Title	結託構造を伴うコアの存在と寡占市場への応用
Sub Title	An existence result of a core with a coalition structure and its applications to oligopoly markets
Author	内海, 幸久(Utsumi, Yukihisa)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2000
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.93, No.3 (2000. 10) ,p.569(57)- 579(67)
JaLC DOI	10.14991/001.20001001-0057
Abstract	
Notes	小特集 : 情報とネットワークの経済
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20001001-0057

「三田学会雑誌」93巻3号（2000年10月）

結託構造を伴うコアの存在と寡占市場への応用*

内 海 幸 久

要　　約

この論文の目的は，結託構造を伴うコアを定義し，その存在の必要十分条件を求めることである。更に，結託構造を伴う α コアや β コアを用い，寡占市場の分析に応用する。この応用によって，寡占市場における企業合併や分社化という現象を特徴付けることができる。

1．序

コアという概念は，協力ゲームや経済学の中で有用な均衡概念として広く用いられている。まず，本稿では，この概念を用い，結託構造を伴うコアを定義する。この均衡は，結託構造に応じて，通常のTU（transferable utility）ゲームや非協力状態を表現することができ，また，均衡に於いて内生的に結託構造を決定できるという特徴をもつ。

均衡の存在証明を述べた後で，寡占市場への応用を試みる。α コアや β コアの存在に必要なZhao（1999a, b）の分離条件やIchiishi（1981）の結託構造の着想を導入し，我々は寡占市場での産業構造のあり方を考察する。結託内・外での行動を，それぞれ，企業内取引や市場取引，また，企業合併や分社化などと解釈することで，寡占市場において，どのような産業構造が起こり得るのかという問に対する一つの分析視角を与える。

本稿の一つの主要な貢献は，ベルトラン型（戦略的補完関係の市場）やクールノー型（戦略的代替関係の市場）の寡占市場で結託構造を伴う α コアや β コアが存在するということを示したことである。この帰結は，両市場に於いて，企業内取引や市場取引，また，企業合併や分社化という現象を

＊　本稿は慶應義塾大学経済学会によって開催された2000年3月のコンファレンスにおける報告によっている。参加された方々からの有益なコメントに感謝します。また，本稿の作成にあたって，匿名のレフェリーよりいくつかの有益なコメントを頂いたことに感謝します。

特徴づけることが可能となることを示していると解釈できる。具体的には，近年の金融業界に於ける統廃合の動きや製造業におけるアウトソーシングや分社化の現象の一面を捉えていると言えよう。

本稿は以下のような構成になっている。第２章で基本的なモデルや定義を提示し存在の条件を述べる。第３章で結託構造を持つ α コア，β コアの基本的な性質を紹介する。第４章にて，寡占市場への応用を試み，第５章で結論や課題を述べる。

２．モデル

最初に結託構造を伴うコアを定義する。$N=\{1, \ldots, n\}$ をプレーヤーの集合とし，$\mathcal{N}=2^N\backslash\{\phi\}$ によって全ての結託の集合（*i.e.* 非空の N の部分集合全体）を表す。結託構造の集合とは，N の分割の族で，$\mathcal{T}$ と表記する。つまり，$\mathcal{T}\subset\{N$ の全ての分割$\}$ と言うことである。その要素は，どの結託が共存するのかを表し，**結託構造**(1)と呼ばれる。$v:\mathcal{N}\to\mathbb{R}$ を，ゲームの特性関数とする。

以上の記号を使って，結託構造を伴うゲームとは，$(N, \mathcal{T}, v)$ という３つのデータによって記述されるゲームである。

定義１：$(N, \mathcal{T}, v)$ のコアは以下の２つの性質を満たす，利得ベクトルと結託構造の組 (u^*, τ^*) の集合で，$Core\,(v, \mathcal{T})$ と表す(2)。

(1)　$\forall\, T\in\tau^*: \sum_{i\in T}u_i^*\leq v(T)$,

(2)　$\forall\, S\in\mathcal{N}: \sum_{i\in S}u_i^*\geq v(S)$.

