Title	デフォルトリスクモデルに対する一考察
Sub Title	A remark on default risk models
Author	楠岡, 成雄(Kawabi, Hiroshi) 河備, 浩司
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1999
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.92, No.3 (1999. 10) ,p.507(51)- 521(65)
JaLC DOI	10.14991/001.19991001-0051
Abstract	
Notes	小特集：経済の数理解析
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19991001-0051

「三田学会雑誌」92巻3号（1999年10月）

デフォルトリスクモデルに対する一考察*

楠　岡　成　雄

訳　河　備　浩　司

1　序

$(\Omega, \mathcal{B}, \{\mathcal{B}_t\}_{t\in[0,T]}, P)$ を通常の仮定を満たすフィルトレーションをもつ完備確率空間とする。τ を停止時刻として $N_t = 1_{\{t\geq\tau\}}$ と置く。すると N_t は劣マルチンゲールとなり，Doob-Meyer の定理より $A_0=0$ かつ $N_t - A_t$ がマルチンゲールとなる様な単調増加な可予測過程（predictable process）A_t が一意に存在する。数理ファイナンスにおいて停止時刻 τ はデフォルト時刻を表わすものとされており，A_t は絶対連続であるとしばしば仮定される。すると $A_t = \int_0^t (1-N_s)\lambda_s ds,\ t>0$ なる可予測過程 λ_t が存在する。ところで，更なる仮定を置くことにより，様々な著者が以下の関係式または類似した式を導出している。

$$P(\tau>s|\mathcal{F}_t) = (1-N_t)E^P[\exp(-\int_t^s \lambda_u du)|\mathcal{F}_t], \qquad s>t. \tag{1}$$

これは実務においてデフォルトする可能性を持つ証券価格を計算する時に有用な式である。(Jarrow-Turnbull［4］，Duffie-Singleton［3］，Duffie-Schroder-Skidas［2］を参照)

本論文では「スタンダードモデル」の下では(1)式が成立するが，別の同値な確率測度の下では一般には成立しないことを示す。また一般には，(1)式を修正した関係式が成立することを示す。残念ながら，各デフォルト時刻に対する修正した式を記述するためには基準となる測度として新しいものを導入する必要があり，それゆえに本論文の結果は実務では有用ではない可能性がある。しかしながら近年ではクレジットデリバティブが紹介されており，多数のデフォルト時刻が入ったモ

---

*　JEL classification : G12. MS classification : 60G44, 90A99.

この論文は，*Advances in Mathematical Economics*, volume 1, pp. 69-82 Springer-Verlag, 1999 に英文で掲載されたものを出版社の許可を得て日本語訳したものです。原題 “A remark on default risk models”。

デルを考察する必要性がある。よってモデルはより複雑なものになる。本論文はデフォルトリスクモデルにおける便利な(1)式を用いる時には，仮定に関して慎重になる必要があることを主張するものである。

2　スタンダードモデル

まず $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備確率空間とする。本論文では，以下の議論において $T>0$ を固定して考える。また $\mathcal{N}=\{A\in\mathcal{F}\,;P(A)=0 \text{ or } 1\}$ と置き，$\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,T]}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の filtration とし，$\tau_k, k=1,\dots,N$ を $[0,\infty)$ に値を取る確率変数とする。ここでは，以下の条件 **(A-1)** と **(A-2)** を仮定する。

(A-1) $\mathcal{N}=\mathcal{G}_0$ であり，$\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,T]}$ を d 次元**弱ブラウニアンフィルトレーション**（weakly Brownian filtration）であるとする。ただし，$0\leq d\leq\infty$ である。

(A-2) $\tau_k, k=1,\dots,N$ の確率分布は連続であり，$k\neq l$ に対して $P(\tau_k=\tau_l)=0$ であるとする。

ここで，以下の条件 **(R)** を満たす d 次元 P-$\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,T]}$-ブラウン運動が存在する時，$\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,T]}$ が d 次元弱ブラウニアンフィルトレーションであると呼ぶことにする。

