Title	ナッシュ均衡のランダム性についての覚書
Sub Title	A note on the randomness of Nash equilibria
Author	中山, 幹夫(Nakayama, Mikio)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2000
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.93, No.1 (2000. 4) ,p.259- 266
JaLC DOI	10.14991/001.20000401-0259
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20000401-0259

「三田学会雑誌」93巻1号（2000年4月）

研究ノート

ナッシュ均衡のランダム性についての覚書

中　山　幹　夫*

1．はじめに

自然数 $m\in Z_+=\{0,1,2,\ldots\}$ をパラメタにもつ $n+1$ 人ゲーム

$$G_m=(\{1,\ldots,n+1\},(S_i)_{i=1}^{n+1},(u_{im})_{i=1}^{n+1})$$

のクラス $\{G_m\}$ を考える。ただし，各プレイヤー i について，戦略空間 S_i は $S_i=Z_+$ であり，利得関数 u_{im} はパラメタ m と，純戦略の組 $(x_1,\ldots,x_{n+1})\in S_1\times\cdots\times S_{n+1}$ についての**整数係数の多項式**であるとする。このとき，次の定理が Prasad［18］によって証明されている。

定理1．（Prasad） あるクラス $\{G_m\}$ と $\{G'_m\}$ に対して，

1. 任意の $m\in Z_+$ について，G_m が（混合戦略）ナッシュ均衡をもつか否かは決定不能である。
2. 任意の $m\in Z_+$ について，G'_m のナッシュ均衡は，**ランダム実数** Ω の2進展開の第 m 項が0ならば有限個，1ならば無限個存在する。

1の証明は，

G_m がナッシュ均衡をもつ⇔ディオファントス方程式

$P(m,x_1,\ldots,x_n)=0$ が整数解をもつ

となることを示し，ナッシュ均衡の存在問題をこの後者のヒルベルトの10番問題の決定不能性に帰着させるという方法によって行われている。このような**帰着**という論法についてはすでに中山［16］で解説済みであるが，2は，Chaitin［6］の**アルゴリズム的情報理論**で中心的役割を果たす**停止確率**と呼ばれる**ラ**

* Date : February 19, 2000.
慶應義塾大学経済学部2-15-45 Mita, Tokyo 108-8345.
e-mail : nakayama@econ.keio.ac.jp 記述の改善に繋がる適切な助言を与えて下さった審査員に感謝いたします。

ンダム実数 Ωに言及しており，これはゲーム理論や経済学にとってはほとんどなじみのない概念である。しかし，この定理の意味することは，ゲーデルの不完全性定理をも超えて，合理的推論を受け付けない形式的対象がゲーム理論の世界にも存在しているということである。

後で述べるように，Ωの2進展開の各項の値は，均質なコインを投げて表ならゼロ，裏なら1と決定するのと全く区別がつかないという意味の**でたらめさ**に支配されており，一切の推論を無意味にする無秩序，無構造，混沌の中で生起する現象と変わらない。ランダムという用語は，これも後で定義するように，このような混沌をアルゴリズム的に表現する概念である。こうして，2は，ナッシュ均衡の存在のみならず，その個数（ゼロ個は有限個とみなす）が有限か無限かという固有の属性が，推論の力の及ばないランダム性に支配されて決まるというゲームのクラスを記述するものとなっている。

この覚え書きでは，中山［16］の延長として，ランダム数Ωとその根底にあるKolmogorov＝Chaitinの，数の**複雑度**，さらに，**指数的ディオファントス方程式**を経て，上記のナッシュ均衡のランダム性に至る道筋の解説を試みる。

2．停止確率

停止確率とは，次のように定義される実数Ωである。

$$\Omega=\sum_n P(n),\quad where\ P(n)=\sum_{p|U(p)=n} 2^{-|p|}$$

ここに，$|p|$はプログラムpの長さ，つまり，2進列でpをコード化したときのビット数のことである。$P(n)$は，それゆえ，任意のプログラム，すなわち，均質なコインを投げて表なら0，裏なら1としてえられる2進列に対応するプログラムpを万能チューリングマシンUに入力したときに，Uが値$n\in Z_+$を出力する確率であり，したがって，Ωは，Uがある自然数の値を出力して停止する確率を表す(1)。この意味において，Ωは**万能チューリングマシンの停止確率**と呼ばれている。

