「三田学会雑誌」93巻3号（2000年10月）

システムリスクとネットワーク形態*

舘　　健太郎

要　　約

この研究の目的はシステムリスクが存在する場合における効率的なネットワーク形態の性質とその実現可能性を調べることにある。これまでネットワーク形態について論じられたものの多くはピラミッド型やハブ・アンド・スポーク型などツリー型の効率性について論じられたものであった。これに対して本論文ではツリー型の利点とされていた性質が同時に弱点にもなっていることを指摘する。ネットワークを構成するリンクが何らかの機能障害を起こす危険性をはらんでいるとき，ツリー型は連結の信頼性の面でサイクル型に比べて不利になる傾向がある。これはサイクル型のもつ保険効果と関連している。しかしながらこのネットワークの形成が分権的に行われた場合には，過少リンクの問題が生じることがある。

1　はじめに

本論文はネットワークにシステムリスクが存在しているとき，どのようなネットワーク形態が望ましいのか，またそれは実際に達成可能かについて考察したものである。ここでネットワークとは，プレーヤー（あるいは拠点）同士を結ぶリンク（関係）の束のことをさす。これはいささか抽象的な表現であるが，リンクに具体的な意味を付加することによって，さまざまな経済・社会現象をネットワークとして解釈することができる。ネットワークに関する問題は，ネットワークが全体としてのパフォーマンスあるいは彼らの利益の配分などにどういった影響を及ぼすかなどに関連して議論されてきた。

まずネットワーク形態と効率性との関わりについては，組織内の意志決定問題の文脈でいくつかの文献が見られる。Radner（1993）は組織内部の情報伝達をリンクとして，組織の末端で集められた情報がいかに迅速にトップのもとへ報告されるか，という観点から望ましい組織形態を分析し，

*　松島斉氏、柳川範之氏、佐々木宏夫氏、川又邦雄氏、大山道広氏、蓼沼宏一氏、梶井厚志氏、神谷和也氏ほか多くの方に有益なコメントを頂きました。ここに感謝の意を表します。この研究は日本学術振興会による資金援助を受けています。

多くの情報を同時並行で処理できるピラミッド型の伝達方法がもっとも効率的であると結論づけた。Bolton-Dewatripont (1994) は分業の利益に注目し，やはり階層形態の組織が望ましいことを示した[(1)]。また産業組織論の分野では，Hendricks-Piccione-Tan (1995) が航空産業における独占企業の路線決定について論じ，密度の経済性が存在する場合，ハブ空港を中心として放射線状に路線を運行させるハブ・アンド・スポーク型のネットワークが企業にとって最適であることを示した。

これらの文献に共通しているのは，いずれもツリー型の利点について論じているということである。ツリー型とは，リンクをたどってどこかで元の位置に戻るようなことがないネットワーク形態であり，ピラミッド型やハブ・アンド・スポークはツリー型の一種である。ツリー型のネットワークは最少のリンクで全体をネットワークに取り込むことができるという特徴をもつ。したがってリンクを形成・維持するためにかかる時間的あるいは金銭的コストがそれほど低くないとき，ツリー型はコスト面で優位に立つ。しかしこの利点は，ツリー型のもつ弱点と表裏一体となっている。

グラフ理論において，グラフがツリーであるとは次のような条件と同値であることが知られている。

(1) すべての点が最小限の枝でつながっている。

(2) どんな2点もただ1つのパスしか持たない。

(1) の性質に注目すれば，ツリー型のネットワークがコスト面で有利であるということが強調されることになる。しかし本論文では (2) の性質に注目し，ツリー型が信頼性の面で不利になるということを指摘したい。 (2) の性質は，ネットワーク上においてプレーヤー同士のリンクをつなぐパスがつねに一通りしかないということを意味しており，もし何らかの理由でリンクが切断してしまう危険性があるときには，パスの中のリンクが一カ所でも切断されれば連結が途絶えてしまう。このため，ツリー型は同時にリスクに対して脆弱であるという面を持っているのである。

これに対してサイクル型のネットワークは，コスト面ではツリー型に比べて不利である一方，お互いのリンクがもしものときの保険の役割も果たすことができるため，システム・リスクに対して比較的頑強なネットワーク形態である。したがって，切断リスクの影響が無視できない場合には，サイクル型のネットワークが望ましい。かつて，アメリカ国防省は，ソビエト連邦から核攻撃をうけても情報通信がなるべく途絶えないようにするために，従来のツリー型の連絡網から，インターネットの発端となった網目状のアーパネットを構築した，という話はこの点をよく示している。

ただこのようなネットワークが全体の統制の下で形成されるのではなく，リンクに直接かかわる当事者たちによって分権的に形成されるときには，必ずしも望ましいネットワークが実現するとは

（1） 組織の意志決定過程に関するサーベイは例えば Bolton-Dewatripont (1995) を参照されたい。

限らない。なぜなら，当事者たちが第三者に与えるリンクの保険効果をまったく考慮しないからである。ネットワークの形態と利益の配分との関係については，Jackson-Wolinsky (1996) が各プレーヤーが非協力的に他のプレーヤーとリンクを結ぶかどうかを決めている状況を定式化し，一般に安定的なネットワークが必ずしも効率的であるとは限らないことを示した。またDutta-Mutuswami (1997) は，これに関連して効率的なネットワークを履行させるためのメカニズムについて，Jackson-Watts (1998) は時間を通じたネットワークの変化について論じている。本論文ではより具体的に，リンクの保険効果という外部性の存在が，過少リンクの問題を引き起こすことを示す。ネットワークにおいて連結の信頼性の問題は，最適なネットワークの形態や，その運営に大きな影響を及ぼしているのである。

