Title	マーシャル型効用関数と社会的無差別曲線
Sub Title	Marshallian utility function and social indifference curves
Author	大山, 道広
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1999
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.92, No.3 (1999. 10) ,p.543(87)- 559(103)
JaLC DOI	10.14991/001.19991001-0087
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19991001-0087

「三田学会雑誌」92巻3号（1999年10月）

マーシャル型効用関数と社会的無差別曲線

大　山　道　広*

1　はじめに

代表的消費者，社会的無差別曲線，さらには部分均衡の概念は，経済現象の説明や経済政策の効果分析に役立つ簡便な用具として広く用いられてきた。これらの用具が強い仮定に依存していることから，その使用に対して懐疑的な見解を披瀝する論者も多い。しかし，その意義は枝葉を切り落とした設定のもとで問題の本質を見きわめ，白日のもとにさらすところにある。ゲーム理論を応用した最近の経済分析は部分均衡モデルによるものが多く，ある意味でその重要性はますます高まっている。そこで得られた洞察がどれくらい一般的なものかについては，多数の消費者・生産者間の資源配分を考慮する一般均衡モデルによって別途再検討する必要があるとしても，部分均衡モデルや社会的無差別曲線の概念が当面の経済問題に対する第一次接近として，また多くの人々に理解可能な説明図式として有用であることは確かである。(1)

周知の通り，マーシャル（Marshall (1920)）は，貨幣の限界効用が一定であると仮定した上で，部分均衡モデルをさまざまな経済問題に適用した。マーシャルがこの仮定を実際にどのように解していたかははっきりしない。サムエルソン（Samuelson (1942)）は少なくとも2つの解釈があるとしてその含意を論じている。ひとつは所得の限界効用を一定とするもので，もうひとつは価値標準

＊　本論文の作成にあたって，川又邦雄，長名寛明教授（本塾）から貴重な助言をいただいた。神戸大学下村耕嗣教授のご尽力により旧稿を発表する機会を与えられ，多くの参会者から有益なコメントを頂戴した。また，本誌が依頼した匿名の評者から詳細にわたる批評をいただいた。最後に，慶應義塾学事振興資金から研究助成を受けたことを記し，あわせて謝意を表したい。

（1）　最近定評のあるマスコレル・ウィンストン・グリーンのミクロ経済学の教科書（Mas-Colell, Whinston and Green (1995)）は部分均衡理論の解説にかなりのページを割いている。これは部分均衡理論の再流行を反映するものといえるかもしれない。いうまでもないが，筆者は決して一般均衡論的な視点の重要性を否定するものではない。Ohyama（1999）では，応用的なミクロ経済分析における一般均衡論的なアプローチの復活をはかっている。

財の限界効用を一定とするものである。本稿では，価値標準財の限界効用を一定とする解釈を採る。[2] この解釈は，最近の応用ミクロ経済学の分析で多用されている。しかし，この仮定の下で，部分均衡分析だけでなく，代表的消費者や社会的無差別曲線の概念も明確に正当化されることは，一部の論者を除いては十分に認識されているとはいえない。長名（1990），川又（1991）はその例外であり，この仮定から社会的無差別曲線が導かれることを明らかにしている。[3] 本稿では，この仮定から代表的消費者や社会的無差別曲線がいかに導かれるかを示すだけでなく，これらの概念の意義と限界を初歩的な分析を用いて詳しく論じる。特に，先行文献（たとえば長名（1990），Mas-Colell, Whinston and Green（1995））で価値標準財の消費が負の値をとりうると仮定して分析を過度に単純化している点を改め，非負の値しか取りえないという境界条件の含意を明らかにする。

以下，第2節では，マーシャルの仮定のもとで，代表的消費者の効用関数が社会の成員である個々の消費者の効用関数からいかに合成されるかを詳述し，個々の消費者の効用関数が具体的に与えられる場合について例解する。第3節では，代表的消費者の効用関数から導かれる無差別曲線がシトフスキー（Scitovsky（1942））の社会的無差別曲線や効用可能性曲線と1対1で対応していることを明らかにする。最後に第4節では，マーシャルの仮定のもとでシトフスキーの社会的無差別曲線とバーグソン（Bergson(1938)）のそれが部分的に一致することを示し，さらには余剰概念による厚生分析が効用可能性曲線によるそれと同義であることを確認する。これらの結果はまったく新しい知見ではないとしても，少なくとも通常のテキストブックではほとんど述べられていないことであり，改めて指摘しておく価値があると信じる。

2　代表的消費者の効用関数

n 人の消費者が存在する社会を考える。簡単化のため，これらの消費者は財 x と「貨幣」y を消費するものとする。消費者 i の効用関数は

$$u_i(X_i,\ Y_i)=Y_i+v_i(X_i) \tag{1}$$

と表される。ただし，Y_i は消費者 i の財 y の消費量，X_i は財 x の消費量である。$v_i(X_i)$ は微分可能で，$v_i'>0, v_i''<0$ と仮定する。この形の効用関数は，関数 $v_i(X_i)$ が非線形であることから準

（2）　サムエルソン自身はこの解釈に疑義を述べている。サムエルソンは取り上げていないが，第3の解釈も考えられる。それによれば，貨幣とは分析の対象にしている以外のすべての財を含む合成財であり，当該財に対する支出が総支出に占める比重が微少である場合には，当該財の価格変化は他の市場にほとんど影響せず，その所得効果も微少であるとするものである。ヴィヴェス（Vives (1987)）はこの解釈にたってマーシャルの部分均衡分析を再解釈している。