(R) 任意の P-$\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,T]}$-2 乗可積分マルチンゲール Z_t に対して，$\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,T]}$-可予測過程で $E^P[\int_0^T|f(t)|^2dt]<\infty$ を満たす $f:[0,T]\times\Omega\to\mathbf{R}^d$ が，任意の $t\in[0,T]$ に対して以下の等式を満たすとする。

$$Z_t=Z_0+\int_0^t f(s)dB_s.$$

また，条件 **(R)** を満たすこのようなブラウン運動 $\{B_t\}_{t\in[0,T]}$ を，$(\Omega, \{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,T]}, P)$ 上の**ブラウニアンベース**（Brownian base）であると呼ぶことにする。

さて $N_k(t)=1_{\{t\geq\tau_k\}}, t\in[0,T], k=1,\dots,N$ に対して，

$$\mathcal{F}_t=\mathcal{G}_t\vee\sigma\{\tau_k\wedge t\,;k=1,\dots,N\},\qquad t\in[0,T]$$

なるフィルトレーションを考え，以下の仮定 **(A-3)** を置く。

(A-3) $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ は，右連続なフィルトレーションである。

ここで，仮定 **(A-1)**，**(A-2)**，**(A-3)** は基礎となる測度を P の代わりに，P と同値な確率測度 $\tilde{P}$ に変更しても不変であることに注意したい。すると，以下の命題を容易に得ることができる。

命題 1　任意の $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ 発展的可測過程（progresssively measurable process）$f:[0,T]\times\Omega\to\mathbf{R}$ に対して，以下の 2 条件を満たす可測関数 $g:[0,T]\times[0,T]^N\times\Omega\to\mathbf{R}$ が存在する。

(*i*) 任意の $s_1,\dots,s_N\in[0,T]$ に対して，$g(\cdot,s_1,\dots,s_N,*):[0,T]\times\Omega\to\mathbf{R}$ は $\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,T]}$ 発展的可測である。

(ii) $f(t)=g(t, \tau_1\wedge t, \ldots, \tau_N\wedge t)$ が $a.e.t\in[0, T]$, P-$a.s$ で成り立つ。

さらに，以下の条件 **(M-1)** と **(M-2)** を仮定することにする。

(M-1) $\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0, T]}$-発展的可測過程 $\lambda_k:[0, T)\times\Omega\to[0, T]$, $k=1, \ldots, N$ が存在して，以下の M_k は P-$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0, T]}$-マルチンゲールである。

$$M_k(t)=N_k(t)-\int_0^t(1-N_k(s))\lambda_k(s)ds$$

(M-2) 任意の P-$\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0, T]}$-マルチンゲールは P-$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0, T]}$-マルチンゲールである。

さて，

$$X_k(t)=\exp(\int_0^t\lambda_k(s)ds)(1-N_k(t)), \qquad t\in[0, T], \qquad k=1, \ldots, N.$$

と定義する。するとこの確率過程に対して，以下の命題が成立することが容易に分かる。

命題 2 $\{X_k(t)\}_{t\in[0, T]}$, $(k=1, \ldots, N)$ は局所有界 P-$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0, T]}$-マルチンゲールである。さらに，任意の $k\neq l$ に対して $[X_k, X_l]=0, k\neq l$ であり，

$$X_k(t)=1-\int_0^t X_k(s-)dM_k(s), \qquad t\in[0, T]$$

が成り立つ。

さて，$(\Omega, \{\mathcal{G}\}_{t\in[0, T]}, P)$ 上のブラウニアンベース $\{B(t)\}_{t\in[0, T]}$ を固定することにする。すると，以下の定理を得る。

定理 1 任意の P-$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0, T]}$- 2 乗可積分マルチンゲール $\{Y_t\}_{t\in[0, T]}$ に対して，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0, T]}$-可予測過程 $f:[0, T]\times\Omega\to\mathbf{R}^d$ と $\tilde{f}_k:[0, T]\times\Omega\to\mathbf{R}$, $k=1, \ldots, N$ が存在して，以下の 2 条件を満たす。

$$(i)\ E^P[\int_0^T|f(t)|^2dt]<\infty, \qquad E^P[\int_0^T|\tilde{f}_k(t)|^2\lambda_k(t)dt]<\infty, k=1, \ldots, N$$

$$(ii)\ Y_t=Y_0+\int_0^t f(s)dB(s)+\sum_{k=1}^N\int_0^t\tilde{f}_k(s)dM_k(s) \qquad t\in[0, T].$$

