慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	多人数囚人のジレンマにおける先見的行動と協調関係の維持
Sub Title	Farsighted stability and cooperative behavior in multi-person prisoner's dilemma
Author	鈴木, 明宏(Suzuki, Akihiro) 武藤, 滋夫(Muto, Shigeo)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2000
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.93, No.3 (2000. 10) ,p.539(27)- 551(39)
JaLC DOI	10.14991/001.20001001-0027
Abstract	
Notes	小特集：情報とネットワークの経済
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20001001-0027

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

「三田学会雑誌」93巻3号（2000年10月）

多人数囚人のジレンマにおける
先見的行動と協調関係の維持

鈴　木　明　宏
武　藤　滋　夫

要　　約

本論文では，「多人数囚人のジレンマ」において，各主体がどのような行動原理に基づいて行動すればパレート最適な状態が形成されそして維持されるかを，将来を考慮した各主体の行動を取り入れた「間接支配に基づく安定集合」および「最大調和集合」を用いて考察した。

各主体が提携を組んで戦略を変更するとすれば，たとえそれが拘束力を持つものでなく，将来その提携の何人かが提携外の主体とともに新たな戦略に変更する可能性があったとしても，間接支配に基づく安定集合によれば，パレート最適でかつ個人合理的な状態のみが安定な状態として実現されることを明らかにした。一方，最大調和集合によれば，個人合理的なすべての状態が安定となることも明らかにした。

安定集合，最大調和集合はそれぞれ，各主体の将来に対する楽観的予想，悲観的予想を前提にしており，これらの結果から，各主体が将来起こるであろうことを考慮に入れ，しかもそれらに対して楽観的予想をもって行動したとすれば，囚人のジレンマ状態においてパレート最適でかつ個人合理的な状態が安定な状態として達成されることが理論的に示されたといえる。

1　はじめに

本論文では，多人数から成る囚人のジレンマの状況において，主体間で「協調行動をとる」という合意に達したとしても，その合意に拘束力がなく各主体はそれを必ずしも守らなくともよい状況を考え，それぞれの主体がどのような行動原則に基づいて行動すれば主体間の協調関係が形成されそして維持されていくかを，各主体の先見的行動を考慮した安定集合の概念を用いて考察する。

囚人のジレンマの状況において，各主体は「協調」と「裏切り」という2つの選択肢に直面する。この状況下では，個人レベルで考えると「裏切り」を選択することはその主体にとって利益となる。従って，1回限りの囚人のジレンマでは，全員が「裏切り」を取る状態が均衡（ナッシュ均衡）となる。しかし，「裏切り」という選択は他の主体に不利益を生じさせてしまう。よって，すべての主体がそれぞれの利益の最大化を目指して「裏切り」を選択することは，全員が「協調」を選択し

た状況と比較して社会的に好ましくない結果を与える。囚人のジレンマの状況は現実にもしばしば観察される。例えば，道路等の公共的な施設は民間に任せても十分供給されないという状況や，二酸化炭素等の排出による地球温暖化問題などがそのような状況の代表的なものとして挙げられるであろう。

ゲーム理論においては，全員が「裏切り」を選択するという社会的に望ましくない結果を回避するものとして，無限回繰り返しゲームとフォーク定理がよく知られている。将来の利益も重要だと各プレイヤーが考えれば，協調を崩したものに罰則を与えるトリガー戦略と呼ばれる戦略をすべてのプレイヤーが採用することにより，無限回繰り返しゲームの均衡状態として協調関係が維持される可能性が生じてくる。しかしながら，無限回繰り返しゲームにおいては，プレイヤーが「裏切り」をとりつづけるような状態も均衡として達成されてしまうし，さらには，個人合理的な結果がすべて均衡として達成されてしまう。「裏切り」の連続のような望ましくない結果を除去する試みとしては，例えば「renegotiation-proof ナッシュ均衡」を適用した van Damme (1991) 等の研究がある。

一方，Axelrod (1984) は，繰り返し囚人のジレンマの戦略をプログラム化したいくつかのコンピュータ・プログラムを戦わせるトーナメントを行い，「tit for tat (お返し戦略)」と呼ばれる戦略が勝ち残るという結果を得ている。この戦略は最初に「協調」を選択し，その後は相手の直前の選択を模倣するというものであり，従って，「tit for tat」戦略同士が出会うと協調関係が維持される。この「tit for tat」も無限回繰り返しゲームのナッシュ均衡となることが知られている。