（3）　これらの文献の脚注に記されているように，私自身も早くからこのことに気づいており，長名，川又両教授と議論したことがある。

線形（quasi-linear）と形容されることが多いが，ここでは貨幣の限界効用を一定と仮定して部分均衡分析を展開したマーシャルにちなんで，マーシャル型効用関数と呼ぶことにしよう。非線形部分 $v_i(X_i)$ は消費者ごとに異なっていてもよいことに注意しよう。各消費者は，市場で成立する財 x の「貨幣」価格 p をパラメトリックに所与として効用関数 $u_i(X_i, Y)$ を最大化するように行動するものとする。消費者 i の所得を I_i とすると，その予算制約条件は

$$Y_i + pX_i \leq I_i \tag{2}$$

と書ける。効用最大化の1階の条件から，内点解が存在するものとして，消費者 i の財 x, y の需要関数は

$$X_i = x_i(p) \tag{3}$$

$$Y_i = I_i - px_i(p) \tag{4}$$

と表される。マーシャル型効用関数の仮定から，財 x の需要関数は価格 p のみの関数である。社会全体の財 x の需要関数は

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i(p) = x(p) \tag{5}$$

となる。仮定によって，$x' < 0$ である。その逆関数を

$$p = \pi(X) \tag{6}$$

と書くことにする。この関数の積分を

$$v(X) = \int \pi(X) dX \tag{7}$$

と表す。これを用いて，新たな関数

$$U = Y + v(X) = u(X, Y) \tag{8}$$

を定義しよう。ここで，$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ である。社会全体の予算制約条件は

$$Y + pX \leq I \tag{9}$$

と表される。ただし，$I = \sum_{i=1}^{n} I_i$ である。あたかも社会に1人の「代表的消費者」が存在して，この関数を最大にするように財 x，y の社会全体としての需要量を決めているかのように考えることができる。その意味で，これは「代表的消費者の効用関数」（representative consumer's utility function）と呼びうるものである。もう少し厳密に言うと，次のようになる。

命題 1 （代表的消費者） すべての消費者がマーシャル型効用関数を持ち，各自の限界代替率が市場で与えられる相対価格に一致するように行動するものとすると，社会全体の財 x，y の需要量は，(8)で定義された代表的消費者の効用関数 $u(X, Y)$ を予算制約条件(9)のもとで X に関して最大化する値になる。つまり，

$$x(p) = \{X | v'(X) = p\}$$

$$y(p, I) = I - x(p)$$

である。[4]

証明　すべての消費者が財 x の価格 p を所与として効用を最大化するように需要量を決めているとすれば，内点解では

$$p = \pi(X)$$

となる。関数 $v(X)$ の定義によって，この p, X に対して

$$v' = p$$

という関係が成立する。$v'' = \pi' < 0$ であるから，この X は実際に与えられた p に対して関数 $u(X, Y)$ ないし $v(x)$ を最大化しているといえる。(証明終)

以下，個々の消費者の効用関数を特定化して，個別消費者の効用関数からいかに代表的消費者の効用関数が導かれるかを示す。簡単化のため，社会に 2 人の消費者が存在する場合を考える。[5]

例 1．非線形部分が 2 次関数のケース

消費者 $i(i=1, 2)$ のマーシャル型効用関数の非線形部分が 2 次関数で

$$v_i(X_i) = -\frac{1}{2}a_i X_i^2 + b_i X_i \tag{10}$$

と表されるものとする。各消費者が効用を財 x の価格 p を所与として効用を最大化するように行動するものとすると，財 x の需要関数は

$$X_i = -\frac{1}{a_i}p + \frac{b_i}{a_i} \tag{11}$$

と線形になる。これから

$$X = X_1 + X_2 = -\left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}\right)p + \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 a_2}$$

したがって，

$$p = -\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}X + \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 + a_2} \tag{12}$$

---

(4)　導出の仕方から明らかなように，代表的消費者の概念は，すべての消費者が所与の価格に限界代替率が等しくなるように需要量を決定すること，すなわち効用最大化の内点解が存在することを前提として定義されている。したがって，内点解が存在しない場合には，この概念は適用できない。第 3 節参照。

(5)　どちらの場合にも，消費者が n 人いる場合への拡張は表示が煩雑になるだけで，ほとんど自明であり，ここでは省略する。

を得る。これを積分することにより，代表的消費者の効用関数のうち非線形部分は

$$v(X)=-\frac{1}{2}\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}X^2+\frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_1+a_2}X \tag{13}$$

となることがわかる。ただし，積分定数をゼロとおいて $v(0)=0$ となるようにしてある。こうして，すべての消費者がマーシャル型効用関数を持ち，その非線形部分が2次関数であれば，代表的的消費者の効用関数もそれと同型になる。

例2．非線形部分が指数関数のケース

次に，消費者 i の効用関数の非線形部分が指数関数で

$$v_i(X)=a_iX_i^{\alpha_i} \tag{14}$$

によって与えられる場合についてみよう。前と同様の手続きによって，社会全体の需要関数は

$$X=X_1+X_2=\left(\frac{p}{a_1\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1-1}}+\left(\frac{p}{a_2\alpha_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_2-1}} \tag{15}$$

となる。ここで，明確な解を得るために，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ という特殊ケースに限定すると，社会全体の逆需要関数は

$$p=\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\alpha X^{\alpha-1} \tag{16}$$

と求められる。前と同様にして，代表的消費者の効用関数の非線形部分は

$$v(X)=\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}X^{\alpha} \tag{17}$$

となることが知られる。ここでも，代表的消費者の効用関数は，個別消費者のそれと同型になる。

3　シトフスキー無差別曲線

ところで，代表的消費者の効用関数から導かれる無差別曲線（social indifference curves）はいかなる意味を持っているであろうか。明敏な読者はすぐ，経済理論の初歩的な分析で頻用される社会的無差別曲線の概念を連想するであろう。それは，あたかも社会に一人の巨大な消費者が存在して，社会全体の消費集合の上で定義された効用関数を持ち，その最大化を目指して行動していると仮定するに等しい。この仮定の下では，社会的無差別曲線は，社会的経済厚生だけでなく社会的需要行動を幾何学的に分析することができる。しかし，サムエルソン（Samuelson(1956)）が詳細に論じたように，社会的無差別曲線の仮定は一般に妥当なものであるとはいえない。個々の消費者の嗜好は多様であり，所得分配が変化すれば社会全体の所得が不変であっても社会の需要行動は変わると考えられるからである。

