慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	動的計画における横断条件について
Sub Title	On the transversality condition in dynamic programming
Author	神谷, 傳造(Kamiya, Denzo)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2000
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.93, No.2 (2000. 7) ,p.451(163)- 463(175)
JaLC DOI	10.14991/001.20000701-0163
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20000701-0163

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

「三田学会雑誌」93巻2号（2000年7月）

研究ノート

動的計画における横断条件について*

神　谷　傳　造

無限期間にわたる動的計画の問題では，通常，状態変数を k，補助変数を λ とするとき，有効径路はつぎの条件を満たさなければならないとされる。

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_t k_t=0$$

多くの文献ではこれを「横断条件　transversality condition」と呼び，最適化の必要条件としている。しかしこの条件は必ずしも最適化の必要条件ではない。経済学者は，この条件を最適化の必要条件とすることによって，暗黙のうちに問題をある範囲に限定している。しかし問題をそこに限定することがどのような意味をもつか，実はあまり明らかではない。文献ではこの点がはっきりとしないために，とくに初学者に混乱を与えている。いわゆるポンジ・ゲーム禁止条件とも混同されがちである。この覚書では，高度の数学は使わずに，数理計画法のクーン＝タッカー条件と最適制御理論の最適条件の対比を通じて，出来るだけ平易に問題点を明らかにする。

1　社会最適を定める動的計画の問題

人口の成長がなく，生産物の一部を消費し残りを蓄積する社会について，T 期にわたる計画を考えよう。期間 t の消費を c_t，社会が得る各期の効用関数を $u(c_t)$，心理的割引因子を β，計画期間終了時の資本ストックを k_T，初期時点で評価したその効用を k_T の関数として $S(k_T)$ とする。そのとき，社会が期間1から期間 T にわって得る効用の総和は，初期時点で評価して

*　このノートは，慶應義塾大学大学院経済学研究科に設置の「マクロ経済学演習」での討論を基にしている。この演習参加者から貴重な助言を得た。立ち入った数学の問題については同大学経済学部助教授伊藤幹夫，同訪問研究員邵宜航に多くを負っている。また匿名の査読者からも有益な指摘を受けた。記して謝意を表する。なお残る誤りがあれば，その責任が著者に帰することはいうまでもない。

$$\max_{\{c_t\},\{k_t\}} \sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t) + S(k_T) \qquad (1)$$

となる。一方，期間 t の生産に用いる資本ストックを k_{t-1}，生産量を y_t，生産関数を $y_t = f(k_{t-1})$，粗資本形成を z_t，資本減耗率を δ とすると $y_t \geq z_t + c_t$, $k_t = (1-\delta)k_{t-1} + z_t$ であることから，消費と資本ストックの変動はつぎの制約に服することになる。

$$f(k_{t-1}) - c_t - k_t + (1-\delta)k_{t-1} \geq 0,$$
$$t = 1, 2, \ldots, T, \quad k_0 \text{は歴史与件} \qquad (2)$$

さらに，消費も資本ストックも負になってはならないから

$$c_t \geq 0, \quad k_t \geq 0, \quad t = 1, 2, \ldots, T \qquad (3)$$

そこで社会にとっての問題は，(2)，(3) の制約の下に消費の時間径路 $\{c_1, c_2, \ldots, c_T\}$ と資本ストックの時間径路 $\{k_1, k_2, \ldots, k_T\}$ を適当に定めて (1) を最大にすることである。この問題はラムゼイ問題として知られている。[1]

最適制御理論では，資本ストックのように，経済あるいは変動する組織の，そのときどきの状態を表す変数を状態変数 state variables という。一方消費のように，組織の変動を制御するために計画主体が決定する変数を制御変数 control variables という。(2) から分かるように，制御変数をどのように定めるかが，時間の経過の中で状態変数がどのように変化して行くかを定める。

この最適化問題について，二つのことに注意をしておかなければならない。一つは目的関数についてである。社会貯蓄最適化の目的は効用最大化であるから，目的関数は消費の時間径路のみの関数であると考えられる。効用の大きさを定めるのは消費の大きさであり資本ストックの大きさではないからである。しかし有限期間問題では，計画終了時の残存資本ストックが終了時以降の消費の可能性を定めている。社会の最適を図るときは，この残存資本ストックが将来の消費を通じてどれだけの効用を社会にもたらすかを考慮に入れなければならない。目的関数に $S(k_T)$ を加えるのはそのためである。もう一つは非負制約についてである。(3) は資本ストックに非負制約を課している。実際の経済では，資本ストックだけではなく粗資本形成にも非負制約を課して $z_t \geq 0$ したがって $k_t - (1-\delta)k_{t-1} \geq 0$ としなければならない。資本ストックには例えば固定設備，工業用材料などのように消費財に転換できないものがあり，ストックの取り崩しが簡単にはできないからである。これを投資の非可逆性という。[2] このことを考えると有効径路の特徴づけはかなり複雑になる。本稿では投資の非可逆性を無視し，粗資本形成には非負制約を課さないこととする。