以降，第2節でモデルの定式化を行った上で，第3節において効率的なネットワーク形態とその変化について述べる。また第4節では安定的なネットワークについて分析し，効率性との関係を調べる。最後に第5節で結論および今後の課題について簡単にふれる。

2　モデル

はじめにネットワークの幾何的な性質を表現するためにグラフの概念を導入した上で，
不確実性下の結合ゲームを定式化する。

2.1　グラフ

グラフは (N, g) は点と枝の集合から構成される。点の集合 $N=\{1, 2, \ldots, n\}$ の各要素はプレーヤーを表し，$n\geq 3$ とする。また枝の集合 $g\subseteq N^2$ の各要素は二人のプレーヤーの組である。例えば $\{i, j\}\in g$ のときプレーヤー i と j に何らかの関係があることを表し，これをリンクと呼ぶ。ここで i と j の順番は区別せず，リンクの方向には意味がないものとする。以後，表記の簡単化のためにグラフ (N, g) を g，リンク $\{i, j\}$ を ij と書くことにする。

グラフ g 上でリンク ij が存在するときプレーヤー i と j は**隣接**しているという。またプレーヤー i と隣接しているプレーヤーの数をプレーヤー i の**次数**といい，$d_g(i)$ であらわす。プレーヤー i は隣接するプレーヤーとリンクを持っているが，たとえ自分が隣接していなくても隣接するプレーヤーを通じて間接的に繋がることができるかもしれない。グラフ g において異なる点からなる点列 $\{i_0=i, i_1, \ldots, i_T=j\}$ $(i_k i_{k+1}\in g, k=0, 1 \ldots, T-1)$ が存在するとき，プレーヤー i と j はグラフ g で**連結**しているといい，この点列を長さ T のパスという。とくにプレーヤー i と j の間の最短パスの長さを**距離**といい，t_{ij} と書く。もし i と j が連結していないときには $t_{ij}=\infty$ と定義しておく。任意のプレーヤーのペアが連結しているグラフを**連結グラフ**といい，そうでないものを**非連結グラフ**という。パス $\{i_0, i_1, \ldots, i_t\}$ $(t\geq 2)$ に対して，$\{i_0, i_1, \ldots, i_t\}+i_t i_0$ を**サイクル**という。

$g' \subseteq g$ を満たすグラフ g' をグラフ g の**部分グラフ**といい，グラフ g の部分グラフ全体の集合を $G(g)=\{g'|g' \subseteq g\}$ とする。ここでプレーヤーの集合 N は共通であるとする。すべてのプレーヤー間で隣接しているグラフを**完全グラフ**といい，K_n とかく。n 人でつくられるあらゆるグラフの集合は，$G=G(K_n)$ である。一つもサイクルを含まない連結グラフを**ツリー**という。プレーヤーを二つのクラスに分け，同じクラスのプレーヤー同士が隣接しないようにリンクが形成されているグラフを**二部グラフ**，とくにクラス間ですべて隣接しているグラフを**完全二部グラフ**といい，$K_{a,b}$ とかく。a，b はそれぞれクラスに属する人数である。**スター**は一つの**ハブ**と $n-1$ 個の**端点**からなる完全二部グラフ $K_{1,n-1}$ である。端点とは次数が 1 である点を指す。

2.2 ネットワーク形態の分類

分析を始めるにあたって，ネットワーク形態をグラフの特徴にもとづいていくつかのクラスに分類する。リンクのまったくないグラフを**孤立型**という。孤立型以外の非連結なグラフを**非連結なネットワーク**と呼ぶ。グラフがツリーになっているネットワーク形態を**ツリー型**という。そして，少なくとも一つサイクルを含む連結グラフを**サイクル型**と名付ける。

孤立型はプレーヤー同士に相互依存のない自給自足的な状態を表している。ツリー型のネットワーク形態には，ハブ・アンド・スポーク型とも呼ばれるスターや，ピラミッド型の組織などが含まれる。またインターネットのような蜘蛛の巣状のネットワークや部門間の情報交換が日常的に行われている組織はサイクル型の分類に入れることができるだろう。

2.3 戦略グラフと実現グラフ

ネットワークの形成を調べるために，次のような戦略型ゲーム $(N, \{S_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N})$ を考える。プレーヤー i の戦略 $s_i \in S_i = 2^{N\setminus\{i\}}$ はリンクを希望するプレーヤーの名前のリストである。各プレーヤーはリンクを希望しているプレーヤーを同時に指名し，もしも双方の希望が一致していたときにはリンクが成立するものとする。もしもどちらかが希望していなかったときは，リンクが結ばれない。したがってプレーヤーの戦略の組 $s=(s_1, \ldots, s_n)$ によってグラフ

$$g(s)=\{ij|j\in s_i,\ i\in s_j\}$$

は一意に決定される。このグラフ $g(s)$（簡単に g とする）を**戦略グラフ**と呼ぶことにする。
ネットワーク形態はこの戦略グラフによって分類される。

ただしこのネットワークは実際には実現されないかもしれない。いま，ほんのわずかな確率だが不可抗力によってリンクが断絶する危険にさらされているとしよう。このリンクに対する不確実性を**切断リスク**と呼ぶ。実現されるグラフ g' は，この危険を免れたリンクのみによって構成され，戦略グラフ g の部分グラフになる。このグラフ $g' \subseteq g$ を**実現グラフ**と呼ぶ。明らかに実現グラフ