シトフスキー（1942）は，社会の他の成員の効用を一定の水準に維持しながらある特定の個人の効用を最大にするように消費計画が立てられるという想定のもとで社会的無差別曲線を導き，関税政策の分析に用いた。シトフスキー無差別曲線は社会的経済厚生の指標としては一定の意味を持つが，一般に社会的需要行動の指標としては認めがたい。それは人々の間の所得分配に依存して一義的に定まらないからである。このことは，シトフスキー 無差別曲線が「相互に交わる」とか「財空間の各点で様々な傾きを持つ」と言われる。このことを裏返していえば，シトフスキー無差別曲線が一義的に定まる場合には，それは社会的需要行動の指標として使えるわけである。サムエルソンは，所得分配の如何にかかわらずシトフスキー無差別曲線が一義的に定まる事例として，すべての消費者が同一の「相似的」(homothetic) な効用関数を持つケースをあげている。本節では，すべての消費者がマーシャル型効用関数を持つ場合にも，緩やかな所得再分配が行われるという前提のもとでシトフスキー無差別曲線が一義的に決まり，代表的消費者の効用関数から導かれる無差別曲線に一致することを示す。この場合，異なる消費者の効用関数はマーシャル型であれば，互いに異なっていてもよい。また，同じ仮定の下で，それが適当に定義された効用可能性曲線 (utility possibility curve) と一義的な対応関係を持つことを明らかにする。

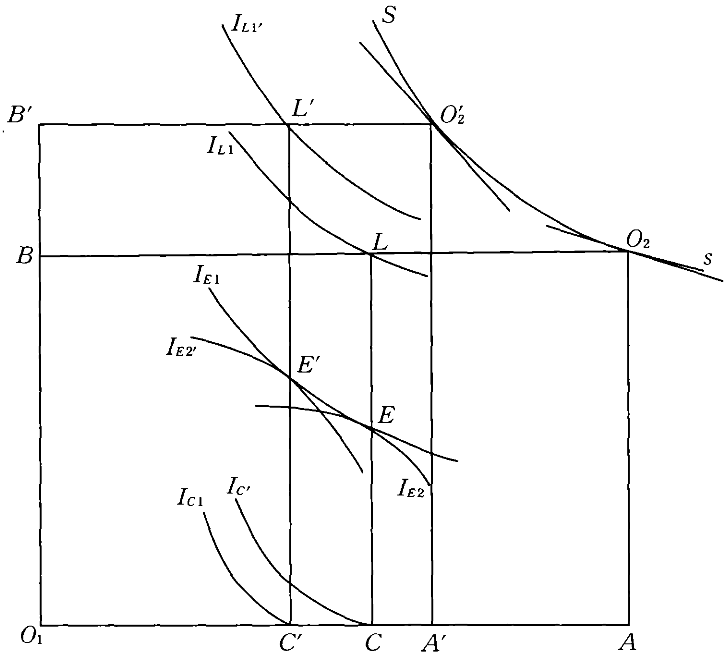
簡単化のため，２人の消費者１，２からなる社会を考える。(6) とりあえず，社会全体の財 x，y の消費可能量が与えられているものとする。図１のボックス・ダイアグラムの横幅は財 x の消費可能量を，縦幅は財 y のそれを示している。消費者１の消費量は原点 O_1 から，消費者２のそれは原点 O_2 から測られている。消費者がマーシャル型効用関数を持つとすれば，その無差別曲線は任意の垂直線上のすべての点で等しい傾きを持つ。(7) 一般に，パレート最適な配分の軌跡は契約線 (contract curve) と呼ばれる。現在の想定のもとでは，それは垂直線 CL 上の点だけでなく，線分 O_1C，LO_2 を含む。ここでは，両消費者の無差別曲線が互いに接する点の集合である CL に注目しよう。その上の点 E で相接する I_{E1}，I_{E2} は消費者１，２の無差別曲線の例である。CL 上のすべての点で，両消費者の無差別曲線の共通接線の傾きは等しくなっている。以下では，両消費者の限界代替率が均等化する配分の集合を狭義の契約集合，もしくは狭義の契約線と呼ぶことにしよう。

狭義の契約線 CL 上の E 点を出発点として，シトフスキー無差別曲線を導いてみよう。消費者１の原点と無差別曲線 I_{E1} を固定して，消費者２の無差別曲線 I_{E2} がそれに接しながらスライドするように，消費者２の原点を左上方，または右下方にずらしていく。このとき，消費者２の原点が描く軌跡 S_S が（O_1 を原点として定義される）シトフスキー無差別曲線である。図１の O_2' はその上

(6) これは図による解明を容易にするための便宜であり，以下の分析は n 人の消費者が存在するケースに拡張することができる。

(7) 消費者 i の効用関数が(1)で与えられるとき，限界代替率は $v_i'(X_i)$ に等しく，X_i が一定なら Y_i の値に関わりなく一定となる。

図1　シトフスキーの社会的無差別曲線



の一つの点である。この曲線は，2人の消費者の効用水準を不変に保つために社会全体として最小限必要とされる両財の総量の組み合わせを示している。作図から明らかなように，シトフスキー無差別曲線の O_2 ないし O_2' 点での勾配は，それぞれ対応する E，E' での両消費者の無差別曲線の共通接線の勾配に等しい。一般には，この無差別曲線は契約線上のどの点を出発点とするかによって，一義的には定まらない。ところが，すべての消費者がマーシャル型効用関数を持つという現在の仮定のもとでは，この共通接線の勾配は契約線 CL，$C'L'$ のどの点でも同一である。したがって，両消費者の消費点が CL，$C'L'$ 上のどこにあっても，社会的無差別曲線は同一の勾配を持つ。しかし，シトフスキー無差別曲線が一義的に確定するのは，すべての消費者の限界代替率が一致している場合，すなわち消費点がCL，$C'L'$ に例示されるような狭義の契約線上にある場合に限られることに注意しよう。