τ^* の中の結託は均衡において形成されるので，我々は，$(N, \mathcal{T}, v)$ のコアを**結託構造を伴うコア**と呼ぶ。定義１の条件１は，結託構造 τ^* の中での実現可能性条件を意味している。条件２は，$v(S)>\sum_{i\in S}u_i^*$ を満たす $S\in\mathcal{N}$ が存在しないと言う意味で，安定性条件とみなすことができる。

結託構造の集合 $\mathcal{T}$ を特定化することで，TU ゲームや非協力の状態を記述することができる。

例１：TU ゲーム

$\mathcal{T}=\{\{N\}\}$. このケースでは定義１の条件１が TU ゲームのコアと同じになる。

例２：非協力状態

（１）　本稿では，結託の形成を前提に議論を進めていく。しかし，この結託形成に関しては，Nakayama (1998) が理論的基礎付を与えている。

（２）　基本的な着想は Ichiishi (1981)，Funaki and Yamato (1999) に依存する。

$\mathcal{T}=\{\{\{1\},\{2\},\dots,\{n\}\}\}$. このケースでは，プレーヤー達は，結託行動をとることが許されていないため，非協力な状態に直面している。

結託構造を伴うコアは，上記の2つの例をスペシャルケースに持つ。このことより結託構造に焦点を当てることで，均衡においてどのような協調行動がなされているのか否かという，均衡状態での行動を意味づけることができる。

次に，このコアの存在を述べる為に，平衡集合族を準備をする。$\mathcal{B}=\{T_1,\dots,T_k\}$ によって，結託の集合を表す。それぞれの $i\in T$ に対して，$\mathcal{B}(i)=\{T\in\mathcal{B}\mid i\in T\}$ を定義する。これは，プレーヤー i がメンバーであるような結託の集合を表す。全ての $T\in\mathcal{B}$ に対して $\forall i\in N:\sum_{T\in\mathcal{B}(i)}w_T=1$ であるような非負の数 w_T が存在するとき，$\mathcal{B}$ を**平衡集合族**と呼ぶ。この平衡集合族の定義は $\sum_{T\in\mathcal{B}}w_T\chi_T=\chi_N$ と言う条件と同値であることがわかる。ここで，χ_T はベクトル値の特性関数(3)で，具体的には

$$(\chi_T)_j=\begin{cases}1 & \text{if } j\in T\\ 0 & \text{if } j\in N\setminus T.\end{cases}$$

によって与えられる。

命題1：次の2つは同値である。

(1) $Core(v,\mathcal{T})\neq\phi$.

(2) 全ての平衡集合族 $\mathcal{B}$ において，$\sum_{S\in\mathcal{B}}w_Sv(S)\leq\max_{\tau\in\mathcal{T}}\sum_{T\in\tau}v(T)$ が成立する。

証明：

(1⇒2)

$(u,\tau)\in Core(v,\mathcal{T})$ とする。この時 (u,τ) は

$$\forall S\in\mathcal{N}:\sum_{j\in S}u_j\geq v(S)$$
$$\forall T\in\tau:-\sum_{j\in T}u_j\geq -v(T).$$

を満たすことになる。この連立の不等式は，ベクトルを使って，次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}&\forall S\in\mathcal{N}:\chi_S\cdot u\geq v(S)\\ &\forall T\in\tau:-\chi_T\cdot u\geq -v(T).\end{aligned}\tag{1}$$

(3) この特性関数はゲームの特性関数 v とは異なることに注意。

ここで，χ_S や χ_T はベクトル値の特性関数であり，$u=(u_1, \ldots, u_n)$ は利得ベクトルを表している。(1) 式の解の存在に関する必要十分条件は Minkowski-Farkas の補題として知られている。この補題によって，

$$\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_N, \mu_1, \ldots, \mu_{|\tau|})\in\mathbb{R}_+^{|\mathcal{N}|\times|\tau|}:$$
$$\sum_{S\in\mathcal{N}}\lambda_S\chi_S=\sum_{T\in\tau}\mu_T\chi_T \Rightarrow \sum_{S\in\mathcal{N}}\lambda_S v(S)\leq\sum_{T\in\tau}\mu_T v(T)$$

