Title	無限期間線形計画と経済動学におけるカオス解
Sub Title	Chaotic solutions in infinite-time horizon linear programming and economic dynamics
Author	西村, 和雄 矢野, 誠 鈴木, 隆徳
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1999
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.92, No.3 (1999. 10) ,p.523(67)- 534(78)
JaLC DOI	10.14991/001.19991001-0067
Abstract	
Notes	小特集：経済の数理解析
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19991001-0067

「三田学会雑誌」92巻3号（1999年10月）

無限期間線形計画と経済動学におけるカオス解*

西村和雄
矢野誠
訳 鈴木隆徳

1.

Nishimura・Yano（1996）において，カオスが動学的線形計画（LP）問題の解としてあらわれることが示された。その結果はNishimura・Yano（1995）での結論である二部門モデルにおけるカオス的最適資本蓄積の可能性と密接に関連している。この研究ではそれらの結論を概観し基本的な関係を解説することにする。

Deneckere・Pelikan（1986）とBoldrin・Montrucchio（1986）において，将来収益（将来効用）が相当大きく割引かれる（厳密には99%程度）という仮定の下での離散時間動学的最適化モデルに対するカオス解の可能性が示された。収益が生じると予想される将来が遠ければ遠いほど，その収益は大きく割引かれていくことになる。Deneckere・PelikanとBoldrin・Montrucchioのモデルは，1期間がかなり長期にとられているのであろうと必然的に解釈される。（普通の経済環境のもとであれば99%の割引は短くとも数十年を1期間と考えることになろう。）

そのような枠組でのカオス動学では状態変数はとてもゆっくりと変動することになる。したがって，Deneckere・PelikanとBoldrin・Montrucchioの研究以来，将来収益を任意に小さく割引くモデルにおいてもカオス的最適解が発生するのかどうかという重要な問題が残された。

Nishimura・Yano（1995・1996）の線形経済モデルが，たとえ将来収益を任意に小さく割引いてもカオス解が生じうることを明らかにしており，この疑問に対する明確な答を導くのに有用である。

---

* この論文は，*Advances in Mathematical Economics*, volume 1, pp. 115-126 Springer-Verlag, 1999に英文で掲載されたものを出版社の許可を得て日本語訳したものです。原題“Chaotic solutions in infinite-time horizon linear programming and economic dynamics”。

この研究ではその枠組でわかった特徴を概観し，未解決として残っているいくつかの問題を提示する。

以下，第 2 節で数理計画法の観点からこの研究の基本的な動機を説明し，第 3 節で LP 問題を定式化する。第 4 節では結論を定理の形で提示し（証明は別稿にある），第 5 節でそれを Nishimura・Yano（1995）の二部門モデルにおいて解釈し，最後第 6 節においてまとめとして将来の研究の方向性に関するコメントを付す。

2.

時間の構造を加えることで動的計画法が標準的な線形計画法（LP）の枠組で扱えるようになることはよく知られてきた。例えば Dorfman・Samuelson・Solow（1958）の古典的な書物においても次のような LP 問題が考えられている。

$$\left\{\begin{array}{l} \max\limits_{(x_1,\cdots,x_T)\geq 0} \quad \sum_{t=1}^{T} p_t' x_t \\ \text{s.t.} \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -B_1 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -B_2 & A_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -B_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & A_T \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -B_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_T \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} B_1 x' + d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \vdots \\ -A_{T+1} x'' + d_T \end{bmatrix} \right. \end{array}\right. \tag{2.1}$$