命題2　（シトフスキー無差別曲線）すべての消費者がマーシャル型効用関数を持ち，狭義の契約線上で消費するものとすれば，シトフスキー無差別曲線は一義的に確定し，代表的消費者の効用関数から導かれる無差別曲線と一致する。

証明　命題の条件のもとで，シトフスキー無差別曲線が一義的に確定することは図解から自明である。すべての消費者が所与の予算線のもとで価格に限界代替率を一致させるように各自の需要量を

決定するするとき，社会全体の財 X，Y の需要量は社会全体の予算線とシトフスキー無差別曲線が接する点で与えられる。命題1から，シトフスキー無差別曲線は代表的消費者のそれに一致するといえる。(証明終)

ここで，すべての消費者が同一の効用関数を持つ必要はないことを再び強調しておきたい。すべての消費者が同次的な効用関数を持つ場合には，シトフスキー無差別曲線が一義的に確定するためにはその効用関数が同一のものでなければならないという追加的な条件が必要とされることと対照されるべき特徴である。しかし，その代償もある。シトフスキー無差別曲線を市場均衡の分析に応用する際には，両消費者が狭義の契約線上で消費するという条件に注意しよう。図2において，たとえば線分 O_1C 上の点 D はパレート最適点であり，財 x の市場価格がその点での消費者2の限界代替率（無差別曲線 ID_2 の傾き）に等しく与えられるとき，競争均衡点となる。しかし，この競争均衡価格は図1で求めたシトフスキー無差別曲線の O_2 点における傾きより急になっている。したがって，そこでは社会全体の財 X，Y の需要量が社会全体の予算線とそのシトフスキー無差別曲線が接する点で与えられるとはもはやいえない。これから，シトフスキー無差別曲線を市場均衡の表示や比較静学のために用いることができるのは，財 x の所与の価格に対して初期保有点が適当に与えられる場合だけであることがわかる。財 x の市場均衡価格があらかじめどこに決まるかを予定するわけにはいかないから，特定の初期保有点が一般に適当であるとはいえない。社会全体の財 x，y の消費可能量と財 x の価格が任意に与えられるものとすると，市場均衡が狭義の契約線上で成立するように，必要に応じて価値標準財の初期保有量が再分配されなければならない。(8)

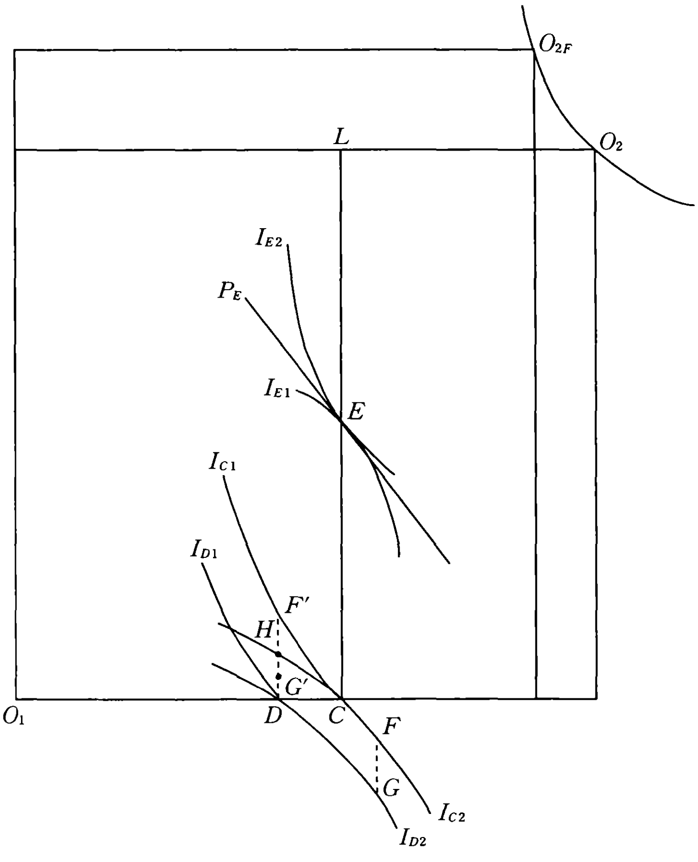
マーシャル型効用関数の仮定の下では，適当に所得再分配が行われるという条件付きではあるが，シトフスキーの社会的無差別曲線が一義的に定まり，社会的需要行動の分析用具として使えることがわかった。それでは，その社会的厚生指標としての意義について同じ仮定の下で何が言えるであろうか。任意のシトフスキー無差別曲線上の各点に対応する効用可能性曲線を導き，それらの上側の包絡線，すなわち所与のシトフスキー無差別曲線上のすべての点の集合に対応する効用可能性曲線を考え，後者をシトフスキー効用可能性曲線と呼ぶことにしよう。明らかに，シトフスキー無差別曲線とシトフスキー効用可能性曲線は1対1で対応しており，前者による社会的経済厚生の評価は後者によるそれと一致する。したがって，シトフスキー無差別曲線の社会的厚生指標としての意義を解明することは，シトフスキー効用可能性曲線のそれを解明することと同義である。

---

(8) 次節でとりあげるバーグソンの社会的無差別曲線は，社会的最適を達成するために両消費者が契約線上の特定の点で消費できるように初期保有の的確な再分配が行われることを前提としている。それにくらべれば，両消費者が契約線上の任意の点で消費できるようにするための再分配は遙かに自由度が高く緩やかなものである。