の集合は $G(g)$ である。戦略グラフ g のもとでグラフ g' が実現する条件付確率を $P(g'|g)$ とする。切断リスクはリンクごとに独立で同一であるとし，リンクが切断される確率を $0 \leq \epsilon \leq 1$ としておく。

2.4　利得

各プレーヤーの利得関数は，

$$u_i(g', g) = \sum_{j \neq i} \delta^{t_{ij}(g')} - d_g(i)c,\ i, j \in N$$

で与えられる。プレーヤーの収益は実現グラフにおける他のプレーヤーとの距離に依存する。もしプレーヤー同士が隣接しているときには互いに $0 < \delta < 1$ だけの収益をもたらす。プレーヤー i と j との距離が $t_{ij}(g')$ であるときには，他のプレーヤーを一人仲介するごとに，互いに収益が δ に減少し，$\delta^{t_{ij}(g')}$ になる。またプレーヤー同士が連結していないときには，$\lim_{t_{ij}(g') \to \infty} \delta^{t_{ij}(g')} = 0$ となり収益はもたらさない。このようにより短い距離で連結している方がプレーヤーにとって収益が大きいが，一方で隣接するには i と j は互いに c だけのコストをかけなくてはならない。このコストはリンクを形成するためにかかる固定的なコストであり，実際にリンクが実現するしないにかかわらずかかるものとする。したがってコストは戦略グラフによって確定する。

この利得構造は Jackson-Wolinsky (1996) が結合モデルとして紹介したものに基づいている。ただ彼らのモデルではリンク切断の危険性はなく，戦略グラフはつねに実現する。しかし本論文では，実現グラフは戦略グラフを所与として確率的に決まるので，事前には利得が確定しない。したがってプレーヤーたちは期待利得が最大になるように行動するものとする。

戦略グラフ g における各プレーヤーの期待利得は，

$$U_i(g) = E[u_i(g', g)|g] = \sum_{g' \in G(g)} \sum_{j \neq i} P(g'|g) \delta^{t_{ij}(g')} - d_g(i)c,\ i, j \in N$$

で表される。例えば，戦略グラフが ij のときには，プレーヤー i の期待利得は $U_i(ij) = (1-\epsilon)\delta - c$ となる。

2.5　効率性と安定性

次にネットワークの効率性と安定性についての基準を明確にしておく。効率的なネットワークは各プレーヤーの期待利得の総和を最大にする戦略グラフとして定義する。

定義 1（効率性）. ネットワーク g が**効率的**であるとは，g が

$$v(g) \geq v(h)\quad \forall h \in G$$

を満たすことである。ここで $v(g)$ はネットワークの期待価値を意味し，各プレーヤーの期待利得の総和で表現される。つまり，

$$v(g)=\sum_{i\in N}U_i(g)$$

である。

さらにプレーヤーたちが戦略的にリンクの形成をしている状況を考えるために**対安定性**の概念を定義する。

定義 2（対安定性）． ネットワーク g が安定的であるとは，

$$U_k(g)\geq U_k(g-ij)\ \ \forall ij\in g, k=i, j$$
$$U_i(g)<U_i(g+ij)\Rightarrow U_j(g)>U_j(g+ij)\ \ \forall ij\notin g$$

が成立するときである。

対安定性は Jackson-Wolinsky（1996）によって採用された安定概念である。安定的なネットワークにおいてネットワーク上のリンクが維持されるためには，当事者双方にリンクを結ぶインセンティブがなければならない。またどちらかのプレーヤーにリンクを結ぶインセンティブがなければ，リンクが付け加えられることはない。ちなみにこの安定概念とナッシュ均衡との強弱関係は，はっきり決まらないことに注意しておきたい。対安定性は二人が同意すればリンクを形成できる，という意味で二人による協力を許している。しかし一方で，一人が同時に複数のリンクを切る可能性は考慮しない。

3　システムリスクと効率的なネットワーク形態

以下，議論の簡単化のために $n=3$ の場合について分析することにする。プレーヤーの数が 3 人の場合に考えられるネットワークの集合は，

$$G=G(K_3)=\{\phi, ij, \{ij, jk\}, K_3\}\ \ i, j, k\in N$$

である（図 1 参照）。ϕ は孤立型，ij は非連結なネットワーク，$\{ij, jk\}$ はツリー型（特にスター）である。このネットワークにおいては j がハブ，i, k が端点になっている。また，K_3 はサイクル型のネットワークである。