を満たすことになる。

更に，$w_S:=\frac{\lambda_S}{\sum_{T\in\tau}\mu_T}$ と $\mathcal{B}:=\{S\in\mathcal{N}\mid w_S>0\}$ を定義する。以下の評価によって，$\mathcal{B}$ が平衡集合族であることが分かる。

$$\begin{aligned}
\sum_{S\in\mathcal{B}}w_S\chi_S&=\sum_{S\in\mathcal{N}}\frac{\lambda_S}{\sum_{T\in\tau}\mu_T}\chi_S\\
&=\frac{\sum_{T\in\tau}\mu_T\chi_T}{\sum_{T\in\tau}\mu_T} \qquad \left(\textstyle\sum_{S\in\mathcal{N}}\lambda_S\chi_S=\sum_{T\in\tau}\mu_T\chi_T\right)\\
&=\textstyle\sum_{T\in\tau}\chi_T\\
&=\chi_N.
\end{aligned}$$

全ての $S\in\mathcal{N}$ に対して，λ_S は任意の数であることに注意すると

$$\begin{aligned}
\sum_{S\in\mathcal{B}}w_S v(S)&=\sum_{S\in\mathcal{N}}\frac{\lambda_S}{\sum_{T\in\tau}\mu_T}v(S)\\
&\leq\sum_{T\in\tau}\frac{\mu_T v(T)}{\sum_{T\in\tau}\mu_T} \qquad \left(\textstyle\sum_{S\in\mathcal{N}}\lambda_S v(S)\leq\sum_{T\in\tau}\mu_T v(T)\right)\\
&\leq\sum_{T\in\tau}v(T)
\end{aligned}$$

が全ての平衡集合族 $\mathcal{B}$ について成立する。

(2⇒1)

全ての平衡集合族 $\mathcal{B}$ と対応する $\{w_S\}_{S\in\mathcal{B}}$ に対して，

$$\sum_{S\in\mathcal{B}}w_S v(S)\leq\max_{\tau\in\mathcal{J}}\sum_{T\in\tau}v(T)=:\sum_{T\in\tau^*}v(T)$$

が成立するとする。集合 A と B を

$$A:=\{(\chi_N, \sum_{T\in\tau^*}v(T)+\varepsilon)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid\varepsilon>0\},$$
$$B:=\{y\in\mathbb{R}^{n+1}\mid y=\sum_{S\in\mathcal{N}}\gamma_S(\chi_S, v(S)), \gamma_S\geq0, S\in\mathcal{N}\}$$

と定義する。A は凸集合，B は凸錐，$A\cap B=\phi$ になることが確かめられる。

従って，凸集合の分離定理より，

$$\exists(a_N, a)\in\mathbb{R}^{n+1}:(a_N, a)\neq 0, (a_N, a)\cdot y\geq 0>(a_N, a)\cdot(\chi_N, \sum_{T\in\tau^*}v(T)+\varepsilon) \tag{2}$$

ここで，$(a_N, a)=(a_1, \ldots, a_n, a)$ とする。また，$(\chi_N, \sum_{T\in\tau^*}v(T))\in B$ より，(2) を使って，$0>(a_N, a)\cdot(0, \varepsilon)$。$\varepsilon>0$ なので，$a<0$。ここで，$u^*=-\frac{a_N}{a}\in\mathbb{R}^n$ と定義する。$(\chi_S, v(S))\in B$ がすべての $S\in\mathcal{N}$ で成り立つことと，$(a_N, a)\cdot(\chi_S, v(S))\geq 0$ を用いて，$u^*\cdot\chi_S\geq v(S)$ が成り立つ。よって，

$$\sum_{j\in S}u_j^*\geq v(S) \tag{3}$$

が全ての $S\in\mathcal{N}$ について成り立つ。

次に，$0>(a_N, a)\cdot(\chi_N, \sum_{T\in\tau^*}v(T)+\varepsilon)$ より，$\sum_{T\in\tau^*}v(T)>-\frac{a_N}{a}\cdot\chi_N-\varepsilon=u^*\cdot\chi_N-\varepsilon$ が得られる。ここで，$\varepsilon>0$ は任意だったので，$\sum_{T\in\tau^*}v(T)\geq\sum_{j\in N}u_j^*$ が成り立つ。更に，(3) を考慮に入れると，