図1の原点 O_1 から見た O_2, O_2' は一つのシトフスキー無差別曲線 S_S 上の2点であり，それぞれに対応して両消費者へのパレート最適な配分のもとでの効用の組合せ，すなわち効用可能性曲線を考えることができる。それらは狭義の契約線 CL, $C'L'$ だけでなく，両消費者の限界代替率が一致しない O_1C, LO_2, あるいは O_1C', $L'O_2$ 上の効用の組合せも含んでいる。これらの効用可能性曲線はいかなる関係にあるであろうか。ここで，両消費者の限界代替率が一致しない O_1C, LO_2, あるいは O_1C', $L'O_2$ 上の諸点での効用可能性について考えよう。図2において点 O_2 に対応するボックスダイアグラムで両消費者の限界代替率が等しくないパレート最適点，たとえば点 D のような点に注目しよう。この点での両消費者の効用の組合せよりパレートの意味で優れた組合せが，O_2 点を通るシトフスキー無差別曲線の他の点で実現可能であることを示そう。そのため，無差別曲線 I_{C2}, I_{C1} 上で無差別曲線 I_{D1} の点 D での傾きと同じ傾きを持つ点をそれぞれ F, F' とし，点 F からおろした垂直線が点 D を通る無差別曲線 I_{D2} と交わる点を G, 点 F' からおろした垂直線が点 C を通る無差別曲線 I_{C2} と交わる点を H とする。マーシャル型効用関数の仮定から，

図2　消費者1が財 y を消費しないケース

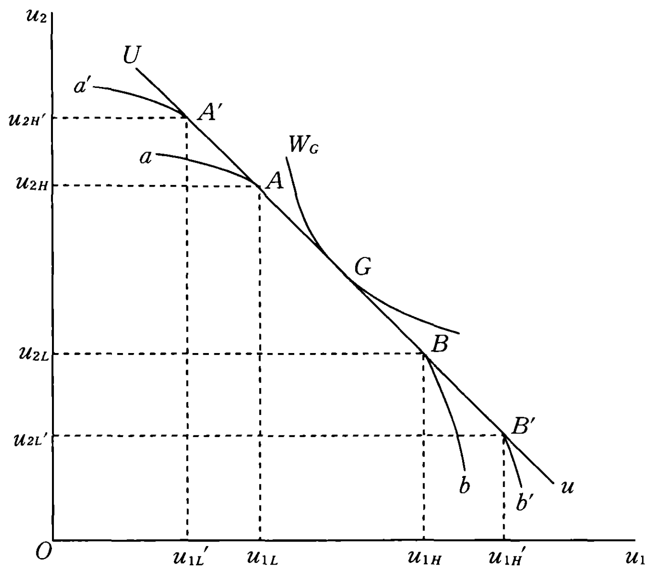


線分 FG, DH の長さは等しくなっている。消費者1の原点を固定して，消費者2の原点を無差別曲線 I_{C2} が I_{C1} に接するようにしながら左上方にスライドさせ，ちょうど点 F が点 F' と重なるところで止め，その点を O_{F2} とする。このとき，無差別曲線 I_{D2} 上の点 G は F' からおろした垂直線上で FG と同じ距離にある点 G' に移動しているはずである。点 G' は明らかに点 D の上方にある。このことから，点 O_1 を原点として社会全体の消費可能量が点 O_{2F} に与えられた場合，線分 DG' 上の境界点をのぞく各点での消費者1，2の効用は，同じく社会全体の消費可能量が点 O_2 に与えられた場合の点 D よりも高くなっている。

図1に戻って，シトフスキー無差別曲線上の O_2 点から O_2' に移るときに狭義の契約線上で達成可能な各消費者の効用の上限と下限がいかに変化するか考えてみよう。社会全体の両財の消費可能量が点 O_2 に与えられるとき，消費者1が狭義の契約線上で実現可能な効用の上限は点 L を通る無差別曲線 I_{L1} で，その下限は点 C を通る無差別曲線 I_{C1} で示される。これに対して，社会全体の両財の消費可能量が点 O_2' に与えられるとき，消費者1が狭義の契約線上で実現可能な効用の上限は点 L' を通る無差別曲線 $I_{L1'}$ で，その下限は点 C' を通る無差別曲線 $I_{C1'}$ で示される。まず，点 C, C' で消費者1は財 x のみを消費しており，その消費量は点 C' で点 C より少ないことから，I'_{C1} が I_{C1} よりも下方にあること，換言すれば消費者1が点 O_2' に対応して狭義の契約線上で享受できる効用の下限が点 O_2 に対応して享受できるそれより低いことは明らかである。次に，点 O_2, O_2' は同一のシトフスキー無差別曲線上にあるから，点 O_2 から点 O_2' に移るときに消費者1の効用が減少すれば，消費者2の効用は増加しなければならない。したがって，消費者2が点 O_2' に対応して狭義の契約線上で享受できる効用の上限は，点 O_2 に対応して享受できるそれよりも高いはずである。消費者1，2を入れ替えても同様な推論が成り立つので，同一のシトフスキー無差別曲線上で財 y の量を増やし，財 x の量を減らすと，各消費者が狭義の契約線上で享受できる効用の上限が上がり，下限が下がると結論することができる。

図3は以上の考察をまとめて示したものである。右下がりの曲線 $aABb$, $a'A'B'b'$ は，それぞれ図1のシトフスキー無差別曲線 S_S 上の点 O_2, O_2' に対応する効用可能性曲線である。そのうち，AB, $A'B'$ の部分は狭義の契約線上で実現可能な両消費者の効用を表している。狭義の契約線上では価値標準財が両消費者の間で移転されるとき，それぞれの効用は1対1で増減する。したがって，狭義の契約曲線に対応するシトフスキー効用可能曲線の部分はマイナス1の勾配を持つ直線となる。これに対して，aA, $a'A$ の部分は消費者1が財 x だけを消費している場合について，また Bb, $B'b'$ の部分は消費者2が財1だけを消費している場合について，両消費者の効用可能性を示している。一つのシトフスキー無差別曲線上のすべての点に対応する同様な効用可能性曲線を描いたとき，曲線 U_u はその上側の包絡線であると見ることもできる。これをシトフスキー効用可能性曲線と呼ぶことにしよう。