ラグランジュの未定常数法によってこの問題を解いて見よう。まずラグランジュ関数をつくると

---

(1) Ramsey (1928). ラムゼイの原問題は連続時間無限期間型である。

(2) 投資の非可逆性を考慮した動的計画の展開については，例えば Arrow (1968) を見よ。

$$\mathcal{L}=\sum_{t=1}^{T}\beta^t u(c_t)+S(k_T)$$
$$+\sum_{t=1}^{T}\lambda_t[f(k_{t-1})-c_t-k_t+(1-\delta)k_{t-1}]$$

である。ここで付け加えた T 個の変数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_T$ はラグランジュの未定常数と呼ばれる補助変数である。これらの補助変数を用いてつぎの最大化の必要条件を得る

$$\beta^t u'(c_t)-\lambda_t\leq 0,\quad [\beta^t u'(c_t)-\lambda_t]\cdot c_t=0,$$
$$t=1, 2, \ldots, T \tag{4.1}$$
$$\lambda_{t+1}[f'(k_t)+1-\delta]-\lambda_t\leq 0,$$
$$\{\lambda_{t+1}[f'(k_t)+1-\delta]-\lambda_t\}\cdot k_t=0,$$
$$t=1, 2, \ldots, T-1 \tag{4.2}$$
$$S'(k_T)-\lambda_T\leq 0,\quad [S'(k_T)-\lambda_T]\cdot k_T=0 \tag{4.3}$$
$$f(k_{t-1})-c_t-k_t+(1-\delta)k_{t-1}\geq 0,$$
$$[f(k_{t-1})-c_t-k_t+(1-\delta)k_{t-1}]\cdot\lambda_t=0,$$
$$t=1, 2, \ldots, T \tag{4.4}$$
$$c_t\geq 0,\quad k_t\geq 0,\quad \lambda_t\geq 0,\quad t=1, 2, \ldots, T \tag{4.5}$$

これをクーン＝タッカー条件という。[3]

クーン＝タッカー条件は，(a) 限界効用逓減 (b) 限界生産力逓減という経済学の通常の前提の下では，最適化の十分条件でもあることが知られている。(a) は効用関数が凹関数であるということであり，(b) は生産関数が凹関数であるということである。その意味で，問題が条件 (a) および (b) を満たすことを最適化問題の凹性という。一層正確には，効用関数については

$$u'(c_t)>0,\quad u''(c_t)<0$$

生産関数については

$$f'(k_t)>0,\quad f''(k_t)<0$$

の条件が満たされるとき，クーン＝タッカー条件は最適解の必要十分条件である。要するに，これらの条件の下で，もし (4.1) から (4.5) までが構成する不等式系に解があれば，それは最適解である。[4]

2　横断条件

最適制御理論との対応　最適制御理論と対比すると，クーン＝タッカー条件のうち (4.1) は最大化原理 maximum principle, (4.2) は補助方程式 auxiliary equation に対応する。これらに含まれない (4.3)

$$S'(k_T)-\lambda_T\leq 0,\quad [S'(k_T)-\lambda_T]\cdot k_T=0$$

が横断条件 transversality condition である。このように最適制御理論の最適条件をクーン＝タッカー条件と対応させて考えると，最適解を一意に定めるために，最大化原理と補助方程式に加えて横断条件が必要である理由がよく分かる。横断条件は，一般に終端効用関数 $S(k_T)$ の k_T に関する変化率 $S'(k_T)$ によって表される。

---

(3) Kuhn and Tucker (1951), p. 484, Theorem 1. 厳密には，これが最適化の必要条件となるためには，制約条件がある正則性の条件を満たしていなければならない。この点については，たとえば Kuhn and Tucker (1951), pp. 483-484, Hurwicz and Uzawa (1958), p. 34 などを見よ。

(4) 生産関数 $f(k)$ が稲田条件すなわち $\lim_{k\to 0}f'(k)=\infty$, $\lim_{k\to\infty}f'(k)=0$ を満たすとき，解は実際に存在する。

計画終結の条件　前節の問題が期間 T 以降の展望をまったくもたず，T 期間で完全に終結する計画の問題であるとしよう。そのとき，計画期間の終端において資本ストックの効用はゼロでなければならない。すなわち，任意の $k_T \geq 0$ に対して

$$S(k_T)=0, \quad \text{したがって} \quad S'(k_T)=0 \qquad (5)$$

でなければならない。そのとき最適化の問題はつぎの形をとる。

$$\max_{\{c_t\},\{k_t\}} \sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t)$$
$$f(k_{t-1})-c_t-k_t+(1-\delta)k_{t-1} \geq 0,$$
$$t=1, 2, \ldots, T$$
$$c_t \geq 0, \quad k_t \geq 0, \quad t=1, 2, \ldots, T$$

