, となり，この行列の最初の $n-1$ 行は明らかに 1 次独立である。するとこれは $D_v\tilde{s}(\lambda, v)$ の階数が $n-1$ であることにほかならないから，$D\tilde{s}(\lambda, v)$ の階数もまた $n-1$ であることになる。

これで前記主張の前件 $\tilde{s}$ が R^{n-1} の上で $\{0\}$ に対して横断的となることが示されたので，定理の帰結によりほとんどすべての $v\in V$ について $\tilde{s}_v$ は R^{n-1} の上で $\{0\}$ に対して横断的となるということができる。ところがこの帰結は 0 が $\tilde{s}_v$ の正則値になるということであるから，$\tilde{s}_v(\lambda)=0$ を満たす任意の $\lambda\in\tilde{\Lambda}$ において $(n-1)\times(n-1)$ の行列 $D\tilde{s}_v(\lambda)$ の階数が $n-1$ になるということでもある。そして $D\tilde{s}_v(\lambda)$ の階数が $n-1$ であるということは v を所与としたときの $D_\lambda\tilde{s}(\lambda, v)$ すなわち $D\tilde{s}(\lambda)$ の階数が $n-1$ になることを意味するから，s の同次性を考慮すれば，$Ds(\lambda)$ の階数もまた $n-1$ であり，これは前に述べた正則経済の定義そのものにほかならない。したがって上記の帰結は，ほとんどすべての経済の均衡が正則経済の要件を満たすことを意味しており，これで正則な経済が初期賦存量をパラメターとする経済空間で稠密な集合をなすという主張が立証されたことになる。一方正則経済が開集合をなすという主張は，v を僅かずらした場合の経済もまた正則経済になるということであるから，これは $D\tilde{s}_v(\lambda)$ の各要素が v について連続で，しかも正則性の条件が厳密な不等式 $|D\tilde{s}_v(\lambda)|\neq 0$ で定義されているところから自明であるといってよいであろう。

よって以上の推論から，つぎの定理が立証されたことになる。

定理 3　正則な経済は初期賦存量をパラメターとする経済空間において開稠密な集合を形成し，それ以外の経済の集合は測度ゼロとなる。

すなわち正則経済については，その閉包が全経済を占め，そうでない経済はこれをほとんど無視してもかまわないという帰結が成立したのである。

なおこの結論は初期賦存量以外の与件たとえば効用関数などをパラメターとして経済空間を定義する場合にも拡張することができよう。しかし，その場合には，経済はさらに一般的な位相構造をもつ空間に含まれることになるから，もはや正則経済以外の経済の集合の大きさを測度論的に規定することはできなくなるであろう。

以上われわれは条件

$$\frac{s_1(\lambda)}{\lambda_1}=0,\quad \frac{s_2(\lambda)}{\lambda_2}=0,\quad \cdots\cdots,\quad \frac{s_n(\lambda)}{\lambda_n}=0$$

を満たす λ によって当該の経済の均衡を特徴づけ,

$\dfrac{s_i(\lambda)}{\lambda_i}$ がすべて λ について 0 次同次

$\lambda_1\dfrac{s_1(\lambda)}{\lambda_1}+\lambda_2\dfrac{s_2(\lambda)}{\lambda_2}+\cdots\cdots+\lambda_n\dfrac{s_n(\lambda)}{\lambda_n}=0$ (ワルラス法則)

すべての λ について $\dfrac{s_i(\lambda)}{\lambda_i}$ は C^1 級

$\lambda^\nu\to\lambda\in R^n_+\backslash\{0\},\ \exists j,\ \lambda_j=0$ ならば, $\left\|\dfrac{s_1(\lambda^\nu)}{\lambda_1^\nu},\dfrac{s_2(\lambda^\nu)}{\lambda_2^\nu},\cdots\cdots,\dfrac{s_n(\lambda^\nu)}{\lambda_n^\nu}\right\|\to\infty$ (境界条件)

という諸条件の下で,

正則性すなわちどの均衡においても rank $Ds(\lambda)=n-1$ という性質を満たす経済が, 全経済のほとんどすべてを占める。

という帰結を導いた。

顧みて上記の推論はその基本線をキーホーおよびレヴァインに負うものの, 彼らの所論においては $s_i(\lambda)$ ないしは $s_i(\lambda)/\lambda_i$ に関する境界条件が明示的に言及されておらず, それがいかなる理由によって要請されねばならないかがかならずしもはっきりしない憾みがある。そこで以下蛇足ではあるが, 本節で簡単に $n=2$ の事例にもとづいて, この点に関する直観的な説明をつけ加えておくことにしよう。