ここで t は時間の期間であり，x_t は t 期の経済活動を示すベクトルであると考えられる。t 期の経済活動は，1 期前の総生産量 $B_{t-1}x_{t-1}$ と t 期の本源的資源 d_t との和の範囲内という制約の下で $A_t x_t$ だけ生産要素として「投入」し生産を行うというものである。$t=2, \ldots, T-1$ において LP 問題の t 番目の制約 $A_t x_t - B_{t-1}x_{t-1} \leq d_t$ は，t 期の「純生産量」が所与の生産力 d_t を超えることはないことを言っている。さらに，最初と最後の制約 $A_1 x_1 \leq B_1 x' + d_1$ と $B_T x_T \geq A_{T+1} x'' + d_T$ はそれぞれ初期条件，末期条件である。こうした制約の下で経済活動の価値 $\sum_{t=1}^{T} p_t' x_t$ を最大化せよというのがこの LP 問題である。

概念的には動学的 LP 問題（2.1）の解は Bellman の原理（Bellman（1957），Bellman・Kalaba（1965）参照）により特徴づけられる。そのために後方帰納法における評価関数（Value Function）と呼ばれるものを定義する。それは

$$V_T^T(x_{T-1}) = \max_{x_T} p_T' x_T \quad \text{s.t.} \quad A_T x_T - B_{T-1} x_{T-1} \leq d_T, \quad B_T x_T \geq A_{T+1} x'' - d_T \tag{2.2}$$

と，$t=T-1, T-2, \ldots, 1$ に対し帰納的に

$$V_t^T(x_{t-1})=\max_{x_t}[p_t'x_t+V_{t+1}^T(x_t)] \quad \text{s.t.} \quad A_tx_t-B_{t-1}x_{t-1}\leq d_t \tag{2.3}$$

で定義される。最大化問題（2.2），（2.3）の解の集合は x_{t-1} の集合値関数 $F_t^T(x_{t-1})$ としてあらわすことができ，動学的 LP 問題（2.1）はこれらの集合値関数により特徴づけられる。つまり，かりに列 $x_1, \ldots, x_T$ が（2.1）の解であるならば，

$$x_t\in F_t^T(x_{t-1}) \quad (t=1, 2, \ldots, T \quad x_0=x') \tag{2.4}$$

であり，逆もまた成立するということである。

システム（2.4）は集合を値にとるから，経路を一意には定めない。したがってこれは強意の動学系ではない。しかし LP 問題（2.1）を解いて最適経路の集合を定めているので，これを一般化最適動学系と呼ぼう。

3.

我々の疑問は，この動学系がカオスになるかどうかである。しかし，LP 問題（2.1）を適切に修正しない限りこの問いは無意味である。なぜならカオスとは自律的動学系から生じる経路の振る舞いに関することであるが，一般化最適動学系（2.4）は非自律的であるためである。

システム（2.4）が非自律的である理由は二つある。一つは明らかだが，動学的 LP 問題（2.1）の制約条件，目的関数が非自律的であるためである。かりに最適化問題の元の構造が時間に依存しているのであれば，その解が時間に関し不規則な振る舞いをしたとしても驚くことはないであろう。二つ目の理由は，LP 問題（2.4）が有限期間であるためである。その結果，t 期の評価関数 $V_t^T(x_{t-1})$ が，その時点から最終期までどれだけ離れているか（すなわち $T-t$）に依存することになる。

このことから，カオス解を得るためには最終期に関し無縁である無限期間で考える必要があることが分かる。これらを考慮して次に以下のような動学的 LP 問題を作る。

$$\begin{cases} \displaystyle\max_{(x_1, x_2, \cdots)\geq 0} \quad \sum_{t=1}^{\infty}\rho^{t-1}p'x_t \\ \text{s.t.}\begin{cases}\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \cdots \\ -B & A & 0 & \cdots \\ 0 & -B & A & \cdots \\ 0 & 0 & -B & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} Bx'+d \\ d \\ d \\ d \\ \vdots \end{pmatrix}\end{cases} \end{cases} \tag{3.1}$$