これを自由終端問題 free end-point problem という。それは，終端を $S(k_T)$ で束縛しないまま計画を期間 T で完結させる最適化問題である。これに対して，終端の資本ストックがはじめから，例えば $k_T=\bar{k}_T$ のように，特定の値 $\bar{k}_T$ に固定されている問題を固定終端問題 clamped end-point problem という。前節の問題は，$S(k_T)$ によって終端の k_T を束縛しているが特定値に固定していないので，固定終端問題ではない。[(5)] 自由終端問題については，横断条件 (4.3) がつぎのようになることはただちに明らかである。

$$\lambda_T \geq 0, \lambda_T k_T=0 \qquad (6)$$

すなわち，変数が非負制約に服する計画について，計画が期間 T で完結する場合，状態変数と補助変数の積は計画期間の終端 T においてゼロとなる。

終端効用関数を (5) の形に定めたとき，どのようなときに $\lambda_T=0$ となり，どのようなときに $\lambda_T>0$ となるのであろうか。クーン＝タッカー条件から分かることを確かめ，(6) を書きなおすことを考えよう。そのために (4.1) のうち終端に関わるものだけを示すとつぎのようになる。

$$\beta^T u'(c_T)-\lambda_T \leq 0,$$
$$[\beta^T u'(c_T)-\lambda_T]\cdot c_T=0 \qquad (7)$$

まず $k_T>0$ のときは (6) から $\lambda_T=0$ である。そのとき，(7) から $u'(c_T) \leq 0$ である。しかし経済学の問題では，通常 $u'(c_T) \geq 0$ が前提となっているから，$u'(c_T)=0$ でなければならない。また $u'(c_T)>0$ のときは (7) から $\lambda_T>0$ である。そのとき (6) から $k_T=0$ でなければならない。以上の考察から，有限期間 T で計画が終結する問題では，有効径路の終端でつぎの等式が成り立つことが分かる。

$$\beta^T u'(c_T)k_T=0$$

経済学の観点からは (6) よりもこの条件の方が意味を理解しやすい。終端において効用が飽和点に達していないならば $u'(c_T)>0$ である。これは，終端の消費を増やして計画期間の総効用をさらに増やす余地がまだ残っていることを示す。$\beta^T u'(c_T)k_T=0$ は，そのと

(5)　経済学の文献に多く見られる動的計画問題の標準形の明確な提示，および自由終端問題，固定終端問題の区別については，例えば Halkin (1974), p. 268 を見よ。

き $k_T=0$，すなわち，終端で利用可能な生産物 $f(k_{T-1})+k_{T-1}$ をすべて消費しつくし，以後に資本ストックを残すべきでないことを示している。

経済学の文献で「横断条件」とは，ほとんど (6) のみを指す。しかしこれは，計画が期間 T 以降の展望をもたず T 期間で完結する場合の条件である。計画が期間 T 以降の展望をもつ場合は，終端効用関数 $S(k_T)$ を考慮しなければならず，そのとき横断条件は (4.3) の形をとる。$u'(c_T)$ が正であるとき k_T が正のまま残るという結果は，それ自体，必ずしも不合理ではない。それが不合理となるのは，計画が T 期間で完結する場合のみである。(4.3) は，有効径路が境界面 $t=T$ を通過するときの条件を終端効用関数 $S(k)$ によって一般形で示しており，(6) を特殊な場合として含んでいる。

無限期間問題　結局，有限期間に計画が完結する問題では，効用の飽和がない限り終端で資本ストックを残さないのが最適であるという，極めて当然の結果が得られた。要するに，効用の飽和がないならば，問題は $k_T=0$ とする固定終端問題になる。有限期間で計画が完結する問題では，有効径路を決定することに問題を限定するならば，ことさら (6) などの条件を考えるまでもないのである。アロウ＝クルツが指摘するとおり[(6)]，有限期間問題で終端の条件を考える意味は無限期間問題への洞察を得ることにある。

有限期間問題の解の条件から，無限期間問題の解について何を知ることができるであろうか。無限期間問題の解を定める条件として，普通は条件 (6) を無限の先に延長して

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_t k_t=0 \tag{8}$$

が最適解の必要条件であるとされる。(6) は，終端で計画が完結するよう，終端効用関数 $S(k)$ を (5) のように定めて得られた条件である。これを無限期間問題に延長するというのは，無限期間問題が次第に問題の終結に向かわなければならないという直観によるのであろう。これは一応もっともと思われるが，(8) が最適化の必要条件とならない例が知られている。

シェルは最適成長理論の展開の中でつぎの例を示し，無限期間問題について，(8) を最適化の必要条件とすることへの疑問を表明している[(7)]。

$$\max_s \int_0^\infty (1-s)f(k)dt$$
$$\dot{k}=sf(k)-\delta k,\quad k(0)=0,\quad 0\leq s\leq 1$$

ここで k は1人当り資本ストック，$f(k)$ は1人当りの生産関数，s は平均貯蓄性向，δ は資本減耗率である。生産関数は通常の仮定，$f(0)=0$，$f'(k)>0$，$f''(k)<0$，を満たす。この例では，有効径路の1人当り資本スト

(6) Arrow and Kurz (1970), p. 38.