3.1　効率的なネットワーク形態

これから効率的なネットワーク形態を探るために，各ネットワークの期待価値を導く。

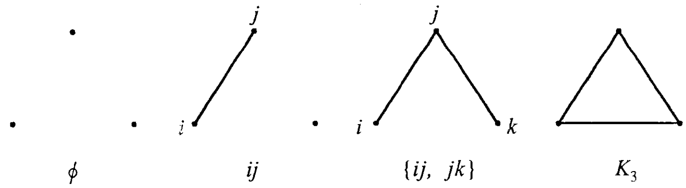

図1　3人によって作られるネットワーク形態

孤立型における各プレーヤーの期待利得は0であり，ネットワークの期待価値も0になる。非連結なネットワーク ij において，i と j の期待利得は $(1-\epsilon)\delta-c$，k の期待利得は0である。よって

$$v(ij)=2[(1-\epsilon)\delta-c] \tag{1}$$

となる。ツリー型において，ハブ j の期待利得は

$$U_j(\{ij, jk\})=2[(1-\epsilon)\delta-c] \tag{2}$$

であり，また端点 i, k の期待利得は，

$$U_i(\{ij, jk\})=U_k(\{ij, jk\})=(1-\epsilon)\delta+(1-\epsilon)^2\delta^2-c \tag{3}$$

になる。(3) 式の第2項は端点同士が連結することによって得られる収益の部分である。ツリー型において i と k は隣接していないが，ハブ j を経由して連結することは可能である。ただしそのためには2つのリンクが維持されていなければならないので，端点同士が連結する確率は $(1-\epsilon)^2$ になっている。i と k はコストはリンク一つ分しか支払っていないが，ハブ以外からもある程度収益を得ることができるのである。

(2)，(3) よりツリー型の期待利得は，

$$v(\{ij, jk\})=4[(1-\epsilon)\delta-c]+2(1-\epsilon)^2\delta^2 \tag{4}$$

となる。$v(\{ij, jk\})-v(ij)\geq v(ij)-v(\phi)$ より，$v(\phi)<v(ij)$ ならば $v(ij)<v(\{ij, jk\})$ であることが分かる。つまり非連結なネットワークは効率的になりえず，効率的なネットワークは孤立型を除いて連結でなければならない。

次にサイクル型において各プレーヤーの期待利得は，

$$U_i(K_3)=2[(1-\epsilon)\delta-c+\epsilon(1-\epsilon)^2\delta^2],\ i\in N \tag{5}$$

となる。プレーヤー i は確率 $1-\epsilon$ でリンク ij が維持される。さらにもしリンク ij が切断されてい

たとしても，リンク ik と kj がともに維持されているときには，i と j は k を経由して連結することができる。したがって確率 $\epsilon(1-\epsilon)^2$ で δ^2 だけの収益が得られる。また i と k との関係も同様に求めることができる。各プレーヤーの期待利得は同一なので，サイクル型の期待価値は，

$$v(K_3)=3U_1(K_3)=6[(1-\epsilon)\delta-c+\epsilon(1-\epsilon)^2\delta^2] \tag{6}$$

である。

ここでツリー型におけるハブ j のツリー型とサイクル型での利得の違いに注目しておきたい。次の結果は，j が直接かかわらないリンク ik が彼の利得にどのような影響をもたらすかを示している。

命題 1．（1）$0<\epsilon<1$ のとき，j のサイクル型における期待利得はツリー型のときよりも高くなる。

$$U_j(K_3)>U_j(\{ij, jk\})$$

（2）$\epsilon=0$ のとき，j の期待利得はツリー型とサイクル型で等しい。

$$U_j(K_3)=U_j(\{ij, jk\})$$

これは $U_j(K_3)-U_j(\{ij, jk\})=2\epsilon(1-\epsilon)^2\delta^2\geq 0$ より明らかである。$\epsilon=0$，すなわちリンクが確実に維持される場合には，j にとって両者は無差別である。なぜなら，彼はすでに他のすべてのプレーヤーと隣接しており，リンク ik が増えることによる追加的な利益はないからである。しかし，もしもリンクに不確実性が存在している場合には，彼にとっても自らのリンクを完全に信頼するわけにいかない。このとき，リンク ik は自分のリンクが維持できなかったときの代替パスの一部として役立つ。すなわち，リンク ij（または jk）が切断されたときには，リンク jk（または ij）と ik を使って i（または k）との連結性を保つことができるのである。このようにハブ j はリンク ik が追加されることによって，新たにコストを支払うことなく迂回ルートを確保し，保険の利益を得ることができる。この効果を**保険効果**と呼ぶことにする。

ネットワークの期待価値が求められたので，それらを比較して効率的なネットワーク形態を調べることができる。それぞれ二つのネットワークのどちらの期待価値が大きいかはリンクの単位コストの大きさで決まる。ここで境界値となるコスト水準を定義しておく。

$$v(\{ij, jk\})\geq v(\phi)=0 \Leftrightarrow c\leq \bar{c}^*=(1-\epsilon)\delta+\frac{1}{2}(1-\epsilon)^2\delta^2 \tag{7}$$

$$v(K_3)\geq v(\phi)=0 \Leftrightarrow c\leq \hat{c}^*=(1-\epsilon)\delta+\epsilon(1-\epsilon)^2\delta^2 \tag{8}$$

$$v(K_3) \geq v(\{ij, jk\}) \Leftrightarrow c \leq \underline{c}^* = (1-\epsilon)\delta - (1-3\epsilon)(1-\epsilon)^2\delta^2 \tag{9}$$