この場合均衡は

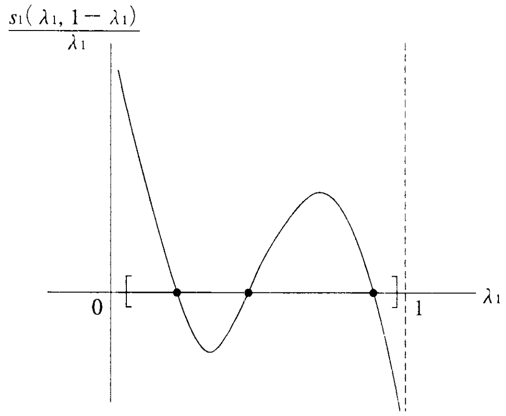
$$\frac{s_1(\lambda)}{\lambda_1}=0\quad および\quad \frac{s_2(\lambda)}{\lambda_2}=0$$

の 2 式で定義されるが, $s_1(\lambda)+s_2(\lambda)=0$ であるから, 2 式のうち一つは過剰である。また 0 次同次性から $\lambda_1+\lambda_2=1$ としてもよいので, 結局

$$\frac{s_1(\lambda_1,1-\lambda_1)}{\lambda_1}=0$$

となる λ_1 の値を求めれば, それがこの事例の均衡となる。

いまかりに $\lambda_1\to 0$ とすれば, $\lambda_2\to 1$ すなわち $\lambda_1/\lambda_2\to 0$ となり, 効用可能性曲線上の均衡点は大



第6.1図

略，主体1の効用を限りなく小さくする方向に動くから，当該主体の消費は限りなくゼロに近づくと考えてよい。すると $s_1(\lambda)=\sum_{t=0}^{\infty} p_t(\lambda)(\omega_1-x_{1t}(\lambda))$ において $x_{1t}(\lambda)$ が小さくなるから，$p_t(\lambda)>0$，$\omega_1>0$ であることを考慮すれば，$s_1(\lambda)/\lambda_1 \to \infty$ となる。また逆に $\lambda_1 \to 1, \lambda_2 \to 0$ とすれば，同様に $s_2(\lambda)/\lambda_2 \to \infty$ となって $s_1(\lambda)/\lambda_1 \to -\infty$ となるから，s_1 が連続であれば図示したように有限個の均衡点が存在することになる。

ここで重要なのは，まさに境界条件があることによって，$\lambda_1 \to 0$ あるいは $\lambda_1 \to 1$ のとき $s_1(\lambda)/\lambda_1 \to +\infty$ あるいは $-\infty$ となり，$\lambda_1=0$ または1，あるいはその近傍には均衡点が決してこないということである。これは言い換えれば λ_1 の開区間 $(0, 1)$ のさらに内側にすべての均衡点を含むコンパクト集合 $C=[\quad]$ がとれるということであり，実のところこのことが均衡点の数を有限個にする上で決め手となっているのである。

事実いま $f(\lambda_1)=s_1(\lambda_1, 1-\lambda_1)/\lambda_1$ と書き，$f: C \to R$ と考えれば，均衡の集合 E は $\{\lambda_1 \in C | f(\lambda_1)=0\}=f^{-1}(\{0\})$ であり，f は連続であるから $f^{-1}(\{0\})$ は閉集合となる。[23] しかもそれはコンパクト集合 C の中の閉集合であるから，コンパクト集合である。すると正則性の条件から，どんな $\lambda_1^* \in E$ をとってもそれに応じてある $\varepsilon(\lambda^*)>0$ がとれ，λ_1^* を中心とする半径 $\varepsilon(\lambda^*)$ の開区間を $B_{\varepsilon(\lambda_1^*)}(\lambda_1^*)$ とするとき，$\lambda_1 \in B_{\varepsilon(\lambda_1^*)}(\lambda_1^*)$ のようなどんな λ_1 も $\lambda_1 \neq \lambda_1^*$ であるかぎりは $f'(\lambda_1) \neq 0$ である。そこでそれぞれの均衡に関する $B_{\varepsilon(\lambda^*)}(\lambda_1^*)$ の合併集合 $\bigcup_{\lambda_1^* \in E} B_{\varepsilon(\lambda_1^*)}(\lambda_1^*)$ を考えれば，当然 $\bigcup_{\lambda_1^* \in E} B_{\varepsilon(\lambda_1^*)}(\lambda_1^*) \supset E$，すなわち $\bigcup_{\lambda_1^* \in E} B_{\varepsilon(\lambda_1^*)}(\lambda_1^*)$ は E の開被覆となっている。ところがさきに述べたように E はコンパクト集合であるから，開被覆である左辺から有限個の開集合 $B_{\varepsilon(\lambda_{1,1}^*)}(\lambda_{1,1}^*), \cdots\cdots, B_{\varepsilon(\lambda_{1,k}^*)}(\lambda_{1,k}^*)$ を選んで，$B_{\varepsilon(\lambda_{1,1}^*)} \cup \cdots\cdots\cdots \cup B_{\varepsilon(\lambda_{1,k}^*)}(\lambda_{1,k}^*)$ で E を被覆することができる。つまり