(7) Shell (1969), p. 273. ここでは本稿の前提に合わせて，人口増加率はゼロとした。人口増加率 n が正の場合は，δ を $n+\delta$ に置き換えればよい。

ク k は黄金律水準つまり $f'(\hat{k})=\delta$ となる $\hat{k}$ に収束し，かつ補助変数 λ は 1 に収束しなければならないことが確かめられる。したがって $\lim_{t\to\infty}\lambda k=\hat{k}$ となり，(8) が成り立たない。

アロウ＝クルツ (1970) をはじめ文献に広く引用されるホールキンの例はつぎのようなものである。(8)

$$\max_{\{v\}}\int_0^\infty(1-x)vdt$$
$$\dot{x}=(1-x)v,\quad x(0)=0,\quad 0\leq v\leq 1$$

この例では，制御変数 v を時間を通じて 0 と 1 のあいだの任意の値に固定すると有効径路が得られることが容易に分かる。その径路上では，状態変数 x については $\lim_{t\to\infty}x=1$ となる一方，補助変数を λ とすると，最大化原理によって λ は時間を通じて -1 でなければならないことが確かめられる。したがって $\lim_{t\to\infty}\lambda x=-1$ となり，(8) は成り立たない。この反例は，状態変数の値が大きいほどその時間変化率が小さいこと，補助変数の値が負になることなど，通常の経済成長模型と著しく異なる特徴をもつ。しかし，たとえば v を消費量，x を枯渇資源採掘量の累積値などとすると，経済組織に当てはめて解釈できないことはない。有限期間の終端条件から類推して無限期間問題の終端条件を定めることに重大な疑問が生じる。アロウ＝クルツは，(8) を最適化の必要条件とするのではなく，u および f を凹関数とする条件と併せて，十分条件の一部とすることでこの問題を解決を図っている。(9)

一方，最適化問題にいくつかの前提条件を加えて (8) が最適解の必要条件となることを示そうとする試みがある。効用関数と生産関数の凹性を前提として双対性理論を援用するヴァイツマン (1973) およびベンヴェニスト＝シェインクマン (1982) である。効用関数と生産関数の凹性は経済学においては自然な前提であるが，(8) が最適解の必要条件であるという結果は，これらの関数の凹性だけでは保証されない。したがって，たとえ問題を経済学の範囲に限定したとしても，(8) が最適解の必要条件となるのがどのくらい一般的であるかはまだ十分に明らかではない。ミシェルは一般的な条件の下で，(8) とは異なる最適解の必要条件を摸索している。(10)

(8) を最適解の必要条件として確立するということは，ミシェルが指摘するとおり，(11) 動的計画の問題の構造とその最適解の属性を限定することになるのである。ヴァイツマン，ベンヴェニスト＝シェインクマン，ミシェルの展開から分かるように，最適条件から (8) を導くためには，目的関数の形(12)と状態変数制

(8) Arrow and Kurz (1970), p. 46, Halkin (1974), p. 271, Michel (1982), p. 979.
(9) Arrow and Kurz (1970), pp. 48-49, Proposition 8.
(10) Michel (1982), p. 977, Theorem.
(11) Michel (1982), p. 981.
(12) Weitzman (1973), p. 785, "allowability" の定義。Benveniste and Sheinkman (1982), p. 9, 仮定 (A.3)。

御の許容範囲[13]に適当な条件を付さなければならない。実際，シェルの反例では目的関数が $\int_0^\infty c(t)dt$ のようになっている。この積分は有限の確定値をとらない。またホールキンは，無限期間問題について，$\lim_{T\to\infty}k(T)dt$ あるいは $\lim_{T\to\infty}\int_0^T\beta(t)u[c(t)]dt$ が存在するとの前提は不要であると述べている[14]。これらのことを考えると，経済学の文献では効用関数の無限期間にわたる和が存在すると仮定することによって，最適化問題の範囲をかなり狭めているのではないかと思われる[15]。

ブランチャードおよびフィッシャーによるラムゼイ問題の展開　このように見てくると，いわゆる鞍点径路のみを有効径路とするブランチャード等の論法について疑問が生じる。ラムゼイ問題を扱うブランチャード＝フィッシャー（1989）の展開について考えてみよう。本稿第1節のクーン＝タッカー条件（4.1）から（4.4）までを非負制約のない自由終端問題に適用し，補助変数 λ を消去した上，横断条件を無限期間に延長すると，つぎの動学系を得る。

$$f(k_{t-1})=c_t+k_t-(1-\delta)k_{t-1} \qquad (9.1)$$

$$f'(k_t)+1-\delta=(1+\rho)\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} \qquad (9.2)$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u'(c_t)}{(1+\rho)^t}\cdot k_t=0 \qquad (9.3)$$