証明．ステップ 1． $\mathcal{H}$ を $Z\prod_{j=1}^r(1-N_{k_j}(s_j))$ の線形包とする。ここで Z は有界 $\mathcal{G}_T$-可測確率変数であり，$0\leq r\leq N, 1\leq k_1<k_2<\ldots<k_r\leq N$ で $0\leq s_j\leq T, j=1, \ldots, r$ である。すると $\mathcal{H}$ が環であることは明らかである。以下の事が成立することに注意すると，$\mathcal{H}$ が $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ で稠密であることが分かる。

$$\tau_k \wedge T = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}((1-N_k(\frac{i-1}{n}T))-(1-N_k(\frac{i}{n}T)))\frac{i}{n}T+(1-N_k(T))T.$$

ステップ 2． Z を $\mathcal{G}_T$-可測確率変数とし，$0\leq r\leq N, 1\leq k_1\leq k_2\leq\ldots\leq k_r\leq N, 0\leq s_j\leq T, j=1, \ldots, r$ とする。

$$Z'=Z\exp(-\sum_{i=1}^{r}\int_0^{s_i}\lambda_{k_i}(t)dt)$$

と置くと，Z' は $\mathcal{G}_T$-可測である。また $Z'_t=E^P[Z'|\mathcal{F}_t], t\geq 0$ と置くと，Z'_t は $P-\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0, T]}$-連続有界マルチンゲールである。ゆえに $[Z', X_k]=0, k=1, \ldots, N$ が成り立つ。以下の関係式が成り立つことに注意する。

$$\begin{aligned}
&Z\prod_{j=1}^{r}(1-N_{k_j}(s_j))\\
&=Z'_T\prod_{j=1}^{r}X_{k_j}(T\wedge s_j)\\
&=Z'_0+\int_0^T\prod_{j=1}^{r}X_{k_j}(t\wedge s_j-)dZ'_t+\sum_{j=1}^{r}\int_0^{s_i}Z'_{t-}\prod_{i=1}^{r}X_{k_i}(t\wedge s_i-)dM_{k_j}(t)
\end{aligned}$$

これにより，定理の結論を得ることができた。∎

さて，$\{1, \ldots, N\}$ の任意の部分集合 I に対して，

$$\mathcal{F}_t^I=\mathcal{G}_t\vee\sigma\{\tau_k\wedge t\,;\,k\in I\}\qquad t\in[0, T]$$

と置くことにする。

すると，$B(t)$ と $M_k(t), k\in I$ は P-$\{\mathcal{F}_t^I\}_{t\in[0, T]}$-マルチンゲールとなる。よって定理 1 と同様な証明をすることにより，以下の定理を得ることができる。

定理 2　I を $\{1, \ldots, N\}$ の部分集合とする。任意の P-$\{\mathcal{F}_t^I\}_{t\in[0, T]}$- 2 乗可積分マルチンゲール $\{Y_t\}_{t\in[0, T]}$ に対して，$\{\mathcal{F}_t^I\}_{t\in[0, T]}$-可予測過程 $f:[0, T]\times\Omega\to\mathbf{R}^d$ と $\tilde{f}_k:[0, T]\times\Omega\to\mathbf{R}, k\in I$ が存在して，以下の 2 条件を満たす。

$$(i)\ E^P[\int_0^T|f(t)|^2dt]<\infty,\qquad E^P[\int_0^T|\tilde{f}_k(t)|^2\lambda_k(t)dt]<\infty, k\in I,$$

$$(ii)\ Y_t=Y_0+\int_0^t f(s)dB(s)+\sum_{k\in I}\int_0^t\tilde{f}_k(s)dM_k(s)\qquad t\in[0, T].$$

定理 2 の系として次の命題を得る。

命題 3　$\{1, \ldots, N\}$ の任意の部分集合 I に対して，フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t^I\}_{t\in[0, T]}$ は右連続である。