コストおよびリスクの大きさにもとづいて，次のように効率的なネットワーク形態が決定される。

命題 2． (1) 孤立型が効率的になるのは，$0 \leq \epsilon \leq \frac{1}{2}$ かつ $\bar{c}^* \leq c$ または $\frac{1}{2} < \epsilon \leq 1$ かつ $\hat{c}^* \leq c$ のときである。

(2) ツリー型が効率的になるのは，$0 \leq \epsilon \leq \frac{1}{2}$ かつ $\underline{c}^* \leq c$ のときである。$\frac{1}{2} < \epsilon \leq 1$ のときには効率的にならない。

(3) サイクル型が効率的になるのは，$0 \leq \epsilon \leq \frac{1}{2}$ かつ $0 \leq c \leq \underline{c}^*$ または，$\frac{1}{2} < \epsilon \leq 1$ かつ $0 \leq c \leq \hat{c}^*$ のときである。

証明 (7) から (9) より，$\bar{c}^* - \underline{c}^* = \frac{3}{2}(1-2\epsilon)(1-\epsilon)^2\delta^2$, $\bar{c}^* - \hat{c}^* = \frac{1}{2}(1-2\epsilon)(1-\epsilon)^2\delta^2$, $\hat{c}^* - \underline{c}^* = (1-2\epsilon)(1-\epsilon)^2\delta^2$ である。したがって，$0 \leq \epsilon < \frac{1}{2}$ のとき $0 < \underline{c}^* < \hat{c}^* < \bar{c}^*$，また $\frac{1}{2} \leq \epsilon \leq 1$ のとき $0 \leq \bar{c}^* \leq \hat{c}^* \leq \underline{c}^*$ である。孤立型が効率的になるのは，$\bar{c}^* \leq c$ かつ $\hat{c}^* \leq c$ のときより，$0 \leq \epsilon < \frac{1}{2}$ のとき $\bar{c}^* < c$，$\frac{1}{2} \leq \epsilon \leq 1$ のとき $\hat{c}^* \leq c$ である。ツリー型が効率的になるのは，$c^* \leq \underline{c}$ かつ $c \leq \bar{c}^*$ のときであり，$0 \leq \epsilon < \frac{1}{2}$ のとき $\underline{c}^* \leq c \leq \bar{c}^*$ であり，$\frac{1}{2} \leq \epsilon \leq 1$ のときには条件を満たす c は存在しない。サイクル型が効率的になるのは，$c \leq \hat{c}^*$ かつ $c \leq \underline{c}^*$ のときであり，$0 \leq \epsilon < \frac{1}{2}$ のとき $c \leq \underline{c}^*$，$\frac{1}{2} \leq \epsilon \leq 1$ のとき $c \leq \hat{c}^*$ になる。(証明終)

この命題からすぐに分かることはコストとリンクの数との関係である。それほどコストが低くない場合にはツリー型が望ましく，コストがある程度低いときには，サイクル型が効率的になる。この結果からもツリー型がコスト面で相対的に有利なネットワークであることが分かる。それでは追加的コストを支払ってリンクを増やし，サイクル型にすることによる追加的利益は何であろうか。一つにはプレーヤー間の距離を短くして，より多くの価値を得ることができるということである。そしてもう一つ，連結の信頼性を高め，より確実に価値を得ることができるという利点がある。この点を次節で明らかにする。

3.2 リスクの増大による影響

切断リスクが増大し，リンクについての不確実性が高まったとき，ネットワーク形態にどのような影響を及ぼすのであろうか。命題2にもとづいて，比較静学を試みる。

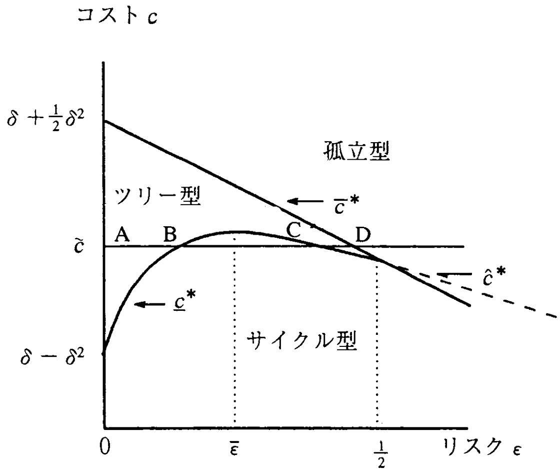

図 2　リスクの増大と効率的なネットワーク

命題 3．（1）すべての $0\leq\epsilon<1,\delta$ に対して，ϵ が増大するとき $\bar{c}^*$ と $\hat{c}^*$ は減少する。

$$\frac{\partial\bar{c}^*}{\partial\epsilon}<0,\quad \frac{\partial\hat{c}^*}{\partial\epsilon}<0$$

（2）$\delta>\frac{1}{5}$ かつ $0\leq\epsilon<\bar{\epsilon}=\frac{7-\sqrt{4+9/\delta}}{9}$ において，ϵ が増大するとき $\underline{c}^*$ が増加する。

$$\frac{\partial\underline{c}^*}{\partial\epsilon}>0$$

証明　（1）第 1 式は $\frac{\partial\bar{c}^*}{\partial\epsilon}=-\delta-(1-\epsilon)\delta^2<0$ より明らか。第 2 式は $\frac{\partial\hat{c}^*}{\partial\epsilon}=-\delta(1-\delta(1-\epsilon)(1-3\epsilon))$。$0\leq\epsilon<1$ において $(1-\epsilon)(1-3\epsilon)\leq1$ より，$\frac{\partial\hat{c}^*}{\partial\epsilon}\leq-\delta(1-\delta)<0$ である。