ここで $1+\rho=1/\beta$ である。これは，ブランチャード＝フィッシャー（1989），第2章の（2），（7′），（8）に対応する。この動学系で c_t と k_t の変動が止まる点，すなわち $f(k^*)=c^*+\delta k^*, f'(k^*)=\rho+\delta$ を満たす (c^*, k^*) が定常点である。このようなラムゼイ型の経済成長模型では，通常，定常点は鞍点となる。鞍点径路とは，鞍点としての定常点に収束する径路のことである。効用関数 $u(c)$ と生産関数 $f(k)$ が凹関数であるときは，（9.1）から（9.3）までが最適性の十分条件になることから，鞍点径路が有効径路であることに問題はない。

鞍点径路以外の径路は，普通，有効径路ではないとされる。ブランチャード＝フィッシャーは，鞍点径路以外の径路はつぎの（a）または（b）のいずれかになるため有効径路ではないという。（a）動学方程式（9.2）を満たさない期間がある。（b）横断条件（9.3）を満たさない。まず（a）については，（9.2）が満たされなくなるのは，この動学系が定める径路が (c, k) の非負領域の境界 $k=0$ に達したときである。一方（9.2）は，変数の非負制約を考慮せずに導いた動学方程式である。非負領域の境界に達した径路の動きをそのような動学方程式によって確定できるか，また，非負領域の境界に達した径路がそのような方程式を満たさないという理由で，

(13)　Benveniste and Sheinkman (1982), p. 13, 仮定（A.4), Michel (1982), p. 979, Colorary.
(14)　Halkin (1974), p. 271, §5, (ii). 本文の数式は，本稿の問題に合わせて変更し簡略にした。
(15)　多期間にわたる効用の和の存在を前提としない無限期間問題の最適解の定義については，Halkin (1974), p. 269 を見よ。

その径路は有効径路ではないといえるか，疑問である。つぎに (b) については，(8) あるいは (9.3) が有効径路の必要条件であることが確立されていないときに，この条件を満たさない径路が有効径路ではないと断定できるか，疑問である。

動学系 (9.1)，(9.2) の径路の中から有効径路を選別する基準を定めるのに，クープマンス＝フェルプスの「非効率性定理」を援用することが考えられる。ある時点以降１人当り資本ストックが黄金律水準 $\hat{k}$ を超える水準に保たれる径路は動学的に非効率であるという定理である。[16] ここで動学的に非効率とは，同じ初期資本ストックから出発する別の径路をたどれば，１期間当り消費を，どの期間についても減らさずに，ある期間にわたって増やすことができるということである。ラムゼイの有効径路は動学的に非効率であってはならない。したがって，１人当り資本ストックが $\hat{k}$ を超えて増え続ける径路は有効径路ではない。ブランチャード＝フィッシャー (1989) で横断条件を満たさないとされる径路は，１人当り資本ストックが $\hat{k}$ を超えて増え続ける径路である。[17] そのような径路が横断条件 (9.3) を満たさないというのは誤りではないが，それが有効径路ではないことは，ここに示したように，クープマンス＝フェルプスの非効率性定理からすでに明らかである。横断条件という危うい基準を用いるまでもないのである。

鞍点径路ではないが１人当り資本ストックが $\hat{k}$ を超えない径路についてはどうであろうか。１人当り資本ストックが $\hat{k}$ に達することなくある一定値に収束する径路がもしあれば，その径路については横断条件 (9.3) が成り立つ。なぜなら，そのような径路については $f'(k_t)>\delta$ がつねに成り立つことから，$f'(k_t)-\delta=\alpha_t$ とおくと，(9.2) によって

$$\frac{u'(c_{t+1})}{(1+\rho)u'(c_t)}=\frac{1}{1+\alpha_t},\quad \alpha_t>0,\quad t=1,2,\ldots$$

したがって

$$\frac{u'(c_t)}{(1+\rho)^t}=\frac{1}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_{t-1})}\cdot\frac{u'(c_1)}{(1+\rho)}$$

となるので $\lim_{t\to\infty}u'(c_t)/(1+\rho)^t=0$ となり，(9.3) が成り立つことが分かる。効用関数と生産関数が凹関数であるという前提の下で，そのような径路は有効径路である。しかし，本来非負制約に服する (c_t, k_t) の動きは，非負制約を考慮せずに導かれた動学系 (9.1)，(9.2) によっては正確に追跡できない。

ラムゼイ模型については，実はクープマンス (1965) が，核心に触れることをすでに十分に解明している。残る問題は，その成果を，最適制御理論や位相図による最近の分析にどのように移し替えるかという技術的な問題のみであるともいえる。クープマンスの所論[18]から推して考えると，例えば必要最低消費水準

(16) この定理については，例えば Phelps (1965), p. 806, Shell (1969), pp. 243-245 を見よ。
(17) Blanchard and Fischer (1989), p. 75.
(18) Koopmans (1965), pp. 241-242.