本論文では，上記の繰り返しゲームによるアプローチとは全く異なり，Chwe (1994) により定義された間接支配の下での安定集合と最大調和集合を用いて分析を行なう。安定集合の概念は von Neumann and Morgenstern (1953) によって導入されたものであり，主に特性関数形協力ゲームの解として，経済システムや社会システムをモデル化したゲームにおいてさまざまな興味深い結果を与えている。1990年代に入って，Greenberg (1990) や Chwe (1994) により，安定集合の概念の戦略形ゲームなど非協力ゲームへの適用が行われるようになってきた。Chwe (1994) は，Harsanyi (1974) によって導入された安定集合における間接支配の考え方を若干修正し，その下での安定集合および最大調和集合の概念を提示した。彼の提示した間接支配の下での安定集合は，戦略形ゲームへの適用という点からは Harsanyi (1974) の提示したものよりも適当と思われるので，本論文では，Chwe (1994) の提示した間接支配の下での安定集合と最大調和集合を解概念として用いることとする。

Suzuki and Muto (2000a) は，既に，同様のアプローチを 2 人の囚人のジレンマに適用し，間接支配の下での安定集合は個人合理的かつパレート効率的な 1 つの結果のみからなることを示している。

本論文では 3 人以上の主体から成る囚人のジレンマ（以下，n 人囚人のジレンマと呼ぶ）の分析を

行うが，このときにも同様な結果が成立することが証明される。この論文の主要な結果は以下の通りである。

1．すべての個人合理的かつパレート効率的な結果は，それ1つだけで間接支配の下での安定集合を構成する。さらに，ほとんどの場合それ以外には間接支配の下での安定集合は存在しない。
2．最大調和集合は，ほとんどの場合すべての個人合理的な結果からなる集合である。

本論文の構成は以下の通りである。第2節では本論文の中心的解概念である間接支配の下での安定集合を定義する。第3節では本論文で扱う n 人囚人のジレンマのモデルを与える。第4節，第5節では，間接支配の下での安定集合と最大調和集合を，n 人囚人のジレンマに適用したときの結果を述べる。第6節では具体例として「湖の汚染」ゲームに以上の分析を適用した場合の結果を紹介する。最後に，第7節では得られた結果をまとめた上で，今後の方向性について簡単に述べる。

なお，紙数の制限もあり定理の証明は省略する。Suzuki and Muto (2000b) を参照していただきたい。

2　間接支配と安定集合

この節では以下の分析で用いられる間接支配の下での安定集合と最大調和集合の定義を与える。

戦略形ゲーム $(N,(X_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N})$ を考える。ここで $N=\{1,2,\ldots,n\}$ は**プレイヤー**の集合，X_i はプレイヤー i の**戦略**の集合，$u_i:\prod_{i\in N}X_i\to\Re$ はプレイヤー i の**利得関数**である。$\prod_{i\in N}X_i$ は各プレイヤーの戦略の集合の直積であり，$\Re$ は実数の全体である。つまり，u_i は各プレイヤーの戦略の組に対してその下での i の利得を与える関数である。N の部分集合 M を**提携**と呼ぶ。M が1人のプレイヤーから成る場合もあることを注意しておく。戦略の組の集合 $\prod_{i\in N}X_i$ を X で表す。また，提携 $M\subseteq N$ に対して，$X_M=\prod_{i\in M}X_i$，$X_{-M}=\prod_{i\in N\setminus M}X_i$ と書く。

2つの戦略の組 x，$y\in X$ について，すべての $i\in N\setminus M$ について $x_i=y_i$ が成り立つとき，**y は x から提携 M を通して導かれる**と言い，$x\to_M y$ と表す。これは x から提携 $M\subseteq N$ のメンバーのみが戦略を変更することにより y が導かれることを意味している。

x が y を間接支配するとは，ある戦略の組の列 $(y=)x^0,x^1,\cdots,x^m(=x)$ と提携の列 $M_1,M_2,\cdots,M_m$ が存在して，任意の j と任意の $i\in M_j$ について条件

$$x^{j-1}\to_{M_j}x^j,\quad u_i(x)>u_i(x^{j-1})$$

が満たされることである。これを $x\gg y$ で表すことにする。前に述べたように，提携 $M_1,M_2,\cdots,M_m$ は1人のプレイヤーから成るものでもよく，1人のプレイヤー単独での逸脱も考慮していることを注意しておく。