（2）$\frac{\partial\underline{c}^*}{\partial\epsilon}=-\delta+(5-14\epsilon+9\epsilon^2)\delta^2$ よりこれが正であるとき $0\leq\epsilon$ かつ $\epsilon<\frac{7-\sqrt{4+9/\delta}}{9}<1$ を満たさなければならない。$0<\frac{7-\sqrt{4+9/\delta}}{9}$ ならば $\delta>\frac{1}{5}$ であることより結果が導かれる。（証明終）

図 2 はリスクの増大による効率的なネットワーク形態の変化を表したものである。命題 3 により $\bar{c}^*$ は右下がり，$\underline{c}^*$ は $\epsilon=\bar{\epsilon}$ まで右上がりの曲線になる。いま，コストが $c=\tilde{c}$ で，当初不確実性がない状況（点 A）を考える。この点ではツリー型が効率的になっている。しかしコストがそのままでリスクが増大していったとき，点 B から点 C までの間において効率的なネットワークはツリー型からサイクル型に変化する。さらにリスクが増大すると点 C から点 D までの間において再びツリー型に戻り，点 D 以降に孤立型になる。

ツリー型の期待価値は，（4）と（7）から

$$v(\{ij, jk\})=4[\bar{c}^*-c]$$

と書き直すことができるので，命題3の（1）より，

$$\frac{\partial v(\{ij, jk\})}{\partial \epsilon}=4\frac{\partial \bar{c}^*}{\partial \epsilon}<0$$

である。同様に，サイクル型の期待価値についても，(6）と（8）および命題3の（1）より，

$$\frac{\partial v(K_3)}{\partial \epsilon}=6\frac{\partial \hat{c}^*}{\partial \epsilon}<0$$

であることが確かめられる。したがって，命題3の（1）は切断リスクが増大することによって，ツリー型もサイクル型もネットワークの期待価値が減少することを意味している。また（4)，(6)，(9）より

$$v(K_3)-v(\{ij, jk\})=2[\underline{c}^*-c]$$

であるから，命題3の（2）より $\delta>\frac{1}{5}$ かつ $0\leq\epsilon<\bar{\epsilon}$ のとき

$$\frac{\partial v(\{ij, jk\})}{\partial \epsilon}<\frac{\partial v(K_3)}{\partial \epsilon}<0 \tag{10}$$

となる。(10）より，命題3の（2）はリスクがそれほど大きくないときには，リスクによる期待価値の減少をツリー型よりもサイクル型の方が抑えることができることを示している。点 B においてツリー型からサイクル型に変化させるのは，不確実性が増すにつれてネットワークの連結が保てなくなる危険性が高まるため，保険効果をもつサイクル型によって期待価値の減少を抑え，より確実に価値を得ることができるからである。

4　効率的なネットワークの実現可能性

前節まではどのようなネットワーク形態が望ましいかについて議論してきた。ではネットワークが全体の統制の下で作られるのではなく，プレーヤーたちが戦略的にリンクを形成していくときに効率的なネットワークを実現することができるのであろうか。そこでこれから安定的なネットワーク形態について分析し，効率的なネットワーク形態と比較することにする。

4.1　安定的なネットワーク形態

対安定性にもとづいて安定的なネットワーク形態を求める。効率的なネットワークのときと同様，安定的なネットワークはコストとリスクの大きさによって決まり，次のような命題にまとめられる。

命題4． (1) 孤立型が安定的であるのは $\bar{c}^s<c$ のときである。

(2) ツリー型が安定的であるのは $0\leq\epsilon\leq\frac{1}{2}$ かつ $\underline{c}^s<c\leq\bar{c}^s$ のときである。$\frac{1}{2}<\epsilon<1$ のときには安定的になりえない。

(3) サイクル型が安定的であるのは $0\leq c\leq\underline{c}^s$ のときである。

なお,

$$\bar{c}^s=(1-\epsilon)\delta \tag{11}$$

$$\underline{c}^s=(1-\epsilon)\delta-(1-2\epsilon)(1-\epsilon)^2\delta^2 \tag{12}$$

である。

証明 孤立型が安定的であるとき, $U_h(ij)\geq U_i(\emptyset), h=i,j$ を満たすので, $(1-\epsilon)\delta=\bar{c}^s<c$ である。また $U_i(ij)\geq U_i(\emptyset)$ ならば, $U_h(ij), h=j,k$ であることから非連結なネットワークは安定的ではない。ツリー型において誰もリンクを一方的に切らないための条件は $c\leq\bar{c}^s$ である。また i と k がリンク ik を作ろうとしないための条件は $U_h(\{ij,jk\})>U_h(K_3), h=i,k$ より $(1-\epsilon)\delta-(1-2\epsilon)(1-\epsilon)^2\delta^2=\underline{c}^s<c$ である。サイクル型において誰もリンクを切らないのは $\underline{c}^s\geq c$ であるときである。ところで $\bar{c}^s-\underline{c}^s=(1-2\epsilon)(1-\epsilon)^2\delta^2$ より $0\leq\epsilon\leq\frac{1}{2}$ のとき $0<\underline{c}^s\leq\bar{c}^s$, また $\frac{1}{2}<\epsilon<1$ のとき $0<\bar{c}^s<\underline{c}^s$ であるから, $\frac{1}{2}<\epsilon<1$ のときツリー型は安定的になり得ない。(証明終)