ここで $\rho(0<\rho<1)$ は活動の将来価値に対する割引き因子である。

このLP問題を作るにあたり，前節のLP問題から二点の修正がなされている。第一は期間が無限となった点，第二は問題を構成するパラメターが x_t を除き全て時間から独立した，すなわち $A_t=A, B_{t-1}=B, d_t=d, p_t=\rho^{t-1}p$ となった点である。特にベクトル x_t は一定率 ρ で一様に減少していく。こうした理由からLP問題（3.1）は半定常と呼ばれる。

半定常モデルの最適化問題は自律的最適動学系になる。このシステムを得るためには，目的関数の最大値が初期条件 x' に依存していることを注意する必要がある。この最大値を $V(x')$ とあらわすことにしよう。この評価関数を用いるとBellmanの原理は

$$V(x_{t-1})=\max_{x_t}[px_t+\rho V(x_t)] \qquad \text{s.t.} \quad Ax_t-Bx_{t-1}\leq d \tag{3.2}$$

となり，この最大化問題の解の集合はパラメター ρ をもつ x_t の集合値関数 $F(x_{t-1})$ で表現される。

前出の有限期間モデルの場合と同様に，この集合値関数も無限期間LP問題（3.1）の解の集合を特徴づける。つまり，経路 $x_1, x_2, \ldots$ が（3.1）の解になることの必要十分条件は

$$x_t\in F(x_{t-1}) \quad (t=1, 2, \ldots, x_0=x) \tag{3.3}$$

である。

4.

一般化最適動学系（3.3）がカオスになるかどうかを考えるには次の二つの疑問に答える必要がある。(i) どのような条件の下であれば最適化問題（3.3）が標準的な意味の動学系になるか，すなわち，集合値関数ではなく一価関数によりあらわされるか。(ii) どのような条件の下であればそうして導き出された動学系がカオスになるか。Nishimura・Yano (1996) はこれらの疑問に対し，最適計画がカオスとなるようなLP問題（3.1）の例をつくることで答えている。

その例では，活動ベクトル x_t とフローの制約の両方が2次元となっている。つまり，

$$x_t=\begin{bmatrix} c_t \\ k_t \end{bmatrix}, \quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であり，さらに，

$$p=d=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x'=\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$$

である。この下ではLP問題（3.1）は

$$
\begin{cases}
\max\limits_{(c_1,k_1,c_2,k_2,\cdots)\geq 0} \quad \sum_{t=1}^{\infty}\rho^{t-1}c_t \\
\text{s.t.}\begin{cases}\text{(i) } a_{11}c_t+a_{12}k_t\leq 1 \\ \text{(ii) } a_{21}c_t+a_{22}k_t\leq k_{t-1} \quad (t=1,2,\ldots) \\ \text{(iii) } k_0=k\end{cases}
\end{cases} \tag{4.1}
$$

となる。

これまで述べてきたように，(4.1) の解は一般化動学系として記述されうる。そのために，それぞれの $(k_{t-1}, k_t)\geq 0$ に対し，(4.1) の条件(i)，(ii) を満たす $c_t\geq 0$ の最大値を $c(k_{t-1}, k_t)$ で定義する。

命題4.1　それぞれの $k\geq 0$ に対し，かりに $(c_1, k_1, c_2, k_2, \ldots)$ が (4.1) の解であるとすると

$$k_t\in H(k_{t-1}), \quad t=1,2,\ldots \text{かつ}, \quad k_0=k \tag{4.2}$$

であり，

$$c_t=c(k_{t-1}, k_t) \tag{4.3}$$

となる非空な非負の実数の部分集合 $H(k)$ が存在する。

ここで H を一般化最適動学系と呼ぶことにする。特に，かりに H が一価関数であるならば，最適動学系と呼ぶ。以降，H が実際にカオス的最適動学系になりうることを示そう。まずカオス的変動の特徴づけのために，Lasota・Yorke (1974)，Li・Yorke (1978) の結果を以下に用いる。