図３　シトフスキー効用可能性曲線



命題３　（シトフスキー効用可能性曲線）　すべての消費者がマーシャル型効用関数を持つ場合，互いに交わらないシトフスキー効用可能性曲線が存在する。シトフスキー無差別曲線に沿って財 x の消費量を減らし，財 y の消費量を増やしていくと，狭義の契約曲線上で実現可能な効用の組合せは拡大し，ついにはシトフスキー効用可能性曲線に近づく。

証明　命題２から，両消費者の限界代替率が一致するという前提のもとで，シトフスキー無差別曲線が一義的に確定する。ひとつのシトフスキー無差別曲線上で財 x の消費量が少なく財 y の消費量が多い点ほど，狭義の契約曲線上で実現可能な効用の組合せの範囲が広くなる。（証明終）

この命題はシトフスキー無差別曲線による順序づけの意義と限界を明らかにするものである。ある無差別曲線上の任意の点で実現可能な両消費者の効用の組合せに対して，より上方に位置する任意の無差別曲線上にそれをパレートの意味で凌駕するような効用の組合せを実現する点が存在するといえ，またより下方にあるいかなる無差別曲線上にもそれを凌駕する効用の組合せを実現する点は存在しないといえる。他方，より上方にある無差別曲線上の任意の点で実現可能な効用の組合せがそれを凌駕するとも，より下方にある無差別曲線上の任意の点で実現可能な効用の組合せがそれによって凌駕されるともいえない。しかし，財 x の消費量が財 y のそれにくらべて無視可能なほど僅少であれば，狭義の契約曲線上で実現可能な効用の組合せはほぼシトフスキー効用可能性曲線と一致すると見てよい。したがって，この限界はあまり重要ではなくなる。マーシャルは，部分均衡分析の妥当性は問題とする財に対する支出が「貨幣」によって代表される他の財への支出にくら

べて無視可能なほど僅少であるという条件を重視した。[9] ここでは，財 x の財 y に対する消費比率が微少であれば，シトフスキー無差別曲線とシトフスキー効用可能性曲線をほぼ同視しうるという意味で，マーシャルの条件が重要であることを確認しておきたい。[10] マーシャル型効用関数と部分均衡分析の関連については，次節でより詳しく論じる。

4　バーグソン無差別曲線と余剰分析

シトフスキーの社会的無差別曲線とよく対比されるものにバーグソンの社会的無差別曲線がある。バーグソンの社会的厚生関数（social welfare function）は，社会の成員たる個別消費者の効用の関数として，消費者が2人の場合には

$$W=w(u_1, u_2) \tag{18}$$

と書かれる。この関数は2回連続微分可能で，正の偏微係数を持つとする。[11] 財 x，y の任意の消費可能量に対して，それらをバーグソンの社会的厚生関数を最大にするように消費者間に配分する問題，すなわち

$$\sum_{i=1}^{2} X_i \leq X$$

$$\sum_{i=1}^{2} Y_i \leq Y$$

の制約のもとで $w(u_1(X_1, Y_1), u_2(X_2, Y_2))$ を最大にするように $X_i, Y_i (i=1, 2)$ を決定する問題を考えよう。以下では，この問題に対する解が一義的に存在すると仮定する。このとき，関数 $w(\cdot)$ の最大値は明らかに X, Y の関数となり，

$$B=b(X, Y) \tag{19}$$

と書くことができる。バーグソン無差別曲線は，この関数 $b(X, Y)$ の $X-Y$ 平面への射影である。それはまた，関数 $w(u_1, u_n)$ の値を一定に保つようなすべての u_1, u_n の組合せに対応するシトフスキー無差別曲線の下方の包絡線と見ることもできる。一般に，これらバーグソン無差別曲線とシトフスキー無差別曲線は一致しないが，シトフスキー無差別曲線が一義的に確定する場合には，少なくとも部分的に一致するといえる。一般に，両者が一致するのは財 y の消費量が財 x のそれにく

(9)　すでに指摘したように，Vives (1987) はこの点を重視してマーシャルの部分均衡分析に異なった解釈を与えている。

(10)　もちろん，財 x の財 y に対する消費比率が低いからといって必ずしも財 x に対する支出割合が低いということにはならない。そうなるためには，財 x に対する需要が価格弾力的であることが必要である。

(11)　ここでは，このような関数が適切な前提のもとで存在するかどうか，あるいは何らかの前提のもとでいかにして導かれるかについては問わない。極端なケースとして，これは独裁者の主観的な評価関数であってもよい。