---

(23) $f: R^l \to R^k$ が R^l 上で連続ということと，R^k における任意の閉集合 F に対して $f^{-1}(F)$ が R^l の閉集合ということは同値である。丸山徹『経済数学講義』，1984，pp.24-25，定理1.11参照。

$$B_{\varepsilon(\lambda^*_{1,1})}(\lambda_{1,1})\cup\cdots\cdots\cup B_{\varepsilon(\lambda^*_{1,k})}(\lambda^*_{1,k})\supseteq E \tag{6.1}$$

となるが，ここで左辺の各開区間から $\lambda^*_{1,1}\in E, \cdots\cdots, \lambda^*_{1,k}\in E$ となるようにそれぞれ均衡点を選ぶことができるから，

$$E=\{\lambda^*_{1,1}, \cdots\cdots, \lambda^*_{1,k}\}$$

となることが分かるのである。

事実 $E\supset\{\lambda^*_{1,1}, \cdots\cdots, \lambda^*_{1,k}\}$ となることは自明，また $E\subset\{\lambda^*_{1,1}, \cdots\cdots, \lambda^*_{1,k}\}$ となることもつぎのような推論をつうじてただちに明らかとなる。すなわちいまもし $\lambda^{**}_1\neq\lambda^*_{1,1}, \cdots\cdots, \lambda^*_{1,k}$ のような λ^{**}_1 が E に含まれたとすれば，(6.1) から $\lambda^{**}_1\in B_{\varepsilon(\lambda^*_{1,1})}(\lambda^*_{1,1})\cup\cdots\cdots\cup B_{\varepsilon(\lambda^*_{1,k})}(\lambda^*_{1,k})$，ゆえに $\lambda^{**}_1\in B_{\varepsilon(\lambda^*_{1,j})}(\lambda^*_{1,j})$ for some j となり，これは前述の $\forall\lambda_j\in B_{\varepsilon(\lambda^*_j)}(\lambda^*_j), \lambda_j\neq\lambda^*_j\Rightarrow f(\lambda_j)\neq 0$ に矛盾する。

というわけで $E=\{\lambda^*_{1,1}, \cdots\cdots, \lambda^*_{1,k}\}$ となるのでなくてはならず，このことから均衡点が有限個という帰結が生じるのである。これがいえるのは，E がコンパクト集合であったからであり，それをいうために境界条件が枢要な役割を演じたのである。

7

以上本稿では無限期間にわたって最適化行動をとる有限個主体から成る純粋交換モデルを考え，そこでの均衡がもつ諸性質を究明することに努めてきた。確認しえた結論の一つは，そのようなモデルの競争均衡が通常の場合と同様，かならずパレート最適になるということであり，またもう一つは，この種のモデルでは均衡の集合がほとんどすべての場合，有限個の孤立点から成り，連続体をなすものはないこと，またそれらの均衡は与件の変化に対して連続的に対応し，構造上安定した性質をもつこと，であった。

残された課題は，ではこれらの結論が時間のとり扱いの相違に対して果たしてどれほど robust であるかを検討してみることである。最初の節でも予告したように，次稿では対極的にそれぞれ有限期間しか生きない主体が無限に登場するいわゆる重複世代モデルをとり扱い，そのようなモデルでは，上記の結論がかならずしも成り立つとはかぎらないことを示すであろう。

（名誉教授）