命題4.2　f を閉区間 I からそれ自身への関数とし，1点 $b\in I$ を除きいたるところで連続2回微分可能で，また，f' が存在する任意の $x\in I$ において，$|f'(x)|>1+\varepsilon$ となるような $\varepsilon>0$ が必ず存在する（拡大的かつ一山型）とする。このとき，f に関してエルゴード的でルベーグ測度の意味で絶対連続な不変測度が I 上に一意に存在する。

上記の結果は，拡大的で一山なほぼ全ての動学系の経路が確率的であるかのように振る舞うことを意味している。テントマップは，拡大的で一山なシステムの例としてよく知られている。

パラメターの値を適切に選べば，LP 問題 (4.1) の解は拡大的で一山な最適動学系として記述されうる，というのが我々の結果の言うところである。この結果を説明するため図1に，k_{t-1} を所与としたときに (4.1) の制約条件 (i)，(ii) に加え $(c_t, k_t)\geq 0$ を満たすような最大の k_t を表す折線 OPR が描かれている。この折線を得るには条件 (i)，(ii) の下で $c_t=0$ とおけば折線 OPR が

$$k_t=\min\{\mu k_{t-1}, \mu/(1+\gamma)\} \quad \text{ただし}\ \mu=1/a_{22}, \quad \gamma=a_{12}/a_{22}-1 \tag{4.4}$$

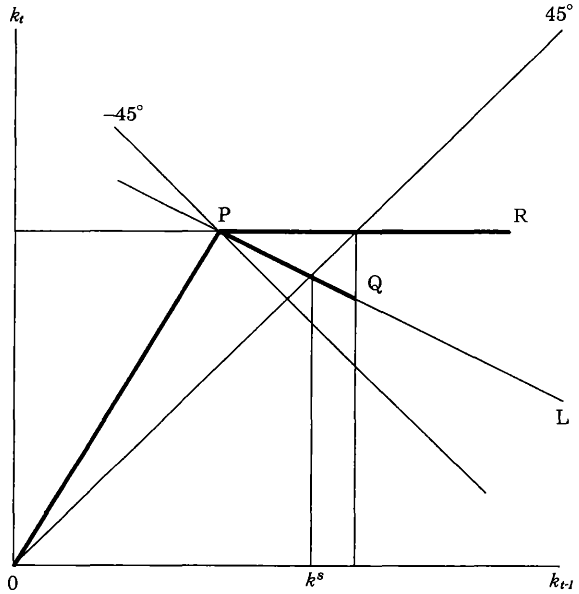
であらわされることから分かる。非負象限で折線 OPR の下方（線上含む）の領域を D と定義すると，$(k_{t-1}, k_t) \in D$ であることが問題（4.1）の条件（i），（ii）を満たすような c_t の存在する必要十分条件になる。

問題（4.1）の条件（i），（ii）がかりに両方とも等号で満たされるのであれば，k_t の値（同時に c_t も）が k_{t-1} により一意に定められる。$a_{11}/a_{21}=1$ となるようにすると，k_{t-1} と k_t は

$$k_t = -(\mu/\gamma)(k_{t-1}-1) \tag{4.5}$$

という関係になる。特に $\gamma = a_{12}/a_{22}-1>0$ となる場合，等式（4.5）のグラフは負の傾きをもち点 P を通る直線となる。図 1 ではこの直線は PQ で描かれている。

図 1　安定的な場合



カオス的最適動学系の候補は折線 OPQ，すなわち

$$h(k_{t-1}) = \begin{cases} \mu k_{t-1} & \text{if} \quad 0 \leq k_{t-1} \leq 1/(\gamma+1) \\ -(\mu/\gamma)(k_{t-1}-1) & \text{if} \quad 1/(\gamma+1) \leq k_{t-1} \leq 1 \end{cases} \tag{4.6}$$

というグラフをもつような関数であることがわかった。

$\mu/(1+\gamma) \leq 1$ を仮定すると，関数 h は単位区間 $[0, 1]$ からそれ自身への写像となる。実質的分析のためには，h を閉区間 $I=[0, \mu/(1+\gamma)]$ 上で考え，かつ I の上への関数とすれば十分である。我々の主な結果は以下に述べられている（証明に関しては Nishimura・Yano（1996）参照）。