停止確率のこの定義は，それを計算する次のような原理的な手順を示唆している。各$n=1, 2, \ldots,$に対して，Ω_nを，nビットを超えないプログラムpがn秒以内に停止する確率として計算する。実際，長さkビットのプログラムは2^k個あるから，各$k=1, 2, \ldots, n$について，2^k個のうちn秒以内で停止したプログラムの割合を求め，これを各kについて加えればΩ_nが求まる。ΩはこのΩ_nの$n\to\infty$としたときの極限であるから，この手順を無限回実行したとすればΩが得ら

(1) 実は，$\Omega\leq 1$となるためには，想定するプログラムがself-delimitingという性質をもつことが必要であり，以後，本稿ではこれを仮定する。詳細はChaitin［4］参照。

れる。もちろん，事実上実行不可能である。

注意1． もし，Ω の各項を与える公式のようなものがあったとしたら，第n項までと同じ列が得られるまで上の手順を実行することによって，すべての n 未満の長さのプログラムのどれが停止したかを知ることができる。すべての n についてこれが可能だったとすれば，これはチューリングの**停止問題の決定不能性**（中山［16］参照）に反することになる。

3．ランダム数

任意の自然数 $n \in Z_+$ について，

$$H(n) = \min_{p|U(p)=n} |p|$$

と定義される $H(n)$ を n の**複雑度**という。つまり，n の複雑度とは，n を万能チューリングマシンに出力させるための，最小のプログラム p の長さにほかならない。もしいかなるプログラムも n を出力しないときは $H(n) = +\infty$ とする。複雑度のアイディアは，Kolmogorov［13］と Chaitin［3］によって，ほぼ同時期に独立に提唱された。

n の複雑度 $H(n)$ と n が出力される確率 $P(n)$ は，

$$H(n) = -log_2 P(n) + O(1)$$

のような関係にあることが知られている（Chaitin［4］）。つまり，n を出力する確率は，複雑度 $H(n)$ の最小プログラムの付近に集中しているので，

$$\Omega = \sum_n 2^{-H(n)}$$

として停止確率を定義することもできる（Chaitin［4］）。

自然数 n は，その複雑度が自分自身の2進コード(2)の長さ $|n|$ よりはるかに小さくはないとき，つまり，n に依存しない $c>0$ があって，

$$H(n) > |n| - c$$

であるとき，**ランダム**であるといわれる（Chaitin［5］）。この背後にあるアイディアは，情報の圧縮可能性である。たとえば，0と1を交互に1億個ずつ並べてできる長さ2億ビットの列

$$01010101...0101$$

は，これよりはるかに短いプログラムで記述できるからランダムではない。一般に，コンピュータで n をプリントするには，もちろんプログラムが必要であるが，n の2進コードを直接入力することにより，プリントするためのルーティンの数ビットを追加的に使用するだけで出力することが原理的に可能である。だから，n を出力する最小プログラムの長さ $H(n)$ が，$|n|$ に比して十分小さくないならば，n 自身を直接入力するのと大差はな

（2） たとえば，$(empty, 0), (0, 1), (1, 2), (00, 3), (01, 4), (10, 5), (11, 6), \ldots$ とすれば，2進列 $a_n \ldots a_1 a_0$ と自然数 $x = 2^{n+1} - 1 + \sum_{i=0}^{n} a_i 2^i$ が1対1に対応する。

い。このように，本質的に**自分自身が自分自身を記述するための最小のプログラム**であるような数をランダム数というのである。

ランダム数は，このように，それ自身より短いプログラムでは記述できない数であるから，その2進コードの各項をプリントするには，事実上それをそのまま入力するしか方法はない。すでに出力された項と，次に出力される項との間にはいかなる論理的，因果的，ないし構造的関係もなく，各項は互いに独立で，この意味において，「銭投げ」のベルヌイ試行によって各項を決定するのと区別はできないのである。

この無法則性は，さらに次の定理に示すように，任意に与えられた自然数のランダム性の，甚だしい決定不能性となって現れている。

定理2．（Kolmogorov [13]） ランダムでない自然数の集合は，単純である。

自然数の集合 S が**単純**であるとは，

- S は帰納的可算であり，
- 補集合 S^c は無限集合で，帰納的可算な無限集合を含まない

ことであった（中山 [16] 参照）。それゆえ，任意の自然数 n について，「$n \in S^c$ である」という述語，すなわち，上の Kolmogorov の定理によれば，「n はランダムである」という述語は帰納的可算な述語ではない。したがって，すべてのランダム数を残らずプリントするようなアルゴリズムは存在せず，それゆえ，任意の n がランダムか否かを決定するアルゴリズムも当然存在しない。