命題4より, 非連結なネットワークは安定的でない。もし i と j がリンクを結んで正の期待利得が得られるなら, j は k とのリンクによって同じだけの追加的利得が得られる。また k にとっては j だけでなく i との連結によっても追加的利得が得られるために j 以上にリンクを結ぶインセンティブをもつ。よって, もし小さなネットワークが存在しうるならば, 全体が連結されるまでネットワークが広がるのである。ツリー型とサイクル型のどちらかが安定的になるかは, 端点である i と k がお互いにリンクを結ぶインセンティブをもつかどうかで決まる。リンクを結ぶことによる i と k の追加的収益には, 距離が短くなることと連結の確率が高くなることの二つの効果がある。そしてこの追加的収益が追加的コスト c よりも大きいときには, サイクル型が形成されることになる。効率的なネットワークの分析のときと同様に, リスクが増大したときには i と j がリンクを追加して連結性を維持しようとするだろうか。次の命題は, リスクの増大による安定的なネットワーク形態への影響について述べたものである。

命題5． (1) すべての ϵ,δ に対して

$$\frac{\partial\bar{c}^s}{\partial\epsilon}<0$$

(2) $\delta>\frac{1}{4}$ かつ $0\leq\epsilon<\tilde{\epsilon}=\frac{5-\sqrt{1+6/\delta}}{6}$ のとき，

$$\frac{\partial \underline{c}^s}{\partial \epsilon}>0$$

証明 (1) $\frac{\partial \bar{c}^s}{\partial \epsilon}=-\delta<0$ である。(2) $\frac{\partial \underline{c}^s}{\partial \epsilon}=-\delta+2(2-5\epsilon+3\epsilon^2)\delta^2$ よりこれが正であるためには $0\leq\epsilon$ かつ $\epsilon<\frac{5-\sqrt{1+6/\delta}}{6}<1$ を満たさなければならない。$\delta>\frac{1}{4}$ のとき $0<\frac{5-\sqrt{1+6/\delta}}{6}$ であることから結果が導かれる。(証明終)

命題5もプレーヤー i と k の期待利得の変化について命題3と同じような解釈をつけることができる。(3)，(5) より

$$\frac{\partial U_h(\{ij, jk\})}{\partial \epsilon}=-\delta-2(1-\epsilon)\delta^2<0,$$
$$\frac{\partial U_h(K_3)}{\partial \epsilon}=2\frac{\partial \hat{c}^*}{\partial \epsilon}<0,\ h=i, k$$

である。よって，リスクが増大したときツリー型とサイクル型ともに i と k の期待利得が減少する。また (3)，(5)，(12) より $\delta\geq\frac{1}{4}$ かつ $0\leq\epsilon\leq\tilde{\epsilon}$ のとき，

$$U_h(K_3)-U_h(\{ij, jk\})=\underline{c}^s-c,\ h=i, k$$

であるから，命題5の (2) より $\delta\geq\frac{1}{4}$ かつ $0\leq\epsilon\leq\tilde{\epsilon}$ のとき

$$\frac{\partial U_h(\{ij, jk\})}{\partial \epsilon}<\frac{\partial U_h(K_3)}{\partial \epsilon}<0,\ h=i, k \tag{13}$$

となる。(13) より，命題5の (2) はリスクがそれほど大きくないときには，i と k にとってツリー型よりもサイクル型の方が期待利得の減少を抑えることができることを意味している。したがって同じコスト水準であっても，リスクが増大したとき，安定的なネットワークがツリー型からサイクル型に変わることがある。

4.2　効率的なネットワークの実現可能性

それでは，安定的なネットワークと効率的なネットワークとの関係を検証しよう。効率的なネットワークはいつも安定的になるだろうか。この質問の答えは否定的である。

命題6． すべての δ, ϵ について，$\bar{c}^s$ は $\bar{c}^*$ よりも小さい。

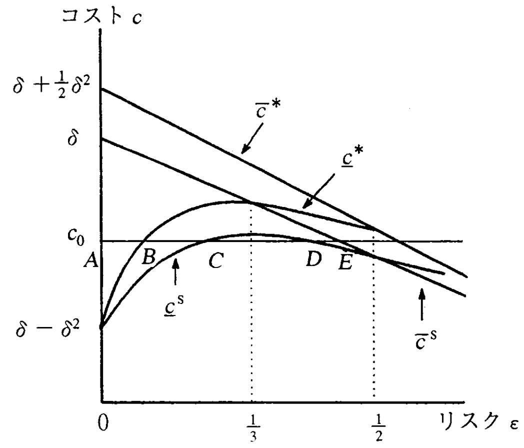

図 3　効率的なネットワークの実現可能性

$$\bar{c}^* > \bar{c}^s$$

また $\underline{c}^s$ が $\underline{c}^*$ よりも大きくなることはない。

$$\underline{c}^* \geq \underline{c}^s$$

$\underline{c}^s$ と $\underline{c}^*$ は，不確実性が存在しないときまたそのときのみ一致する。すなわち，$\epsilon=0$ のとき $\underline{c}^* = \underline{c}^s$ である。