定理4.1　$a_{11}/a_{21}=1, \mu=1/a_{22}, \gamma=a_{12}/a_{22}-1$ とし，h_I を区間 $I=[0, \mu/(1+\gamma)]$ 上の関数（4.6）とする。また，パラメター μ, ρ, γ が

$$0<\rho<1, \quad \rho\mu>1, \quad \mu\leq 1+\gamma \tag{4.7}$$

を満たすとする。そのとき，次の条件AまたはBが満たされるならば，区間 I 上で一般化最適動学系 $H(k)$ は関数 h_I に一致する（同値である）。

条件A：$\mu\leq\gamma$

条件B：$\gamma<\mu\leq\min\left\{\dfrac{\gamma+\sqrt{\gamma^2+4\gamma}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{1+4\gamma}}{2\rho}\right\}$

関数 h_I はテントマップである。そのグラフは図1，2，3において折線OPQで描かれている。線分OPは原点から傾き $\mu>0$ でのび，線分PQは点 $(1/(1+\gamma), \mu/(1+\gamma))$ を通る傾き $-\mu/\gamma<0$ の直線上にある。

条件Aが満たされる場合，関数 h_I は一山型だが拡大的ではない。すなわち，

$$0<\rho<1, \quad \rho\mu>1, \quad \mu\leq\gamma$$

である。図1にあるようにかりに $-\mu/\gamma>-1$ であるとすると，最適動学系 h_I は大域的安定であ

図2　二周期解の場合

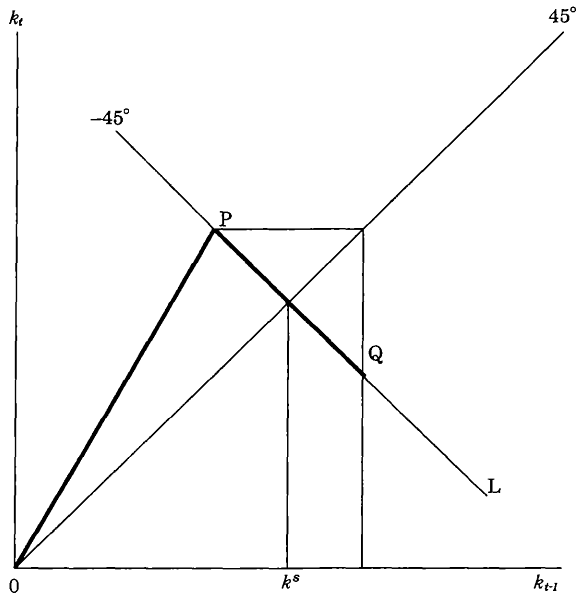
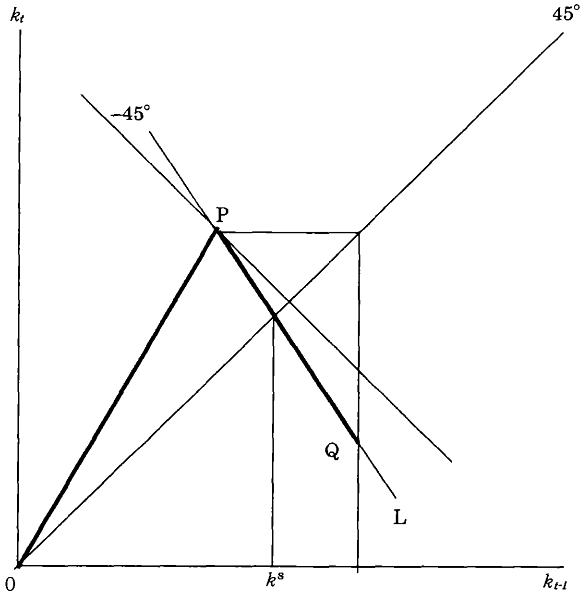