などの基準を設けて，許容解の範囲を限定する必要があるように思われる。このように許容解の範囲を限定すると，おそらく鞍点径路以外の径路はすべて動学的に非効率となり，鞍点径路のみが有効径路であることが確立されるのであろう。いずれにせよ「横断条件」といわれる (8) は，有効径路を選別する決め手とはならないのである。

3　ポンジ・ゲームの禁止

前節まででは，生産技術を制約条件とする社会貯蓄の最適化問題を考えてきた。それは，社会の効用関数を前提とし，その最大化を目的とする集権計画経済の問題と理解できる。分権市場経済における家計の意思決定も同形の問題である。しかし後者ついては，最適化問題を構成するにあたって，所得制約をどのように定めるべきかという経済学上の問題が生じる。いわゆるポンジ・ゲーム禁止の問題である。この条件と終端条件あるいは横断条件とのあいだにはどのような関係があるか。以下でそれを明らかにしよう。

ポンジ・ゲーム禁止条件の定義　有限期間 T にわたる問題から考えよう。期間 t の消費を c_t，T 期間にわたる消費の効用を $\sum^T{}_{t=1}\beta^t{}_u(c_t)$ とする。β は心理的割引因子である。家計の効用最大化問題の目的は，計画期間以後への展望をもつ問題の形で書けば

$$\max_{\{c_t\},\{a_t\}} \sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t) + S(a_T) \tag{10}$$

ここで a_T は計画終了時の実質資産額，$S(a_T)$ はその効用である。また自由終端問題の形で書けば

$$\max_{\{c_t\},\{a_t\}} \sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t) \tag{11}$$

である。他方，期間 t の実質資産額を a_t，賃金収入を w_t，資産の実質収益率を r とすると，家計の収支はつぎの条件を満たさなければならない。(19)

$$a_t - a_{t-1} = ra_{t-1} + w_t - c_t, \quad t=1, 2, \ldots, T$$

ここで a_0 は歴史与件である。さらに，消費は負になることはないから，つぎの非負制約を課さなければならない。

$$c_t \geq 0, \quad t=1, 2, \ldots, T$$

社会貯蓄の最適化問題とは異なり，資産 a_t については負になることも許容しておかなければならない。家計は負債を負うこともあり得るからである。

1 期ごとの制約条件 $a_t - a_{t-1} = ra_{t-1} + w_t - c_t$ は，家計の行動をどのように制約するのであろうか。この条件は t 期の消費 c_t と資産の蓄積 $a_t - a_{t-1}$ をその期の所得 $ra_{t-1} + w_t$ の範囲内に制約する。しかし a_t が負になることを許容しているから，家計は負債を負うことによって，所得の限度を超えて消費をすることができる。したがってもし $a_1, a_2,$

(19)　以下，利子率は時間を通じて一定であるとする。利子率が変動するとしても，以下の議論の本質はまったく変わらない。

…, a_T に何らの制約も課さないならば，1期ごとの収支を制約する $a_t - a_{t-1} = ra_{t-1} + w_t - c_t$ という条件自体は，結局，家計の行動を何ら制約していないことになる。

したがって家計の効用最大化問題では，1期間ごとの制約条件に加えて，何らかの工夫をして消費が際限なく大きくなることを禁止しなければならない。(10) の形の問題では，計画終了時の資産 a_T の効用 $S(a_T)$ を考慮することによって，計画期間中の消費が際限なく大きくならないよう家計の行動を制約している。計画が期間 T で完結する (11) の形の問題では，終端の資産額の値が取り得る範囲に適当な下限を定めなければならない。

無限期間問題への手掛かりを得るために，自由終端問題 (11) を考えよう。この問題については，終端の資産 a_T の下限をゼロに定めるのが妥当である。私有財産制の下では，家計は，基本的にその返済能力の範囲内でしか負債を負うことができないからである。いい換えれば，初期資産と生涯所得によって，生涯のあいだに負債を返済しきらなければならない。この条件はまた，生涯消費を初期資産と生涯所得の範囲内に制約する条件でもある。実際，1期ごとの制約条件を順次繋げて行くと，T 期間にわたる所得制約条件

$$a_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{w_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t} + \frac{a_T}{(1+r)^T} \quad (12)$$

を得る。そこで終端資産に非負制約

$$\frac{a_T}{(1+r)^T} \geq 0 \quad (13)$$

を課すと

$$a_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{w_t}{(1+r)^t} \geq \sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t} \quad (14)$$