間接支配の概念はプレイヤーもしくはプレイヤーの提携が先見性を持って行動することを表して

いる。実際，上の定義において各提携 M_j はパス $x^0 \to x^1 \to \cdots \to x^m$ において x^{j-1} における利得とこのパスが続いたときの到達先である $x^m(=x)$ における利得を比較して，提携に属するプレイヤー全員にとって後者の方が大きいので x^{j-1} から逸脱する。

ここで，2つの点を注意しておく。1つは，ある提携のメンバーが協力して1つの結果を導いたとしても，その後新たな提携が異なる結果を導く可能性があることであり，いま1つは，この新たな提携の中にはもとの提携のメンバーも含まれる可能性がある，即ち，プレイヤーは提携を組んで新たな結果を導くことはできるがその合意には拘束力を仮定していないことである。

上の間接支配の定義において，$m=1$ としたものは**直接支配**と呼ばれ，von Neumann and Morgenstern（1953）は直接支配の下で安定集合を定義した。その後，Harsanyi（1974）は，直接支配の下での安定集合には各主体の長期的な視野が欠けていると指摘し，間接支配の概念を導入して安定集合の定義を修正した。ただ，上の間接支配の定義は戦略形ゲームのコンテクストにおいてはより妥当と思われる Chwe（1994）によるものであり，Harsany（1974）の間接支配の定義とは若干異なっていることを注意しておく。

以下の条件（1），（2）を満たすような戦略の組の集合 $V \subseteq X$ を**間接支配の下での安定集合**という（図1を参照）。以下では，簡単に**安定集合**と呼ぶ。

(1) 内部安定性：$x \gg y$ となるような $x, y \in V$ は存在しない。

(2) 外部安定性：任意の $y \notin V$ について，$x \gg y$ となるような $x \in V$ が存在する。

以下の条件（3）（4）を満たすような戦略の組の集合 $K \subseteq X$ を**調和集合**という（図2を参照）。

(3) 任意の $x \in K$ と $x \to_M y$ となるような任意の $y \in X$，$M \subseteq N$ について，$z = y$ かないしは $z \gg y$ であり，かつ，あるプレイヤー $i \in M$ について $u_i(z) \leq u_i(x)$ となるような $z \in K$ が存在する。

(4) 任意の $x \notin K$ について，ある $y \in X$ と $x \to_M y$ であるような $M \subseteq N$ が存在して，$z = y$ かないしは $z \gg y$ が成り立つような任意の $z \in K$ に対して，任意のプレイヤー $i \in M$ について $u_i(z) > u_i(x)$ が成り立つ。

また，このような調和集合のうち，包含関係に関して最大のものを**最大調和集合**と呼び，L で表すことにする。

図1

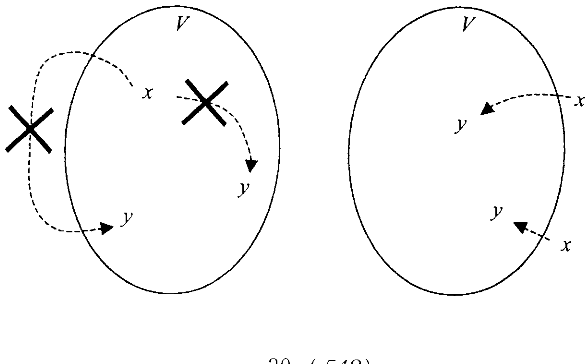
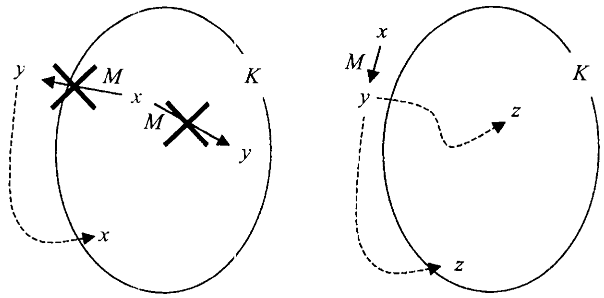


図 2



安定集合と調和集合の関係については，Chwe (1994) において，最大調和集合が一意に存在すること，およびすべての間接支配の下での安定集合は最大調和集合に含まれることが示されている。