図3　不安定な場合



る。つまり，$k>0$ での（4.1）にそった解は，k_t がシステム h の非ゼロの不動点 k^S に収束する。また，図2にあるようにかりに $-\mu/\gamma=-1$ であるならば，$k\neq0, k^S$ での（4.1）にそった解は，周期2のリミットサイクルになる。

条件Bが満たされる場合，図3に示されるように関数 h_l は一山型で拡大的になる。命題1から，この意味で最適動学系はカオスになる。カオス解の存在は定理4.1と次の結果により保証される。

定理4.2　条件（4.7）と定理4.1の条件Bを同時に満たすような集合は非空である。

我々の結論に対する直観的な説明は次の通りである。まず，かりに（4.1）の制約条件（i），（ii）の両方が等号で満たされているならば，与えられた k_{t-1} に対してそれぞれ c_t と k_t が一意に決定されるはずである。図1，2，3の直線Lはこの意味で，すなわち制約条件（i），（ii）の両方が（等号で）効いているという下での，k_{t-1} と k_t の関係をあらわしている。

このことは，（4.1）にそった最適解が両方の条件をうけて定まる場合があることを意味する。そうした場合，（定理4.1より）最適動学系のグラフは直線L上となる。ところがそれぞれの変数は非負でなければいけないから $(c_t\geq0, k_t\geq0, k_{t-1}\geq0)$，与えられた k_{t-1} に対してかりに (c_t, k_t) が制約条件（i），（ii）を満たすならば，(k_{t-1}, k_t) は点Pより上方には決してこないことがわかる（なぜなら，点Pより上方の点をとるには c_t が負になる必要があるから）。つまり，$k_{t-1}\geq1/(1+\gamma)$ のときの

み，最適動学系のグラフが直線 L 上にくるのである。

したがって，$k_{t-1}<1/(1+\gamma)$ であるとき，最適動学系のグラフは直線 L から（制約条件を満たす）最も近いところになければならない。この位置は線分 OP で与えられる。すなわち，与えられた $k_{t-1}<1/(1+\gamma)$ に対し，(c_t, k_t) が制約条件（i），（ii）を $c_t\geq 0, k_t\geq 0$ で満たすような最大の k_t は線分 OP 上にあるということである。

5.

これまでの動学的 LP 問題は動学均衡モデルとして解釈することができる。特に，前節の（4.1）はレオンチエフ型生産関数での標準的な二部門モデルとして考えられる。一般に無限期間での半定常経済モデルの動学均衡は

$$\max_{(k_0,k_1,k_2,\cdots)} \quad \sum_{t=1}^{\infty}\rho^{t-1}v(k_{t-1}, k_t) \quad \text{s.t.} \quad k_0=k \tag{5.1}$$

という制御問題の解として特徴づけられる。この最適化問題では k_{t-1} と k_t はそれぞれ t 期の期初と期末における資本蓄積の水準とみることができる。効用関数 $v(k_{t-1}, k_t)$ は t 期の期初に資本レベル（水準）が k_{t-1} であるような経済が期末の資本レベル（水準）を k_t にするよう活動した場合に達成される効用をあらわす。したがって，（5.1）の最適化は動学均衡における資本蓄積というものが全期間にわたる割引効用の総和を最大にするように行われることを意味する。