である。非負制約条件 (13) は

$$a_T \geq 0$$

と同値であること，また，計画期間途中の資産が負になるのを禁止していないことは明らかであろう。(13) を**負債残存禁止条件**と呼ぶことにする。

以上の考察をとおして明らかになったことを，無限期間問題

$$\max_{\{c_t\},\{a_t\}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

に拡張するとどのようになるであろうか。(12) に対応する条件は

$$a_0 + \lim_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} \frac{w_t}{(1+r)^t}$$
$$= \lim_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t} + \lim_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} \frac{a_T}{(1+r)^T}$$

であるから，負債残存禁止条件 (13) を延長して

$$\lim_{T\to\infty} \frac{a_T}{(1+r)^T} \geq 0 \quad (15)$$

を無限期間問題の制約条件とするのが自然であろう。そのとき，

$$a_0 + \lim_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} \frac{w_t}{(1+r)^t} \geq \lim_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t}$$

となり，消費の割引現在価値は初期資産と賃金収入の割引現在価値の範囲内に制約される。(15) を**ポンジ・ゲーム禁止条件 no-Ponzi-game condition** という。これは，家計が負債を増やして，その返済を際限なく先に延ばすことを禁止する条件である。ただ，この条

件は

$$\lim_{T\to\infty} a_T \geq 0$$

より弱いことに注意しよう。a_T の値が負で，その絶対値が増えていっても，つまり家計が負債を負ってその負債額が増えていっても，その増加の速さが複利増殖率 $\lim_{T\to\infty}(1+r)^T$ より遅ければ（15）は成り立つ。要するにポンジ・ゲーム禁止条件は，負債が複利増殖率より速く増大することを禁止する条件である。無限期間最適化問題の横断条件の問題をどのように解決するかに関わらず，この条件は，私有財産制を基礎とする市場経済の制度上の制約としては，極めて妥当である。

有限期間問題の終端条件　ポンジ・ゲーム禁止条件と有効径路の終端条件の関係を明らかにするために，ふたたび有限期間 T で完結する問題（11）を考えよう。この問題では，終端前の資産残高 a_t，$t=1, 2, \ldots, T-1$ には非負制約がないが，終端の資産残高 a_T は負債残存禁止条件によって非負制約に服するから，家計は（14）の制約に服する。したがって家計の効用最大化問題はつぎのようになる。

$$\max_{\{c_t\}} \sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t)$$

$$a_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{w_t}{(1+r)^t} \geq \sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t}$$

$$c_t \geq 0, \quad t=1, 2, \ldots, T$$

この問題のクーン＝タッカー条件はつぎの不等式系によって示される。

$$\beta^t u'(c_t) - \frac{\mu}{(1+r)^t} \leq 0,$$

$$\left[\beta^t u'(c_t) - \frac{\mu}{(1+r)^t}\right] \cdot c_t = 0,$$

$$t=1, 2, \ldots, T \tag{15.1}$$

$$a_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{w_t}{(1+r)^t} - \sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t} \geq 0,$$

$$\left[a_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{w_t}{(1+r)^t} - \sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t}\right] \cdot \mu = 0 \tag{15.2}$$

$$c_t \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad t=1, 2, \ldots, T \tag{15.3}$$

ここで（12）を考慮すると，（15.2）の第1式は $a_T/(1+r)^T \geq 0$ となる。これは負債残存禁止条件にほかならない。また第2式は $\mu a_T/(1+r)^T = 0$ となる。さらに，$\lambda_t = \mu/(1+r)^t$ とおくと $(1+r)\lambda_{t+1} = \lambda_t$ である。これらのことを考慮して（15.1）および（15.2）を最適制御理論の最適化条件と比較し易い形に書きなおすと，負債残存禁止条件の下で

$$\beta^t u'(c_t) - \lambda_t \leq 0,$$

$$[\beta^t u'(c_t) - \lambda_t] \cdot c_t = 0,$$

$$t=1, 2, \ldots, T \tag{16.1}$$

$$(1+r)\lambda_{t+1} = \lambda_t, \quad t=1, 2, \ldots, T-1 \tag{16.2}$$

$$\lambda_T a_T = 0 \tag{16.3}$$

（16.1）が最大化原理，（16.2）が補助方程式，（16.3）が横断条件にそれぞれ対応する。このように，クーン＝タッカー条件（15.1）および（15.2）をとおして，終端条件（16.3）が最適化の必要条件の一部として導かれる。いうまでもなく，効用関数が凹関数であれば，（16.1）から（16.3）までは最適化の十分条件でもある。また前節と同様の推論によって，つぎの等式が導かれる。[20]

(20)　本稿第2節，166ページを見よ。

$$\beta^T u'(c_T)a_T=0$$

最適制御理論の立場から見て，有効径路の決定において負債残存禁止条件（13）と終端条件（16.3）が果たす役割がどのように違うかも明らかになった。前者が許容解の範囲を限定して最適解の存在を保証する条件の一つであるのに対して，後者は，最大化原理と補助方程式を満たす解の中から最適解を選ぶ条件である。