$$\forall T\in\tau^* \quad v(T)\geq\sum_{j\in T}u_j^*.$$

以上より，$(u^*, \tau^*)\in Core(v, \mathcal{T})$。 ∎

3．結託構造を伴う α コアと β コア

このセクションでは，α コアと β コアの性質の基本的な性質について紹介する。記号について，小文字の下付き添字によってプレーヤーを表し，大文字の下付き添字によって結託を表す。n 人標準形ゲームは，$\Gamma=(N, X_i, u_i)$ で定義される。ここで，$X_i\subset\mathbb{R}^{m_i}$ をプレーヤー i の戦略集合，$u_i:\prod_{i=1}^n X_i\to\mathbb{R}$ をプレーヤー i の利得関数とする。慣習に従い，$x_S=\{x_i\in X_i\mid i\in S\}\in X_S:=\prod_{i\in S}X_i$ を結託 S での戦略とし，$x_{-S}=\{x_i\in X_i\mid i\in N\backslash S\}\in X_{-S}:=\prod_{i\in N\backslash S}X_i$ によって，残りの結託 $N\backslash S$ の戦略を示す。同様の考えを利得ベクトル $u=(u_1, \ldots, u_n)\in\mathbb{R}^n$ に関しても適用する。次に，Zhao (1999a, b) に基づいて，α, β という行動様式を定める。特性関数 $v_\alpha:\mathcal{N}\to\mathbb{R}$ が TU ゲームで**α 流の行動様式**[(4)]とは，

$$v_\alpha(S)=\max_{x_S}\min_{y_{-S}}\sum_{i\in S}u_i(x_S, y_{-S})=\sum_{i\in S}u_i(\hat{x}_S, y_{-S}^*(\hat{x}_S)),$$

ここで $y_{-S}^*(\hat{x}_S)$ は $\hat{x}_S$ への最適罰則戦略となっている。更に，特性関数 $v_\beta:\mathcal{N}\to\mathbb{R}$ が TU ゲームで **β 流の行動様式**であるとは，

(4) α 流，β 流の行動様式に関して，結託 S 以外の各々の結託が最小化という戦略を取ると言うことと，S 以外のすべて $N\backslash S$ で最小化と言う戦略を取ることが同値であることに注意。

$$v_\beta(S)=\min_{y_{-S}}\max_{x_S}\sum_{i\in S}u_i(x_S, y_{-S})=\sum_{i\in S}u_i(x_S^*, (\hat{y}_{-S}), \hat{y}_{-S}),$$

ここで $x_S^*(\hat{y}_{-S})$ は $\hat{y}_{-S}$ に対する最適戦略になっている。

特性関数 v_α や v_β によって，α コア，β コアと言う概念は，例1に従い，それぞれ，$Core\,(v_\alpha, \{N\})$ や $Core\,(v_\beta, \{N\})$ と定義される。ここでは，それぞれを単純に，$\alpha\text{-}Core(v_\alpha)$，$\beta\text{-}Core(v_\beta)$ と書くことにする。以下の帰結は Scarf (1971) や Zhao (1999a, b)，その他によって示された基本的な性質である。

性質1：$\alpha\text{-}Core(v_\alpha)\supset\beta\text{-}Core(v_\beta)$.(5)

定義2：(Zhao 1999b) 結託 S に対して特性関数 $v_\beta(S)$ が**強分離**とは，

$$\forall i\in S: u_i(x_S^*(\hat{y}_{-S}), \hat{y}_{-S})=\min_{y_{-S}}u_i(x_S^*(\hat{y}_{-S}), y_{-S})$$

ここで，$x_S^*(\hat{y}_{-S})$ は，$\hat{y}_{-S}$ への最適戦略。(6)