注意2． 単純集合は，1944年に Post [17] によって導入された人為的な集合概念で，しかも「単純」という用語の日常的意味からは程遠く，構成するのもそれほど容易ではない。しかし，この Kolmogorov による1965年の定理は，ランダム性を複雑性と同一視すれば，**複雑でない数は単純集合の要素である**という調和した意味をもつ自然な単純集合が存在することを述べている。

このような，ランダム数の無秩序さは，無限の2進列においては，全く手に負えないものとなる。たとえば，円周率 π などは，ハットンの級数によって10進展開することができるから，各項は計算可能であるが，大多数の実数については，このような効率的プログラムは存在しない。つまり，その第n項を与えるアルゴリズムは一般に存在しないので，その値を知ることはできない。

無限列のランダム性は次のように定義される（Chaitin [4]）。x を2進数の無限列とし，x_n を初項からの長さ $|x_n|=n$ の有限列とする。このとき，

$$\exists c \forall n[H(x_n)>|x_n|-c]$$

ならば，x は**ランダム**であるという。実数 x がランダムであるとは，x の小数点以下の2進展開がランダムであることをいう。たとえば，$\sqrt{2}$，π，e などはランダムではないが，ほとんどの実数はランダムである。

定理3．（Chaitin [4]） 停止確率 Ω はランダム実数である。

こうして，冒頭に述べたPrasadの定理の2は，ゲーム G'_m のナッシュ均衡の個数が有限個か無限個かのいずれであるかを知りたければ，均質なコインを投げて決定するよりほかはないことを述べていることがわかる。

4．指数的ディオファントス方程式

ナッシュ均衡のランダム性に到達するためには，停止確率Ωと各プレイヤーの利得とを関連づける必要がある。この段階で不可欠な役割を果たすのは，ジョーンズとマティヤセヴィッチによる次の定理である。

定理4．（Jones=Matijasevic [12]）任意の帰納的可算な関係は**単層**（singlefold）の**指数的ディオファントス表現**をもつ。

自然数 n と k についての帰納的可算な関係を $M(n,k)$ と表そう。このとき，M が指数的ディオファントス表現をもつとは，

$$M(n,k) \Leftrightarrow \exists y_1 \cdots \exists y_m [L(n,k,y_1,\ldots,y_m) = R(n,k,y_1,\ldots,y_m)]$$

が成立することをいう。ここに，L,R はいずれも2個のパラメタ n,k とm個の未知数をもつ，指数的ディオファントス多項式，つまり，非負の整数係数でしかも x^y の形をした項を許す多項式である。(3) また，単層とは，$L=R$ をみたす未知数が高々1組であることをいう。

注意3． $M(n,n) \Leftrightarrow \varphi_n(n)\downarrow$ とすると，これは決定不能な関係（中山［16］参照）だから，上の論理式は，「指数的」という制約がなければヒルベルトの10番問題の否定的解決を与える。実際，Davis=Putnum=Robinson［8］は，定理4の単層性を除いた形の結果を1961年に発表しており，ヒルベルトの10番問題は，Matijasevic［14］の論文が出るまで，最終的解決の一歩手前に9年間留まっていたのである。

さて，残されたステップは，停止確率Ωの2進展開の各項の値に関する帰納的可算な**述語**（関係）を見出し，さらにナッシュ均衡と指数的ディオファントス方程式を関連づけることである。

5．ナッシュ均衡のランダム性

定理1に登場するゲーム G_m および G'_m の利得関数は，以下のように与えられる多項式である。

1．$u_{1m}(x_1,\ldots,x_{n+1}) = Q+(1-(x_1-x_2)^2+x_3)^2(Q-1)$
2．$u_{2m}(x_1,\ldots,x_{n+1}) = Q+((x_1-x_2)^2-x_3)^2(Q-1)$
3．$u_{3m}(x_1,\ldots,x_{n+1}) = Q+((x_1-x_2)^2-x_3-1)^2(Q-1)$
4．$u_{im}(x_1,\ldots,x_{n+1}) = Q,\ i=4,\ldots,n+1$

（3） この定理では 2^y の形でよい（Jones=Matijasevic［11］）

where,

(a) $Q \equiv Q(m, x_1, \ldots, x_{n+1})$
$=1-[(P^2-x_{n+1})^2$
$+(P^2-x_{n+1}-1)^2(P^2+x_{n+1})]$