無限期間問題の終端条件　有限期間問題の結果を基にして無限期間問題について考えよう。無限期間問題のポンジ・ゲーム禁止条件（15）は有限期間問題の負債残存禁止条件に対応する。したがってそれは許容解の範囲を限定する条件である。すでに指摘したとおり，それは負債が複利の元利合計より早く増大することを禁止する条件であり，私有財産制に基づく市場経済の制度として極めて妥当である。そればかりか，もしこの条件がなければ，家計の行動は事実上何ら制約されていないこととなり，最適化問題自体が成り立たない。しかしこの条件は，有効径路の特徴を定めるものではない。

有効径路の特徴を定めるのはクーン＝タッカー条件である。そのうち（15.1），あるいはそれを最適制御理論の形に書き換えた（16.1）と（16.2）が各時点で成り立つことが，無限期間問題についても最適化の必要条件となることに疑いはない。しかし残りの条件，すなわち（15.2）あるいはそれを書き換えた（16.3）を無限の先に延長した条件

$$\lim_{T\to\infty}\lambda_T a_T=0$$

については，前節までで考察した社会最適の問題についてと同様のことがいえる。もし効用関数 $u(c)$ が凹関数であれば，（16.1），（16.2）とともに，この条件が最適解の十分条件を構成することはよく知られている通りである。しかしこれを最適解の必要条件とすることは，一般にはできない。

4　結　論

有限期間自由終端問題の横断条件をそのまま無限期間問題に拡張して，$\lim_{t\to\infty}\lambda_t k_t=0$ を最適化の必要条件とすることは一般にはできない。経済学者は，有限期間問題の結果と類似の条件を無限期間問題に課することによって，暗黙のうちに動的計画問題の構造と有効径路の属性を狭めている。分権市場経済の家計の効用最大化問題に関するポンジ・ゲーム禁止条件は自然な予算制約条件に過ぎない。無限期間問題の許容解の範囲をこの条件によって限定しても，いわゆる横断条件を最適解の必要条件とすることはできない。横断条件が有効径路の必要条件となるような構造をもつ経済模型を摸索する試みもある。しかしそのような試みをとおして，経済組織についてどれほどの洞察が得られるか，疑問である。終端のない無限期間問題を考えるのに，計画が次第に終端に向かうとする発想自体が，根本的に誤りなのかもしれない。

（経済学部教授）

参 考 文 献

Kenneth J. Arrow (1968) "Optimal Capital Policy with Irreversible Investment." In *Value, Capital and Growth*, Papers in Honour of Sir John Hicks, edited by J. N. Wolfe. Edingburgh: Edingburgh University Press.

Kenneth J. Arrow and Mordecai Kurz (1970) *Public Investment, the Rate of Return and the Optimal Fiscal Policy*. Baltimore, Maryland: Johns Hopkins Press.

L. M. Benveniste and José A. Scheinkman (1982) "Duality Theory for Dynamic Optimization Models of Economics: The Continuous Time Case." *Journal of Economic Theory* 27: 1-19.

Olivier J. Blanchard and Stanley Fischer (1989) *Lectures on Macroeconomics*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Hubert Halkin (1974) "Necessary Conditions for Optimal Control Problems with Infinite Horizons." *Econometrica* 42: 267-272.

Leonid Hurwicz and Hirofumi Uzawa (1958) "The Kuhn-Tucker Theorem in Concave Programming." In *Studies in Linear and Nonlinear Programming*, edited by Kenneth J. Arrow, Leonid Hurwicz and Hirofumi Uzawa. Stanford, California: Stanford University Press.

Tjalling C. Koopmans (1965) "On the Concept of Optimal Economic Growth." In *Study Week on the Econometric Approach to Development Planning*: October 7-13, 1963. Pontificiae academiae scientiarum scripta varia: 28. Amsterdam: North-Holland.

Harold W. Kuhn and Albert W. Tucker (1951) "Nonlinear Programming." In *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, edited by Jerzy Neyman. Berkeley, California: University of California Press.

Phillipe Michel (1982) "On the Transversality Condition in Infinite Horizon Optimal Problems." *Econometrica* 50: 975-985.

Edmund S. Phelps (1965) "Second Essay on the Golden Rule of Accumulation." *American Economic Review* 55: 793-814.

Frank P. Ramsey (1928) "A Mathematical Theory of Saving." *Economic Journal* 38: 543-549.

Karl Shell (1969) "Application of Pontryagin's Maximum Principle to Economics." In *Mathematical Systems Theory and Economics* I, edited by Harold W. Kuhn and G. P. Szergö. Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics. Berlin: Springer-Verlag.

Martin L. Weitzman (1973) "Duality Theory for Infinite Horizon Convex Models." *Management Science* 19: 783-789.