証明　すべての δ, ϵ について，$\bar{c}^* - \bar{c}^s = \dfrac{1}{2}(1-\epsilon)^2\delta^2 > 0$ である。また $c^* - c^s = \epsilon(1-\epsilon)^2\delta \geq 0$ である。$\epsilon=0$ のとき等号が成立する。(証明終)

図 3 は効率的なネットワークが安定的であるかを図示したものである。命題 5 により $\bar{c}^s$ は右下がり，$\underline{c}^s$ は $\epsilon=\hat{\epsilon}$ まで右上がりの曲線になる。図の $\bar{c}^s$ よりも上の領域は孤立型が安定的，$\underline{c}^s$ よりも下はサイクル型が安定的なコストとリスクの領域である。$\underline{c}^s$ と $\bar{c}^s$ の間においてツリー型が安定的になる。また命題 6 より $\bar{c}^*, \underline{c}^*$ はつねに $\bar{c}^s, \underline{c}^s$ より下にならない。不確実性がないときには $\underline{c}^*$ と $\underline{c}^s$ は一致している。

いま，リンク形成のコストが $c=c_0$ で，不確実性がない状況（点 A）から考える。この点ではツリー型が効率的でかつ安定的になっている。もしコストが固定されたままでリスクのみが増大していったとき，点 B から点 C までの間において効率的なネットワークはツリー型からサイクル型に変化するが，依然としてツリー型が安定的である。点 C から点 D までの間においては，サイクル型が効率的かつ安定的である。しかし，点 D から点 E においては再び効率的なサイクル型が履行

できなくなる。さらにリスクが増大すると，サイクル型が効率的であるにもかかわらず，現実には何のリンクも形成されない。

以上のように，効率的なネットワーク形態は必ずしも安定的にはならず，効率的なネットワークに比べてリンクの数が少ないネットワーク形態が安定的になる**過少リンク**の問題が生じている。点 B から点 C までの領域でなぜ過少リンクの問題が生じるかを考えてみよう。安定的なネットワークにおいてツリー型からリンクが追加されるかどうかは i と k によって決定される。しかし問題は彼らの決定がハブ j の期待利得にも影響しているということである。命題1で述べたように，リンク ij が追加されることにより，i と j だけでなく，ハブ j にも保険効果という正の外部性を及ぼしているが，当事者たちは自分たちの期待利得のみを見てリンクを結ぶかどうか判断している。このため効率性の観点からみて過少な水準にとどまってしまうのである。ここで注意しておきたいのは，もしも不確実性がない場合にはハブの期待利得にとってリンク ij の存在は無差別になるため，過少リンクの問題は生じないということである。したがって，ツリー型かサイクル型をめぐる過少リンクの問題にはシステムリスクの存在が大きく関わっていると言える。

5　まとめと今後の課題

本論文はシステムリスクのもとでの望ましいネットワーク形態とその実行可能性について考察した。ツリー型のネットワーク形態はコスト面では有利であるのに対して，リンクに何らかのトラブルが生じるような場合，脆弱なネットワークである。なぜならばツリー型はネットワークの連結に関してはそれぞれただ一つのパスに依存しているからである。これに対して，サイクル型のネットワークは複数のパスをもつため，お互いのパスがどちらか一方が途絶えたときの保険の役割を果たし，リスクが増大したとしても，ツリー型に比べてダメージを小さく抑えることができるのである。この保険効果はネットワーク全体にもたらす正の外部効果であり，ネットワークの規模が大きくなるにつれてより効果が大きくなるだろうと思われる。Tachi (1999) は，n 人のスター型にリンクを追加する場合に限定して，ネットワークの規模が増大するほど保険効果がより顕著になるということを示した。より一般的な n 人ゲームの分析については今後の課題としたい。またネットワークが非協力的に形成されているときには，リンクを結ぶ当事者が第三者へ与える外部効果を考慮に入れないために，過少リンクの問題が生じることを指摘した。議論のほかの拡張としては，切断リスクが独立ではなく相関性をもっているより一般的な確率構造をもつ場合，現在の結果にどのような影響があるかについても興味深い。

（東京大学大学院経済学研究科博士課程）

参 考 文 献

[1] Bolton, D. and M. Dewatripont (1994) "The Firm as a communication Network", *Quarterly Journal of Economics,* Vol. CIX Issue 4, 809-839.

[2] Bolton, D. and M. Dewatripont (1995) "The time and budget constraints of the firm", *European Economic Review,* 39, 691-699.

[3] Dutta, B., and S. Mutuswami (1997) "Stable networks", *Journal of Economic Theory,* 76, 322-344.

[4] Hendricks, K., M. Piccione, and G. Tan (1995) "The Economics of Hubs: The Case of Monopoly," *Review of Economic Studies,* 62, 83-99.

[5] Jackson, M., and Watts, A. (1998) "The Evolution of Social and Economic networks", mimeo: Caltech.

[6] Jackson, M., and A. Wolinsky (1996) "A Strategic Model of Social and Economic networks", *Journal of Economic Theory,* 71, 44-74.

[7] Radner, R. (1993) "The Organization of Decentralized Information Processing", *Econometrica,* 62, 1109-1146.

[8] Tachi, K. (1999) "Network Structure Under Uncertainty", MA thesis, University of Tokyo.