(b) $P \equiv P(m, x_1, \ldots, x_n)$
$=L(m, x_1, \ldots, x_n)$
$-R(m, x_1, \ldots, x_n)$

ここに，$P \equiv L-R$ はあるディオファントス多項式である。

まず，Prasad［18］の中で証明されている事実のうち，必要なものをここに列挙しよう。このうち，補題2は技術的でPrasadの論文の心臓部に位置する命題である。

補題1． $\exists x_1 \cdots \exists x_{n+1}[Q=1] \Leftrightarrow \exists x_1 \cdots \exists x_n[P=0]$

補題2． G_m がナッシュ均衡をもつ⇔ $\exists x_1 \cdots \exists x_{n+1}[Q=1]$

補題3． G_m のナッシュ均衡の数は，$P=0$ の解の数に等しい。

補題1と2から，冒頭に述べたように

G_m がナッシュ均衡をもつ⇔ $\exists x_1 \cdots \exists x_n[P=0]$

となって，ナッシュ均衡の存在問題がディオファントス方程式の自然数解の存在問題に帰着され，定理4から決定不能性が得られる。

さて，補題3によって，ナッシュ均衡のランダム性は，mの値が動くにつれて解が無限個になったり有限個になったりするような奇妙なディオファントス方程式 $P=0$ の存在に帰着されるが，次の定理がこれを保証する。

定理5．（Chaitin［6］）ある指数的ディオファントス方程式

$$L(m, x_1, \ldots, x_n)=R(m, x_1, \ldots, x_n)$$

が存在して，その自然数解 $(x_1, \ldots, x_n)$ は，停止確率 Ω の2進展開の第m項が0ならば有限個，1ならば無限個存在する。

証明． 停止確率 Ω の定義から，有理数の計算可能な単調増加列

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots$$

で $\Omega=\lim_{k\to\infty}\omega_k$ となるものが存在する。述語

ω_k の2進展開の第m項は1である

は，その真偽を確かめる計算可能な手続があるから計算可能であり，当然，帰納的可算である。それゆえ，定理4から，ある**単層**指数的ディオファントス方程式

$$L(m, k, x_2, \ldots, x_n)=R(m, k, x_2, \ldots, x_n)$$

が存在して，その解 $(x_2, \ldots, x_n)$ の個数は，ω_k の2進展開の第m項が，1ならば1個，0ならば0個である。ところが，$\Omega=\lim_{k\to\infty}\omega_k$ であるから，ω_k の第m項は無限個のkに対して同じ値で，それは Ω の2進展開の第m項に等しい。ゆえに，指数的ディオファントス方程式

$$L(m, x_1, x_2, \ldots, x_n)=R(m, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

の解 $(x_1, \ldots, x_n)$ の個数は，Ω の2進展開の第m項が，1ならば無限個，0ならば有限個となる。

こうして，この定理で存在が保証されたディオファントス方程式 $P\equiv L-R=0$ をもつゲーム G_m を G'_m とすれば，定理２で述べられているナッシュ均衡のランダム性が得られる。

注意４． プレイヤーの数nの値は特定化していないが，Jones＝Matijasevic［11］によれば，定理４は $m\geq 3$ で成立するので，定理５は $n\geq 4$ で成立する。

6．終わりに

ランダム実数Ωは，その提唱者であるChaitinによって，本来の情報理論やコンピュータ科学を超えて，形式論理体系のアルゴリズム的限界を示したり，生物進化の抽象的数学モデルを論じるのにも用いられている。また，その基礎であるアルゴリズム的複雑性の概念は，KolmogorovやChaitinとほぼ同時期に，Solomonoff［19］によって，科学方法論のモデルとして提唱された。「理論」とは，膨大な数の観察事実を，コンパクトに説明するためのものであって，この意味でランダムではありえない，というのがそのエッセンスであり，これは数学の形式論理体系における公理系についてもあてはまる事実である。

ランダム実数Ωのゲーム理論への応用は，このPrasadの仕事がおそらく最初であろう。他にもGilboa＝Schmeidler［9］などにKolmogorov Complexityへの言及があるが，実質的な応用はきわめて少ない。計算論のゲーム理論への応用自体がもともと少なく，しかも決定不能性を示すものがほとんどである．ただ，最近ではポジティヴな応用研究も少しずつ現れるようになってきた。たとえば，Anderlini＝Sabourian［2］やAnderlini［1］などの，戦略の摂動に計算可能性を課した均衡選択の理論，また，Howard［10］やNakayama［15］の，自分や血縁を認識するプレイヤーの存在や行動についての分析などである。