この強分離条件は，結託 S への最適な罰である $N\backslash S$ の戦略が，結託 S の各々のメンバーへの最適な罰にもなっているという意味を持つ。

性質2：(Zhao) 次の条件を仮定する。

(1) 全ての $i\in N$ について X_i は凸コンパクト集合。

(2) 全ての $i\in N$ について $u_i(x)$ は連続で凹関数。

(3) 全ての $S\in\mathcal{N}$ について $v_\beta(S)$ は強分離。

この時，全ての $S\in\mathcal{N}$ について $v_\alpha(S)=v_\beta(S)$ が成立する。

性質2から，仮に β コアが強分離条件を満たす形で存在したとする。この時，同じ標準形ゲームから導入される TU ゲームの α コアが存在し，なおかつ，β コアと同一視できる。つまり，強分離を満たす β コアの存在を示すことで，同時に同一の標準形ゲームから導入される TU ゲーム

(5) 行動様式に Nash 均衡の利得の和を用いることも考えられる。Nash 流の行動様式ならば，β 流の行動様式であることが証明でき，Nash 流での行動様式をもつコアの存在は β コアの存在より強い条件が必要になることが分かる。

(6) 強分離条件を満たす特性関数 v_β は，Funaki and Yamato (1999) の TU ゲームのコアの非空条件を満たすことも示せる。更に，この条件は，Nakayama (1998) の優位懲罰戦略を満たすことも分かる。その為，結託形成に関して，ある種の誘因が与えられていることになる。

の α コアの存在を示すことも可能となる。結託構造 $\mathcal{T}$ を伴う α コアと β コアを特性関数 v_α と v_β を利用して，それぞれ，$\alpha\text{-}Core(v_\alpha, \mathcal{T}) := Core(v_\alpha, \mathcal{T})$，$\beta\text{-}Core(v_\beta, \mathcal{T}) := Core(v_\beta, \mathcal{T})$ と定義する。

命題 2：次の条件を仮定する。

(1) 全ての $i \in N$ について X_i は凸コンパクト集合。

(2) 全ての $i \in N$ について $u_i : X \to \mathbb{R}$ は連続で凹関数。

(3) 全ての $S \in \mathcal{N}$ について，$v_\beta(S)$ は強分離。

(4) $\mathcal{T}$ は N の分割全体からなる集合。

この時，$\beta\text{-}Core(v_\beta, \mathcal{T}) \neq \phi$。

証明：全ての平衡集合族 $\mathcal{B}$ について，

$$\sum_{S \in \mathcal{B}} w_S v_\beta(S) \leq \max_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{T \in \tau} v_\beta(T)$$

が成立することを示せば，存在が証明できる。β 流の行動様式が $v_\beta(S) = \sum_{i \in S}(x_S^*(\hat{y}_{-S}), \hat{y}_{-S})$ で与えられていたことに注意しながら，次の評価を行う。

$$\begin{aligned}
\sum_{S \in \mathcal{B}} w_S v_\beta(S) &= \sum_{S \in \mathcal{B}} w_S \sum_{i \in S} u_i(x_S^*(\hat{y}_{-S}), \hat{y}_{-S}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{S \in \mathcal{B}(i)} w_S u_i(x_S^*(\hat{y}_{-S}), \hat{y}_{-S}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{S \in \mathcal{B}(i)} w_S u_i(x_S^*(\hat{y}_{-S}), z_{-S}) && \text{(強分離性)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} u_i\Big(\sum_{S \in \mathcal{B}(i)} w_S(x_S^*(\hat{y}_{-S}), z_{-S})\Big) && \text{(凹性)} \\
&\leq \max_{x} \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \\
&= v_\beta(N).
\end{aligned}$$

ここで，$v_\beta(N)$ は，$\max_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{T \in \tau} v_\beta(T)$ となるので，命題 1 より証明は終了する。 ∎

4．寡占市場への応用

クールノー型の寡占市場や線形の費用関数を持つベルトラン型の寡占市場において，結託構造を伴う α コアや β コアが存在することを示す。これらの帰結により，2 つのタイプの寡占市場において，どのような結託構造が共存するのかの分析が可能となる。また，結託内の行動を企業内取引

として，同様に，結託間の行動を企業間の市場取引とみなすことで，両市場での産業構造（企業内取引と市場取引の関係）を結託構造によって特徴付けることが可能となる。この意味で，我々の帰結は Yi (1998)（線形のクールノー寡占市場モデルを具体的に分析し，一つの大きな結託と一企業からなる複数の結託が共存するという分析）の一般化となっている。