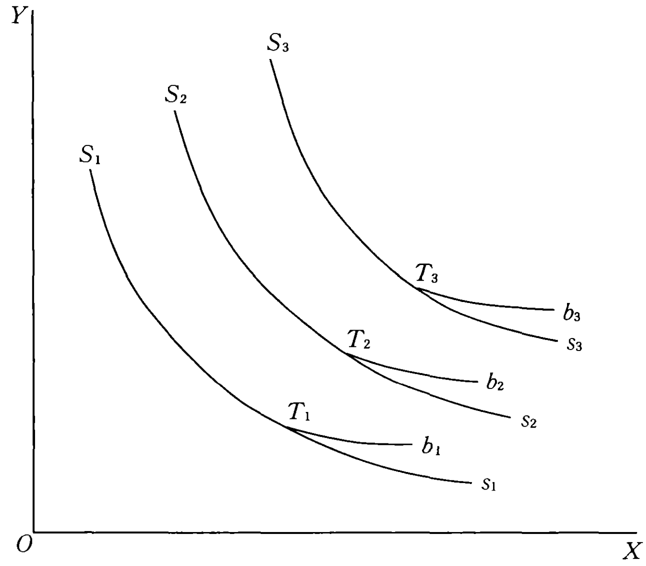
らべて十分に多い場合である。

図3の W_G は，消費者が2人の場合のバーグソンの社会的厚生関数の効用平面への射影の一つであり，点 G でシトフスキー効用可能性曲線と接している。これは，点 G がこの効用可能性曲線上で最適な点であることを表している。したがって，それに対応するシトフスキー無差別曲線上で点 G を実現するようなすべての点は無差別であり，同一のバーグソン無差別曲線上の点でもある。図2で考察されたシトフスキー無差別曲線 S_S を例にとれば，少なくとも点 O_2 より左上方の点はすべて同一のバーグソン無差別曲線上にある。しかし，シトフスキー無差別曲線 S_S 上で点 O_2 より右下方に移動していくと，つまり財 x の量を増やし財 y の量をへらしていくと，狭義の契約線上で実現可能な効用可能性の範囲は狭まり，ついには点 G を実現できなくなる点に到達するかもしれない。その点からさらに右下方では，シトフスキー無差別曲線 S_S はこれまで一致していたバーグソン無差別曲線から乖離する。なぜなら，そこでは点 G での社会的厚生を維持するためには明らかにより多くの財が必要になるからである。

命題4　（バーグソン無差別曲線）すべての消費者がマーシャル型効用関数を持つ場合，バーグソン無差別曲線はシトフスキー無差別曲線と少なくとも財 x の消費量が財 y のそれにくらべて十分に少ない範囲では一致する。

図4はシトフスキー無差別曲線とバーグソン無差別曲線の関係を例示したものである。S_1s_1,

図4　シトフスキーとバーグソンの無差別曲線



S_2s_2, S_3s_3 はいずれもシトフスキー無差別曲線である。そのうち，S_1T_1, S_2T_2, S_3T_3 の部分はそれぞれ同一のバーグソン無差別曲線と重なっている。しかし，それより右下方では，S_1T_1, S_2T_2, S_3T_3 に対応するバーグソン無差別曲線は上方にそれ，点線 T_1b_1, T_2b_2, T_3b_3 よって与えられる。

部分均衡分析では，特定の財の消費から得られる消費者の利益を表す指標として消費者余剰の概念が用いられる。よく知られているように，マーシャル型効用関数を持つ個別消費者に関する限り，これは問題なく正当化できる。消費者余剰は，その財を消費することによる消費者の効用の増分に正確に対応するからである。この概念は，しばしば社会全体に拡張される。つまり，社会のすべての成員の消費者余剰の合計（社会的余剰）が特定の財の消費による社会全体の利益を表す指標として用いられることが多い。このような拡張は「平等主義的な」個人間効用比較を前提とするものとして批判されることがある。この批判は必ずしも正しくない。バーグソンの社会的厚生関数に代表されるような，所得分配のあり方を考慮した総合的な経済厚生の判断は，明らかに効用の個人間比較を前提としている。これに対して，社会的余剰による社会的経済状態の順序づけは必ずしもそれを前提とするものではない。むしろ逆に，所得分配に関する価値判断をとりあえず保留し，所得分配の如何に関わらず成立する社会的経済状態の順序づけに専念するものと解釈することもできる。代表的消費者の概念を用いて，余剰分析に関するこれらの相反する見解の根拠について考えてみたい。

社会全体としての財 y の賦存量が所与で，財 y の単位で表した，財 x の社会全体の費用関数が

$$C=c(X) \tag{20}$$

で与えられる単純なモデルを想定する。ここで，費用関数 $c(X)$ は，X 単位の財 x を生産するために社会全体として最小限必要な財 y の量を与える関数である。財 y は一定期間中の余暇（leisure）と解釈するのが最も自然である。個々の消費者は，1日あたりに24時間から生存のために最小限必要な時間を除いた「利用可能な時間」を保有している。利用可能な時間1単位はそのまま余暇1単位に変換でき，また他の財の生産に労働サービスとして用いられる。したがって，余暇（あるいは労働）を価値標準財とすれば，財 y の価格設定やその生産にともなう利潤の発生，その処分といった問題を排除することができるからである。[12]

命題 5 （社会的余剰）すべての消費者が価格需要者として行動するものとすると，所与の価格のもとでの代表的消費者の効用は，財 x の消費者余剰と生産者余剰（財 x の生産から得られる社会全体

---

(12) これに対して，マーシャルの「貨幣」は，他の諸財をひとまとめにした合成財と解釈すべきとする見解もある。たとえば，長名（1990），Mas-Colell, Whinston and Green (1995) 参照。Vives (1987) が明確にしているように，財 x の支出シェアが小さければ，その価格変化の所得効果も微少であるという推論は成り立つ。しかし，財 x の支出シェアが小さければ，その限界効用が不変になるとはいえない。この解釈はマーシャル型効用関数の仮定を正当化するものとは思われない。

としての利益）の和，すなわち社会的余剰に等しくなる。

証明　社会全体としての予算制約は

$$Y+pX=\bar{Y}+pX-C$$

と表される。ただし，$\bar{Y}$ は財 y の所与の消費可能量である。この関係を用いると，代表的消費者の効用は

$$U=Y+v(X)=\bar{Y}+[\int_0^X v'(Z)dZ-pX]+[pX-\int_0^X c'(X)dX-c(0)]$$

と書き換えられる。ただし，$v(0)=0$ とする。最右辺の中括弧にくくられた第2項は財 x を X 単位消費することによって得られる消費者余剰，同じく中括弧にくくられた第3項は生産者余剰を表している。[(13)]（証明終）