ここで，安定集合，調和集合の意味するところを述べておこう。まず，安定集合から始める。間接支配の下での安定集合を１つとる。各プレイヤーは安定集合内のすべての結果は「安定」であり，すべての外部の結果は「不安定」であるという共通の認識を持っているとする。ここで，「安定」とは，その結果からはどのようなプレイヤーないしはプレイヤーのグループも逸脱する動機を持たないという意味であり，「不安定」とは，その結果からは少なくとも１人のプレイヤーないしは１つのグループが逸脱する動機を持つという意味である。このとき，安定集合が内部安定性と外部安定性を満たすならば，このような共通の認識が崩れることはない。

実際，安定集合内の結果を１つとり，その結果からあるプレイヤーないしはプレイヤーのグループが逸脱を考えているとする。いま，この逸脱の後引き続き起こる逸脱により安定集合内の結果に最終的に到達するとすると，それがどのような逸脱の連鎖であったとしても，内部安定性の条件から，最初に逸脱したすべてのメンバーが逸脱の前よりも高い利得を得るということはありえない。従って，彼らは逸脱を思いとどまるであろう。また，最終的に安定集合の外部の結果に到達したとすると，そこにとどまるならば逸脱前より全員にとってよい結果が得られるかもしれないが，安定集合の外部の結果は不安定だという共通の認識がプレイヤーの間にある。そのため，「そのような結果にとどまることはなく，どのような状態に最終的に到達するかわからない」と逸脱するプレイヤー達は考え，やはり逸脱を思いとどまるであろう。従って，安定集合の内部の結果は，そこからはどのようなプレイヤーまたどのようなグループも逸脱する動機を持たないと考えられ，安定となる。

次に，安定集合の外部の結果をとる。外部安定性により，あるプレイヤーないしはプレイヤーのグループのこの結果からの逸脱で，その後さらに引き続いて逸脱が起こって最終的に安定集合の内部の結果に到達し，最初に逸脱したプレイヤー達が全員逸脱前よりもよくなるようなものが少なくとも１つ存在する。しかも，最終結果は安定集合の内部にあるから，「この結果は安定であり，どのような提携もそこから逸脱しない」との共通の認識がプレイヤーの間にある。よって，最初の逸

脱メンバーは，この逸脱の連鎖が起これば最終的には自分達はよりよくなると考えて実際に逸脱すると考えられる。従って，安定集合の外部の結果は不安定となる。

調和集合もほぼ同様の意味を持っている。条件（3）が内部安定性に対応し，（4）が外部安定性に対応する。安定集合との違いは次の通りである。(3) は，調和集合の内部の結果からあるプレイヤーないしはプレイヤーのグループが逸脱したとき，その後の逸脱の連鎖で調和集合の内部で終了し，しかも，最初の逸脱メンバーの少なくとも1人にとってよりよくならないようなものが少なくとも1つ存在する，ことを意味し，（4）は，調和集合の外部の結果に対しては，そこから逸脱したときに，その後続く逸脱の連鎖で最終的に調和集合の内部の結果で終わるようなものすべてにおいて，最初の逸脱メンバーのすべてがよりよくなる，ということを意味する。言い換えると，間接支配の下での安定集合では，逸脱したときに，その後起こりうる逸脱の連鎖のうち自分達にとって最も好ましいものを想定するという「楽観的」見方をもって各プレイヤーが行動すると考えられており。逆に，調和集合では，「悲観的」ないしは「慎重な」見方をもって各プレイヤーが行動すると考えられている，といえる。

3　n 人囚人のジレンマ

この節では，Okada（1993）による n 人囚人のジレンマのモデルを与える。

プレイヤーは n 人で，プレイヤーの集合を $N=\{1, 2, \cdots n\}$ とする。各プレイヤーはそれぞれ C（協調）か D（裏切り）を選択でき，プレイヤー i の戦略の集合は $X_i=\{C, D\}$ である。各プレイヤーの利得関数は $u_i(x)=f_i(x_i, h)$ で与えられる。ここで x_i はプレイヤー i のとる戦略，C ないしは D，を表し，h は x において i 以外で C を選択しているプレイヤー数である。