最初に，企業数が n で同質な財を生産するクールノー型の寡占市場を考える。このモデルは (N, X_i, π_i) という 3 つのデータによって定義される標準形のゲームで記述される。それぞれ，$N=\{1, 2, ..., n\}$ は，企業の集合を，$X_i=[0, \bar{x}_i]\subset\mathbb{R}$ は，第 i 企業の戦略集合で $\bar{x}_i$ を上限とする生産量の集合を表す。更に，$\pi_i:\prod_{i=1}^{n}X_i\to\mathbb{R}$ は第 i 企業の利潤関数を表現し，

$$\pi_i(x)=P(\sum_{i=1}^{n}x_i)x_i-C_i(x_i)$$

と定義される。ここで，$P(\sum_{i=1}^{n}x_i)$ は，逆需要関数で，$C_i(x_i)$ は第 i 企業の費用関数とする。

利潤関数 π_i を使って，特性関数 v_α や v_β を前述での定義のように与える。以下の性質は寡占市場のモデルでの標準的な仮定の下で，結託構造を伴う α コアや β コアが存在するという主張である。

命題 3 ：次の条件を仮定する。

(1) $P(\sum_{i=1}^{n}x_i)$ は減少関数。

(2) 全ての $i\in N$ について $\pi_i(x)$ は連続で凹関数。

(3) $\mathcal{T}$ は N の分割全てからなる。

この時，$\alpha\text{-}Core\,(v_\alpha, \mathcal{T})=\beta\text{-}Core(v_\beta, \mathcal{T})\neq\phi$。(7)

次に製品差別化を伴うベルトランモデルを考える。この寡占市場に於いても，クールノーモデルと同様の結論が成立する。製品差別化を伴うベルトランモデルは (N, P_i, π_i) という標準形ゲームにより記述される。$N=\{1, 2, ..., n\}$ を，企業の集合とする。$P_i=[0, \bar{p}_i]\subset\mathbb{R}$ は，第 i 企業の戦略の集合で $\bar{p}_i$ を上限とする価格の集合とみなす。$\pi_i:\prod_{i=1}^{n}P_i\to\mathbb{R}$ は，第 i 企業の利潤関数で，

$$\pi_i(p_1, ..., p_n)=D_i(p_1, ..., p_n)(p_i-c_i)$$

と定義される。ここで，$D_i:\prod_{i=1}^{n}P_i\to\mathbb{R}$ は第 i 企業が直面している需要関数であり，c_i は第 i 企業の費用関数である。

行動様式を表す特性関数 v_α や v_β は (N, P_i, π_i) という標準形のゲームから前述の定義のように与

(7) この性質の成立に関して，費用関数 $C_i(x_i)$ の凹性や凸性といった仮定が必要無いことに注意されたい。また，証明は命題 4 と同様のアイディアで与えられる。

えられる。以下の性質から線形の費用関数を持つベルトラン市場でも，結託構造を伴うαコアやβコアの存在が保証される。

命題4：次の条件を仮定する。

(1) 全ての$i \in N$について，D_iは，p_iの減少関数，全ての$j \neq i$を満たすp_jの増加関数，更に，連続関数。

(2) 全ての$i \in N$について，$\pi_i(p)$は凹関数。

(3) $\mathcal{T}$は，Nの分割全てからなる。

この時，$\alpha\text{-}Core\,(v_\alpha, \mathcal{T}) = \beta\text{-}Core(v_\beta, \mathcal{T}) \neq 0$。

証明：証明にあたり，$\pi_S^* : \prod_{i \notin S} P_i \to \mathbb{R}$ を

$$\pi_S^*(p_{-S}) = \max_{p_S} \pi_S(p_S, p_{-S}) := \max_{p_S} \sum_{i \in S} \pi_i(p_S, p_{-S}).$$

と定義する。

Step 1：$p_{-S} < \bar{p}_{-S} \Rightarrow \pi_S^*(p_{-S}) < \pi_S^*(\bar{p}_{-S})$