動学均衡モデル（5.1）の特殊ケースにおけるカオス的動学均衡の存在が Nishimura・Yano (1995) では示されている。そこでは純粋消費財 C と生産に必要な財 K の 2 財が存在し，それぞれの財を生産するために二つの部門が経済にあるとしている。それらを部門 C，部門 K と呼び，両部門とも生産には財 K と労働 L が投入されるとする。財 K の投入は生産がなされる期の 1 期前に実行される必要があり，その意味で財 K を資本（財）と考えることができる。労働投入は生産と同じ期になされる。また，財 K は消費されない。部門 C と部門 K はレオンチエフ型生産関数

$$c_t=\min\{K_{Ct-1}, L_{Ct}/\alpha\}; \tag{5.2}$$

$$k_t=\mu\min\{K_{Kt-1}, L_{Kt}/\beta\} \tag{5.3}$$

をもつ。ここで $i=C, K$ に関し，$K_{it-1}\geq 0$ は部門 i の $t-1$ 期における資本投入量，$L_{it}\geq 0$ は部門 i の t 期における労働投入量であり，$c_t\geq 0$，$k_t\geq 0$ は t 期の生産量である。資本の総投入量は前期の部門 K における生産量の範囲内でおこなわれる。すなわち，

$$K_{Ct-1}+K_{Kt-1}\leq k_{t-1} \tag{5.4}$$

である。労働供給は非弾力的で時間に依存しないものとする。財は本源的労働量 $\bar{n}$ が 1 となるように基準化され，総労働投入量は本源的労働投入量の範囲内，すなわち，

$$L_{Ct}+L_{Kt}\leq 1 \tag{5.5}$$

となる。消費者の選好は線形の効用関数

$$u(c_t)=c_t\geq 0 \quad (t=1, 2, \ldots) \tag{5.6}$$

によりあらわされることとする。こうした構造の下で，

$$v(k_{t-1}, k_t)=\max_{(c_t, K_{Ct-1}, K_{Kt-1}, L_{Ct}, L_{Kt})\geq 0} u(c_t) \quad \text{s.t.} \quad (5.2)-(5.6) \tag{5.7}$$

を定義する。(5.7) で与えられた特殊な形の効用関数 v の最適化問題は，典型的な二部門動学均衡モデルの例である。

よく知られているようにこの最適化問題は標準的な動学的一般均衡経済の特殊ケースであり (Yano (1998) をみよ)，そこでの均衡は消費者と生産者の双方がそれぞれ自身の動学的に最適な経済活動を各時点で実行し，各財の市場は現時点から将来の全てまで需給が一致する。したがって最適化問題 (5.1) は動学均衡モデルと呼ばれるのである。

(5.7) で特徴づけられたこの動学均衡モデル (5.1) は動学的 LP 問題 (4.1) と同値である。なぜならこのモデルが線形の効用関数とレオンチエフ型生産関数をもち，目的関数 (5.7) が (4.1) と同一であるためである。制約条件も基本的に (4.1) とかわらない。

この事実を確認するために $K_{Ct-1}=L_{Ct}/\alpha$, $K_{Kt-1}=L_{Kt}/\beta$ というケースを考えてみよう。この場合，(5.2)，(5.3) が与えられると $c_t=K_{Ct-1}=L_{Ct}/\alpha$, $k_t=\mu K_{Kt-1}=\mu L_{Kt}/\beta$ となる。したがって (5.4)，(5.5) は

$$c_t+\frac{1}{\mu}k_t\leq k_{t-1}$$

と

$$\alpha c_t+\frac{\beta}{\mu}k_t\leq 1$$

に変形される。これらの制約は (4.1) の制約が $a_{11}=\alpha$, $a_{12}=\beta/\mu$, $a_{21}=1$, $a_{22}=1/\mu$ であるケースと同じである。(5.7) の下では $K_{Ct-1}=L_{Ct}/\alpha$, $K_{Kt-1}=L_{Kt}/\beta$ が全ての解にあてはまることを示すこともできるので，(5.1) と (4.1) が同値であることもわかる。

6.