議論を簡単にするため，各プレイヤーの利得関数は同一であるとし，それを f で表すことにする。ここで以下の仮定をおく。

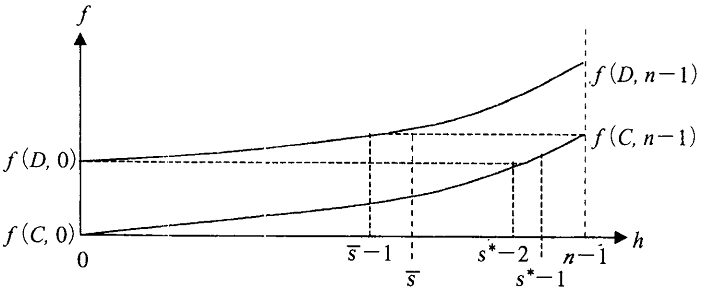
仮定：(1) 任意の $h=0, 1, \cdots, n-1$ に対して $f(D, h)>f(C, h)$。

(2) $f(C, n-1)>f(D, 0)$。

(3) $f(C, h)$ と $f(D, h)$ は h に関する増加関数。

仮定（1）は、どのプレイヤーにとっても，他のプレイヤーの戦略が同じであれば，「C」よりも「D」をとることにより高い利得を得られることを示している。仮定（2）は，「全員 C」の状態が「全員 D」の状態をパレート優越する(1)ことを表している。仮定（3）は，どのプレイヤーにとっても，自分の戦略にかかわらず，「C」をとるプレイヤーの数が多い方が自分の利得が高いことを表す。以下，スペースを節約するために，「C」をとるプレイヤー，「D」をとるプレイヤーを，それ

図 3



それ C-プレイヤー，D-プレイヤーと呼ぶことにする。

仮定に注意して，２つの整数 $s^*(2\leq s^*\leq n)$ と $\bar{s}(1\leq \bar{s}\leq n-1)$ を以下の式により定義する（図３を参照)。

$$f(C, s^*-2)<f(D,0)\leq f(C, s^*-1)$$
$$f(D, \bar{s}-1)\leq f(C, n-1)<f(D, \bar{s})$$

仮定（3）により $s^*, \bar{s}$ ともに唯一つに定まる。s^* は C-プレイヤーの利得が $f(D,0)$，すなわち全員「D」を選択しているときの各プレイヤーの利得以上となるために最低限必要な C-プレイヤーの人数を表している。また，$\bar{s}$ は D-プレイヤーの利得が $f(C, n-1)$，すなわち全員「C」を選択しているときの各プレイヤーの利得を上回るために最低限必要な C-プレイヤーの人数を表している。

すべてのプレイヤー i について条件

$$u_i(x)\geq \min_{y_{-i}\in X_{-i}}\max_{y_i\in X_i} u_i(y)$$

が成り立つとき $x\in X$ は**個人合理的である**と言う。不等号が厳密な不等号で成り立つときには，x は**厳密に個人合理的である**と言う。仮定（1)，（3）より

$$\min_{y_{-i}\in X_{-i}}\max_{y_i\in X_i} u_i(y)=f(D,0)$$

であることがわかる。

以下の命題は個人合理性やパレート効率性はそれぞれ s^* と $\bar{s}$ により特徴づけられることを示している。以下では，任意の $x\in X$ において戦略 C を取っているプレイヤーの集合を $C(x)$ で表す。すなわち，$C(x)=\{i\in N|x_i=C\}$ である。また，集合 $C(x)$ の要素の個数を $|C(x)|$ で表す。

（1） ２つの戦略の組 x，$y\in X$ について，**y が x をパレート優越する**とは，すべてのプレイヤー i に関して $u_i(y)\geq u_i(x)$ であり，かつ，あるプレイヤー i に関しては $u_i(y)>u_i(x)$ となることである。

命題：(1) $x \neq (D, \cdots, D)$ であるような $x \in X$ を考える。x が厳密に個人合理的であるための必要十分条件は $|C(x)| \geq s^*$ である。さらに，もし $f(D,0) < f(C, s^*-1)$ ならば，x が厳密に個人合理的であるための必要十分条件も $|C(x)| \geq s^*$ である。また，もし $f(D,0) = f(C, s^*-1)$ ならば，x が厳密に個人合理的であるための必要十分条件は $|C(x)| > s^*$ である。
(2) $x \in X$ がパレート効率的である[(2)]ための必要十分条件は $|C(x)| \geq s^*$ である。