このPrasadの結果もナッシュ均衡のランダム性という決定不能性定理ではあるが，単なる不可能性定理ではなく，むしろ，新しい方向を示唆する研究であるといえる。それは，Chaitin自身が力説しているように，コンピュータを主要な武器とする「実験数学」の可能性である(4)。すでに，非線型力学でのカオス，複雑系や自己組織系，フラクタルなどの研究がコンピュータなしでは成立しないように，ランダム数やアルゴリズム的情報理論もコンピュータに立脚した研究分野である。実際，ChaitinはLISPというプログラミング言語によって，ゲーデルの不完全性定理やチューリングの停止問題の証明を行ったり，また，定理５に現れるディオファントス方程式を，２万個の未知数をもつ200ページに及ぶ方程式として作成している(5)。このような新しい科

（４） 実際，Experimental Mathematicsという専門誌がある

（５） Chaitin［7］

学の潮流は，ゲーム理論や経済学にも影響を及ぼさずにはいないはずである。ゲームの実験や限定合理性などについての精力的な研究を中心とする近年の実験経済学の隆盛が，その一例であることはいうまでもないであろう。

（経済学部教授）

REFERENCES

[1] L. Anderlini,"Communication, Computability and Common Interest Games," *Games and Economic Behavior* 27 (1999), 1-37.

[2] L. Anderlini and H. Sabourian, "Cooperation and Effective Computability," *Econometrica* 63 (1995), 1337-1369.

[3] G. Chaitin, "On the Length of Programs Computing Finite Binary Sequences," *Journal of the ACM* 13 (1966), 547-569.

[4] G. Chaitin, "A Theory of Program Size Formally Identical to Information Theory," *Journal of the ACM* 22 (1975), 329-340.

[5] G. Chaitin, "Algorithmic Information Theory," *Encyclopedia of Statistical Sciences* 1 (1982), 38-41

[6] G. Chaitin, "Incompleteness Theorems for Random Reals," *Advances in Applied Mathematics* 8 (1987), 119-146.

[7] G. Chaitin, *Algorithmic Information Theory* Cambridge University Press, 1987.

[8] M. Davis, H. Putnum and J. Robinson, "The Decision Problem for Exponential Diophantine Equations," *Annals of Mathematics* ser. 2, 74 (1961), 425-436.

[9] I. Gilboa and D.Schmeidler, "Case-Based Knowledge and Induction," (1996), mimeo.

[10] J. V. Howard, "Cooperation in the Prisoner's Dilemma," *Theory and Decision* 24 (1988), 203-213.

[11] J. P. Jones and Y. V. Matijasevic, "Exponential Diophantine Representation of Recursively Enumerable Sets," in *Proceedings of the Herbrand Symposium,Logic Colloquium '81*, J. Stern, ed, *Studies in Logic and the Foundation of Mathematics* 107, 159-177, Norrth-Holland, Amsterdam, 1982.

[12] J. P. Jones and Y. V. Matijasevic, "Register Machine Proof of the Theorem on Exponential Diophantine Representation of Enumerable Sets," *Journal of Symbolic Logic* 49 (1984), 818-829.

[13] A. N. Kolmogorov, "Three Approahes to the Quantitative Definition of Information," *Problems of Information Transmission* 1 (1965), 1-7.

[14] Y. V. Matijasevic, "Enumerable Sets are Diophantine," *Doklady Akademii Nauk SSSR* 191 (1970), 279-282.

[15] M. Nakayama, "Kinship Recognition and Self-Sacrifice in Prisoner's Dilemma," (1999), mimeo.

[16] 中山幹夫，"ゲームと戦略の計算可能性について，"三田学会雑誌91（1999），592-615.

[17] E. L. Post, "Recursively Enumerable Sets of Positive Integers and Their Decision Problems," *Bulletin of the American Mathematical Society* 50 (1944), 284-316.

[18] K. Prasad, "Computability and Randomness of Nash Equilibrium in Infinite Games," *Journal of Mathematical Economics* 20 (1991), 429-442.

[19] R. J. Solomonoff, "A Formal Theory of Inductive Inference," *Information and Control* 7 (1964), 1-22, also 224-254.