性質の仮定 (1) から

$$\begin{aligned}\pi_S(p_S, p_{-S}) &= \sum_{i \in S} D_i(p_S, p_{-S})(p_i - c_i)\\ &< \sum_{i \in S} D_i(p_S, \bar{p}_{-S})(p_i - c_i)\\ &= \pi_S(p_S, \bar{p}_{-S})\end{aligned}$$

が全てのp_Sについて成立する。従って，

$$\pi_S^*(p_{-S}) = \max_{p_S} \pi_S(p_S, p_{-S}) < \max_{p_S} \pi_S(p_S, \bar{p}_{-S}) = \pi_S^*(\bar{p}_{-S}).$$

Step 2：強分離条件のチェック

$v_\beta(S) = \min_{p_{-S}} \pi_S^*(p_{-S}) = \pi_S^*(\bar{p}_{-S})$ なので，ステップ1から $\bar{p}_{-S} \leq p_{-S}$ がわかる。D_iはp_{-S}に関して増加関数なので，

$$\pi_i(p_S, \bar{p}_{-S}) \leq \pi_i(p_S, p_{-S})$$

が全てのp_Sと全ての$i \in S$で成立する。よって，

$$\pi_i(p_S^*(\bar{p}_{-S}), \bar{p}_{-S}) \leq \pi_i(p_S^*(\bar{p}_{-S}), p_{-S})$$

ここで，$p_S^*(\bar{p}_{-S})$は$\bar{p}_{-S}$への最適反応を表す。π_iは連続で，$\bar{p}_{-S} \leq p_{-S}$であることに注意して，

$$\pi_i(p_S^*(\bar{p}_{-S}), \bar{p}_{-S}) = \min_{p_{-S}} \pi_i(p_S^*(\bar{p}_{-S}), p_{-S}).$$

これは，v_β が強分離であることを示している。

Step 3 ：存在

π_i は凹関数で特性関数 v_β は強分離条件を満たしている。従って，命題2より，結託構造を伴う β コアが存在する。更に，性質2より，結託構造を伴う β コアは，この標準形のゲームの結託構造を伴う α コアに一致する。 ∎

5．帰結と残された課題

利得が移転可能なゲームのクラスに於いて，結託構造を伴うコアの存在に関する議論を行ってきた。このコア存在のための必要十分条件は平衡ゲームに似た形で現れることがわかった。寡占市場への応用を考えると，結託構造を伴う α コアや β コアが自然な仮定の下で成立することも証明された。これらの応用により，寡占市場での分析に対して，どのような産業構造が起こり得るのかの1つのアプローチを提示したといえる。

我々の将来的トピックは，このコアの概念に Utsumi（1999）で導入されたような知識構造に基づいた学習構造を導入することである。この学習構造の追加によって，非対称情報下での分析が可能になり，結託構造の再編等の動きを追跡することが可能になるかも知れない。また，応用としては，産業構造の変化をとらえることが可能になり得る。

（経済学部研究助手）

参 考 文 献

Funaki, Y., and T.Yamato., (1999). "The Core of an Economy with a Common Pool Resource : A partition Function Form Approach," *International Journal of Game Theory*, 28, 157-171.

Ichiishi, T., (1981). "A Social Coalitional Equilibrium Existence Lemma," *Econometrica*, 49, No.2. 369-377.

Nakayama, M., (1998). "Self-binding Coalitions," *Keio Economic Studies*, 35, 1-8.

Scarf, H., (1971). "On the Existence of Cooperative Solution for a General Class of N-Person Games," *Journal of Economic Theory*, 3, 169-181.

Utsumi, Y., (1999). "A Subjective Probability Converges to the Objective Probability," mimeo.

Utsumi, Y. (2000). "An Existence Result of a Core with a Coalition Structure and its Applications to Oligopoly Markets," mimeo.

Yi. S., (1998). "Industry Profit-maximizing Joint-venture Structure in a Linear Cournot Oligopoly," *Economics Letters*, 58, 361-366.

Zhao, J., (1999a). "The Existence of TU-α-core in Normal Form Games," *International Journal of Game Theory*, 28, 25-34.

——, (1999b). "A β-core Existence Result and Its Application to OligopolyMarkets," *Games and Economic Behavior*, 27, 153-168.