(5.7) の下で (5.1) と (4.1) が同値であるならば，定理4.2より動学的均衡がカオス的動学系に支配される可能性があることがわかる。そのような可能性の存在を初めて証明したのが Denecker・Pelikan (1986) と Boldrin・Montrucchio (1986) であったのだが，彼らの結果は将来効用の割引因子 ρ が 10^{-2} という桁になるケースにもとづいたものであった。経済学的には，割引因

子 ρ が1から離れて小さくなることは将来への関心も小さくなっていくことを意味する。それは割引因子 ρ が消費者の将来効用に対する近視眼を左右するからである。$\rho=10^{-2}$ というケースならば消費者は次期に得る効用には今期と比べ100分の1の価値しかおかないことになる。それでは1期間を100年程度の長期であると考えるべきであろう。

対照的に定理4.1，4.2の述べる結論は，割引因子 ρ が最大0.5までの値においてならばカオス的動学系により動学均衡が支配されることを示している。言いかえれば，(4.7) と定理4.1の条件Bを満たす (ρ, μ, γ) において ρ の最小上界 (Least Upper Bound) は

$$\rho^*=0.5 \tag{6.1}$$

となる。

上で述べたようにこの上界 (Upper Bound) はカオス的最適動学 (Chaotic Optimal Dynamics) の経済学的応用に対し厳しい制限をつけている。動学的LP問題 (4.1) は c_t と k_t がそれぞれ消費と資本の水準を表現している資本蓄積モデルとして解釈できるが，その下では ρ がモデルの1期間の長さを決定していると考えられよう。1期間を1年とする経済モデルであれば一般に ρ は0.95程度となる。したがってかりに $\rho\leq0.5$ であれば，1期間はほぼ5年以上となる。つまり，カオス的最適動学の経済学的応用は1期間が5年以上とされるモデルに限定される。

$\rho^*=0.5$ がカオス的最適動学系の発生する最小上界ではないということも強調したい。Nishimura・Yano (1995) では ρ がどんなに1に近くとも最適動学系がカオスになるよう (μ, γ) を選ぶことが可能であることが示されている。しかし，その結論は図1，2，3の点Pが動学系 h_I の周期点 (Cyclical Point) になるという仮定に基づくものである。

Nishimura・Yano (1995) においても，この論文においても (4.1) の解である動学系 h_I に関する完全な特徴づけはなされていない。LP問題 (4.1) のパラメターに関し，動学系 h_I が最適となるための必要十分条件を導き出すことは今後に残された興味深い問題である。そのような特徴づけがなされることでカオス的最適動学の可能性についてのいっそうの理解がもたらされることであろう。

(京都大学経済研究所教授)
(経済学部教授)
(訳者　慶應義塾大学経済学部生)

References

1. Bellman, R.: *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton 1957
2. Bellman, R., Kalaba, R.: *Dynamic Programming and Modern Control Theory*. Academic Press, New York 1965
3. Boldrin, M., Montrucchio, L.: On the indeterminacy of capital accumulation paths. *Journal of Economic Theory* **40**, 26–39 (1986)

4. Deneckere, R., Pelikan, S.: Competitive chaos. *Journal of Economic Theory* **40**, 13-25 (1986)
5. Dorfman, R., Samuelson, P., Solow, R.: *Linear Programming and Economic Analysis*. McGraw-Hill, New York 1958
6. Lasota, A., Yorke, J.: On the existence of invariant measures for piecewise monotonictransformations. *Transactions of American Mathematical Society* **186**, 481-488 (1974)
7. Li, T.-Y., Yorke, J.: Period three implies chaos. *American Mathematical Monthly* **82**, 985-992 (1975)
8. —: Ergodic transformations from an interval into itself. *Transactions of American Mathematical Society* **235**, 183-192 (1978)
9. Nishimura, K., Yano M.: Non-linear dynamics and chaos in optimal growth: An example. *Econometrica* **63**, 981-1001 (1995)
10. —: Chaotic solutions in dynamic linear programming. *Chaos, Solitons & Fractals* **7**, 1941-1953 (1996)
11. Yano, M.: On the duality of a von Neumann facet and the inefficacy of temporary fiscal policy. *Econometrica* **66**, 427-451 (1998)