4　n 人囚人のジレンマにおける間接支配の下での安定集合

この節では n 人囚人のジレンマにおける間接支配の下での安定集合を求める。最初の定理は，各プレイヤーが将来のことまで考えて行動するならば，厳密に個人合理的かつパレート効率的な戦略の組が安定となることを示している。

定理1：$x \in X$ がパレート効率的であるとする。このとき，$\{x\}$ は間接支配の下での安定集合である。

次の定理は，ほとんどの場合定理1の逆も成り立つこと，そして，例外的に定理1の安定集合に加えてそれとは異なる安定集合が存在すること，を示している。

定理2：もし以下の条件

(1) $s^* < \bar{s}$
(2) $f(D,0) < f(C, s^*-1)$

のうち少なくとも一方が満たされるならば，定理1により得られるもの以外に安定集合は存在しない。また，条件 (1)，(2) がともに満たされない場合には，

$$\{(D, \ldots, D)\} \cup \{x \in X \mid C(x) = s^*\}$$

が安定集合となるが，これと定理1の安定集合以外には安定集合は存在しない。

(2)　戦略の組 $x \in X$ をパレート優越するような $y \in X$ が存在しないとき，x はパレート効率的であるという。

5　n 人囚人のジレンマにおける最大調和集合

この節では n 人囚人のジレンマにおける最大調和集合を求める。そのための準備として，以下の記号を定義する。$s^*<\bar{s}$ のとき，$\hat{s}$ を条件

$$f(D, \hat{s}-1)<f(C, \bar{s}-1)\leq f(D, \hat{s})$$

を満たすような整数 $(1\leq\hat{s}<\bar{s})$ とする（図 4 を参照）。すると，以下の定理が成り立つ。

定理 3：(1) $s^*\geq\bar{s}$ とする。このとき以下のことが成り立つ。

(a) もし $f(D, 0)<f(C, s^*-1)$ ならば，

$$\{x\in X : |C(x)|\geq s^*\}$$

すなわち，すべての厳密に個人合理的な戦略の組の集合が最大調和集合となる。

(b) もし $f(D, 0)=f(C, s^*-1)$ ならば，

$$\{x\in X : |C(x)|\geq s^*\}\cup\{(D, \cdots, D)\}$$

すなわち，すべての個人合理的な戦略の組の集合が最大調和集合となる。

(2) $s^*<\bar{s}$ とする。このとき以下のことが成り立つ。

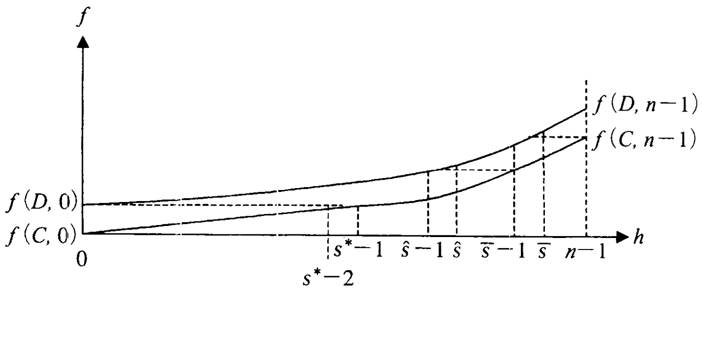
(c) もし $f(D, 0)<f(C, s^*-1)$ ならば，

$$\{x\in X : |C(x)|\geq \max\{s^*, \hat{s}\}\}$$

が最大調和集合となる。

(d) もし $f(D, 0)=f(C, s^*-1)$ ならば，

図 4



$$\{x \in X : |C(x)| \geq \max\{s^*+1, \hat{s}\}\}$$

が最大調和集合となる。

この定理により，最大調和集合はほとんどの場合個人合理的な結果全体の集合となることがわかる。

6　「湖の汚染」における安定集合と最大調和集合

この節では n 人囚人のジレンマの１つの例として Shapley and Shubik（1969）による「湖の汚染」ゲームについて，安定集合と最大調和集合がどのようになるかを調べる。

湖の汚染のストーリーは以下のようなものである。湖の周りで操業している n 個の工場がある。各工場は生産活動のため湖から取水し，使用後に汚水を湖に排出する。各工場は汚水を浄化して排出することもでき，浄化してから排出するには b の費用がかかるとする。また，生産にはきれいな水を用いねばならず，湖を汚染している工場が存在する場合には浄化するためにコストを必要とする。コストは汚水をそのまま排出する工場数に比例して増加するものとし，そのまま排出する工場数が k の場合には kc だけの費用がかかるものとする。