これから，社会的余剰は代表的消費者の効用と事実上同じ意味を持っていることがわかる。命題2，3で明確にしたように，代表的消費者の効用関数 $Y+v(X)$ による消費の組合せ (X, Y) の順序づけは，シトフスキー無差別曲線，あるいは効用可能性曲線による順序づけと同じことになる。社会的余剰は異なる社会的経済状態の順序づけに用いられるが，それは異なる消費者の余剰を同じウェイトで評価して加算しているから効用の個人間比較を含むと解釈する必要はない。たとえば，財 Z の消費に対する課税は社会的余剰を減らすことが知られている。これは，課税後にはすべての消費者の効用を課税前より高めることができず，少なくとも一人の効用を低めなければならないことを意味するものと解釈できる。このような立場からは，社会的余剰による異なる経済状況の順序づけは，所得分配に関する判断から自由なパレート基準による順序づけであるといえる。

しかし，社会的余剰が異なる消費者の余剰を同じウエイトで評価して加算していることは事実であり，その意味で「平等主義的な」効用個人間比較にくみしているしているという見方も間違いとはいえない。すでに述べたように，シトフスキー無差別曲線とバーグソン無差別曲線は一般に完全には一致しない。しかし，すべての消費者が同一のマーシャル型効用関数を持ち，社会的厚生関数が「平等主義的」である場合には，両者は完全に一致する。[(14)] シトフスキー無差別曲線，ひいては社会的余剰による社会的経済状態の順序づけがバーグソンの社会的厚生関数の観点から完全に正当化

(13)　最右辺第1項の $\bar{Y}$ や第3項に含まれる固定費用 $c(0)$ は定数であるから，分析目的によっては無視してもかまわないし，実際に無視されることが多い。

(14)　この場合，図3の効用可能性曲線 U_u は原点から引いた45度線に対して完全に対称的となり，社会的最適点 G は U_u とこの45度線の交点となる。U_u に対応するシトフスキー無差別曲線に沿って右下方に移動していくと，狭義の契約線に対応する効用可能性軌跡の幅は狭まっていくが，最適点 G はつねにその中に含まれている。

されるのこの場合だけである。

5　終わりに

以上，すべての消費者がマーシャル型効用関数を持つという仮定のもとで，代表的消費者の概念が一定の意味を持つことを明らかにした。諸財に対する社会全体の需要はあたかも代表的消費者の効用最大化行動から導かれるかのように解釈することができる。代表的消費者の効用関数から得られる無差別曲線はシトフスキー無差別曲線に一致し，一義的に確定する。そして，代表的個人の効用関数，シトフスキー無差別曲線，効用可能性曲線，さらには社会的余剰は，異なる社会的経済状態の順序づけの基準として同等になる。本稿では，単純化のために価値標準財 y のほかに1種類の財 x が存在するものとしたが，現在の分析結果は n 種類の財 $x_1, x_2, \dots, x_n$ が存在する場合に容易に拡張することができる。なお，命題5をのぞく本稿の諸命題はすべての消費者が同一の同次的な効用関数を持つ場合にも妥当する。このことはすでによく知られており，ここで詳述する必要はあるまい。

ところで，マーシャル型効用関数の仮定は非現実的であるという批判がある。たとえば，マーシャル型効用関数は，家計の支出に占める食費の割合が所得の増加とともに低下するというエンゲル法則と整合的でないという見解である。相対価格を一定として所得が増加すれば，マーシャル型効用関数を持つ消費者は価値標準財 y の消費を増やすだけで，他の財の消費を一定に保つからである[(15)]。しかし，すでにのべたように，財 y はすべての消費者に与えられた余暇と解釈するのが自然である。この解釈に立つとき，過去の実証研究はこの仮定の非現実性を確立したといえるであろうか。たとえば，この仮定がエンゲル法則に反するという主張については，次のように答えることができる。この仮定のもとでは，経済成長にともなう賃金所得の増加は財 x の財 y に対する相対価格の低下という形で実現する。なぜなら，消費者が自由に使うことのできる時間はいつでも一日について最大24時間しかなく，経済成長によってあまり影響を受けないからである。複数の非価値標準財が存在し，その一部が食品であるとしよう。すべての非価値標準財の価格が比例的に低下するものとすると，食品に対する需要の価格弾力性が他の財に比べて小さければ，食費が家計に占める割合が低下することは十分に可能である。同様に，所得が増加すると，労働供給が減少し余暇のみならず他の諸財に対する需要が増加する傾向があるという認識もマーシャル型効用関数の仮定を粉砕するものではない。非価値標準財に対する需要の価格弾力性が平均的に1より小さければ，その価格の低下によって余暇に対する需要はかえって増加するからである。マーシャル型効用関数が特

(15)　たとえば，Samuelson (1942) は，この仮定がいかに馬鹿げたものかはあらゆる実証研究から明らかだとしている。

殊なものであることは否定できないが，必ずしも非現実的とはいえない。

(経済学部教授)

引 用 文 献

川又邦雄 (1991)『市場機構と経済厚生』創文社

長名寛明 (1991)「社会的無差別曲線の基礎」『三田学会雑誌』第82巻特別号-Ⅰ，48-70.

Bergson, A. (1938) "A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 52, pp. 310-334.

Marshall, A. (1890) *Principles of Economics*, London, Macmillan. 馬場啓之介訳『経済学原理』東洋経済新報社，1965-67.

Mas-Colell, A., M. D. Whinston and J. R. Green (1995), *Microeconomic Theory*, Oxford : Oxford Unversity Press.

Ohyama, M. "Market, Trade and Welfare", *Japanese Economic Review*, Vol. 50, pp. 1-24.

Samuelson, P. A. (1942) "Constancy of the Marginal Utility of Income," in O. R. Lange et al (eds.), *Studies in Mathematical Economics and Econometrics, in Memory of Henry Schultz*, Chicago : Chicago University Press, pp. 75-91.

Samuelson, P. A. (1956) "Social Indifference Curves", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 70, pp. 1-22.

Scitovsky, T. (1942), "A Reconsideration of the Theory of Tariffs", *Review of Economic Studies*, Vol. 9. pp. 89-110.

Vives, X. (1987), "A Marshallian Theory of Consumer Surplus and Downward Sloping Demand Curve", *Review of Economic Studies*, Vol. 54, pp. 87-103.