湖の汚染の戦略形ゲームとしての表現は以下のように与えられる。プレイヤーの集合は $N=\{1, 2, \cdots, n\}$，プレイヤー i の戦略の集合は $X_i=\{C, D\}$。ここで C と D はそれぞれ，上での「浄化してから排出する」と「浄化せずに排出する」に対応する。戦略の組を $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X = \prod_{i \in N} X_i$ で表す。ここで各 x_i について $x_i=C$，または $x_i=D$ である。また，x において D をとるプレイヤー数を $|D(x)|$，すなわち $|D(x)|=n-|C(x)|$ とすると，プレイヤー i の利得は以下のようになる。

$$u_i(x)=u_i(x_i, x_{-i})=\begin{cases} -b-c|D(x)| \\ \quad -c|D(x)| \end{cases}$$

ここで $x_{-i}=(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ である。また，$0<c<b<nc$ と仮定する。

まず，このゲームが先の仮定（1），（2），（3）を満足することを見る。仮定（1）から調べる。

$$f(C, h)=-b-c(n-h-1), \quad f(D, h)=-c(n-h)$$

であるから，あるプレイヤーが１人だけ C から D に戦略を変更するとそのプレイヤーの利得は $b-c$ だけ変化する。仮定より $c<b$ であるから利得は増加し，仮定（1）は満たされる。次に，

$$u_i((C, C, \cdots, C))=-b, \quad u_i((D, D, \cdots, D))=-nc$$

で，$b<nc$ であるから仮定（2）も満たされる。仮定（3）が満たされることは利得関数の形状より明らかである。

以下では，簡単のために，$n=4$ かつ $c<b<2c$ の場合について考える。まず，各プレイヤーの利得は以下の表で表される。

$\lvert C(x)\rvert$	0	1	2	3	4
C-プレイヤー		$-b-3c$	$-b-2c$	$-b-c$	$-b$
D-プレイヤー	$-4c$	$-3c$	$-2c$	$-c$	

従って，

$$f(C,0)=-b-3c<f(D,0)=-4c<-b-2c=f(C,1),$$
$$f(D,2)=-2c<f(C,n-1)=-b<-c=f(D,3)$$

であるから，$s^*=2$，$\bar{s}=3$ である。命題より個人合理的かつパレート効率的な戦略の組は (C, C, C, C)，(D, C, C, C)，(C, D, C, C)，(C, C, D, C)，(C, C, C, D) の5つである。定理1により，これらの結果1つのみからなる集合が安定集合となる。

例えば，$\{(D, C, C, C)\}$ が安定集合となることは以下のように確かめられる。まず内部安定性は，この集合が要素を1つしか持たないことより明らかである。次に，外部安定性について考える（図5を参照）。まず，$-b<-c$ であるから $(D, C, C, C)>(C, C, C, C)$ である。他の結果，例えば (C, C, C, D) が (D, C, C, C) に間接支配されることを調べる。いま，戦略の組の列

$$[(C, C, C, D), (D, C, C, D), (D, C, D, D), (D, D, D, D), (D, C, C, C)]$$

を考えると，(C, C, C, D) から $\{1\}, \{3\}, \{2\}, \{2, 3, 4\}$ の各提携が順番に戦略を変更することによって (D, C, C, C) まで到達できることがわかる（図5の①～④）。さらに，各提携が逸脱する直前の利得と (D, C, C, C) での利得とを比べると，

図 5

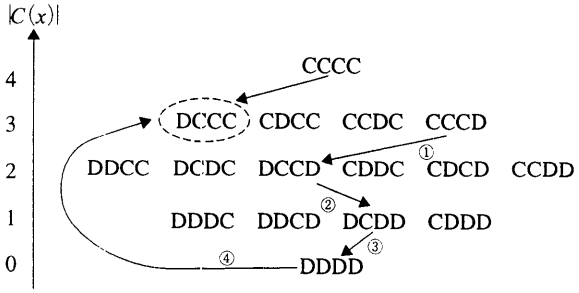
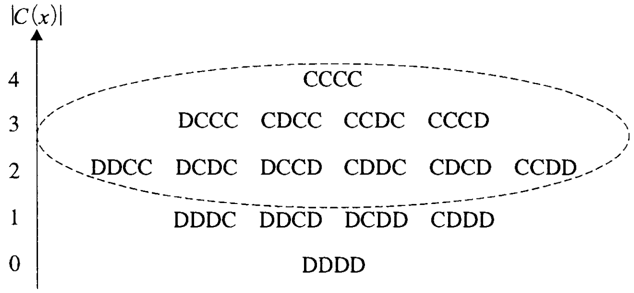


図 6



$$u_1(C, C, C, D) = -b - c < -c = u_1(D, C, C, C)$$
$$u_3(D, C, C, D) = -b - 2c < -3c = u_3(D, C, D, D)$$
$$u_2(D, C, D, D) = -b - 3c < -4c = u_2(D, D, D, D)$$
$$u_i(D, D, D, D) = -4c < -b - c = u_i(D, C, C, C)\ (i = 2, 3, 4)$$

である。従って，$(D, C, C, C) > (C, C, C, D)$ である。その他についても同様にして(D, C, C, C)に間接支配されることが示せる。

また，この場合の最大調和集合は $\hat{s}=2$ と定理 3 (2) (c) より

$$X \backslash \{(D, D, D, D), (C, D, D, D), (D, C, D, D), (D, D, C, D), (D, D, D, C)\}$$

である（図 6 を参照）。

7　結び

本論文では，n 人囚人のジレンマにおける間接支配の下での安定集合と最大調和集合を明らかにし，それを用いて，n 人囚人のジレンマにおいて各主体が長期的視野に立って行動した場合の安定な結果を考察した。主体が協調して提携として行動することを前提としたが，このような提携関係には拘束力はないものとし，その後メンバーが逸脱して新たな提携を組んで行動する可能性も考慮した。

まず，個人合理的かつパレート効率的な結果はすべてそれだけで安定集合となることを示した（定理 1）。さらに，ほとんどの場合，すべてのプレイヤーが「裏切り」を選択する結果，すなわち $(D, \cdots, D)$，は安定集合には含まれず安定ではないことを示した（定理 2）。一方，最大調和集合は，パレート効率的ではない結果も含むすべての個人合理的な結果の集合よりなることを示した（定理 3）。

第2節で見たように，安定集合，最大調和集合はそれぞれ主体の楽観的，悲観的行動を前提としていることに注意すれば，各主体が楽観的な期待をもって先見的に行動する場合には，パレート効率的でない結果は排除され，個人合理性とパレート効率性が達成されるといえる。一方，悲観的予想に基づいて行動する場合にはパレート非効率性を解消できない。

第2節で安定集合の意味を述べた際，安定集合内の各結果は安定であるという共通の認識を前提としたが，この共通の認識はどのように形成されるかという問題はこれから考察しなければならない重要な問題である。進化論的ゲーム理論においてナッシュ均衡の動学的安定性が議論されてきたが，安定集合も何らかの動学的プロセスにおける安定的な状態として考えることができるであろう。その1つとして Harsanyi (1974) による研究がある。この中で Harsanyi は，協力ゲームの枠組みの中で，ある交渉ゲームのナッシュ均衡と安定集合の関連について考察しているが，戦略形ゲームにおいても同様の議論を展開できるのではないかと期待される。これについては今後の課題としたい。

（山形大学人文学部講師）

（東京工業大学大学院社会理工学研究科教授）

参　考　文　献

M. S. -Y. Chwe, (1994), "Farsighted Coalitional Stability", Journal of Economic Theory, 63, 299-325.

J. C. Harsanyi, (1974), "An Equilibrium-point Interpretation of Stable Sets and a Proposed Alternative Definition", Management Science, 20, 1472-1495.

岡田 章, (1996), ゲーム理論, 有斐閣.

L. S. Shapley and M. Shubik, (1969), "On the Core of an Economic System with Externalities", American Economic Review, 59, 678-684.

A. Suzuki and S. Muto, (2000a), Farsighted Stability in Prisoner's Dilemma, Journal of the Operations Research Society of Japan, 43, 249-265.

A. Suzuki and S. Muto, (2000b), Farsighted Stability in n-Person Prisoner's Dilemma, mimeo., Department of Value and Decision Science, Graduate School of Decision Science and Technology, Tokyo Institute of Technology.

J. von Neumann and O. Morgenstern, (1953), "Theory of Games and Economic Behavior," 3rd ed., Princeton University Press, Princeton.