3　同値マルチンゲール測度

$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 Q を確率測度 P と同値なものであるとする。ここで

$$\rho_t = E^P[\frac{dQ}{dP}|\mathcal{F}_t], \qquad t \in [0, T]$$

と置き，ρ_t 右連続で左極限をもつ確率過程（cadlag process）であると仮定する。更に，以下の条件 **(Q)** を仮定する。

(Q) $\{\log \rho_t\}_{t\in[0,T]}$ は，局所有界過程である。

すると定理 1 により，以下の関係式を満たす可予測過程 $\beta : [0, T]\times\Omega \to \mathbf{R}^d$ と $\varkappa_k : [0, T]\times\Omega \to (-1, \infty)$, $k=1, \ldots, N$ が存在する。

$$\rho_t = 1 + \int_0^t \rho_{s-}(\beta(s)dB(s) + \sum_{k=1}^N \varkappa_k(s)dM_k(s)), \qquad t \in [0, T].$$

命題 4

$$\tilde{B}(t) = B(t) - \int_0^t \beta(s)ds$$

は d 次元 Q-$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$-ブラウン運動であり，

$$\tilde{M}_k(t) = N_k(t) - \int_0^t (1-N_k(s))(1+\varkappa_k(s))\lambda_k(s)ds, \qquad k=1, \ldots, N$$

は Q-$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$-マルチンゲールである。

証明. まず，以下の 2 つの関係式が成り立つことが容易に分かる。

$$d(\rho_t N_k(t)) = \rho_t(1+\varkappa_k(t))\lambda_k(t)dt + N_k(t-)d\rho_t + \rho_{t-}dM_k(t),$$
$$d(\rho_t B(t)) = \rho_t - \beta(t)dt + B(t)d\rho_t + \rho_{t-}dB(t).$$

ここで $\{\rho_t Z_t\}_{t\in[0,T]}$ が P-マルチンゲールならば，$\{Z_t\}_{t\in[0,T]}$ が Q-マルチンゲールであることに注意すれば定理の結論を得ることができる。∎

定理 3　任意の Q-$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$- 2 乗可積分マルチンゲール $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$ に対して，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$-可予測過程 $f : [0, T]\times\Omega \to \mathbf{R}^d$ と $\tilde{f}_k : [0, T]\times\Omega \to \mathbf{R}$, $k=1, \ldots, N$ が存在して，以下の 2 条件を満たす。

(i) $E^{q}[\int_0^T |f(t)|^2 dt] < \infty, \qquad E^{q}[\int_0^T |\tilde{f}_k(t)|^2 (1+x_k(t))\lambda_k(t) dt] < \infty, k=1, \ldots, N,$

(ii) $Y_t = Y_0 + \int_0^t f(s) d\tilde{B}(s) + \sum_{k=1}^{N} \int_0^t \tilde{f}_k(s) d\tilde{M}_k(s), \qquad t \in [0, T].$

証明. まず Y_t は有界であると仮定して良いことに注意する。$\rho_t Y_t$ が P-局所 2 乗可積分マルチンゲールであるので,

$$Y'_t = \int_0^t \rho_{s-}^{-1} d(\rho_s Y_s) - \int_0^t \rho_{s-}^{-1} Y_{s-} d\rho_s$$

も同様となる。すると定理 1 により，可予測過程 f と $\tilde{f}_k$ が存在して以下の関係式を満たす。

$$Y'_t = \int_0^t f(s) dB(s) + \sum_{k=1}^{N} \int_0^t \tilde{f}_k(s) dM_k(s)$$

ゆえに

$$dY_t = dY'_t - \rho_{t-}^{-1}[\rho, Y]_t = f(t) d\tilde{B}(t) + \sum_{k=1}^{N} \tilde{f}_k(t) d\tilde{M}_k(t)$$

が成り立ち，定理の結論を得る。∎

ここで $\{1, \ldots, N\}$ の任意の部分集合 I に対して，$\tau_I = \wedge_{k \in I} \tau_k = \min\{\tau_k ; k \in I\}$ と置く。

命題 5　I を $\{1, \ldots, N\}$ の部分集合とする。すると $\{\mathcal{F}_t^{I^c}\}_{t \in [0, T]}$-可予測過程 $\beta^I : [0, T] \times \Omega : \to \mathbf{R}^d$ と $x_k^I : [0, T] \times \Omega : \to (-1, \infty), k=1, \ldots, N$ が存在して

$$\beta(t) = \beta^I(t), \qquad x_l(t) = x_k^I(t) \qquad a.e. t \in [0, T \wedge \tau_I] \quad P-a.s.$$

を満たす。ただし $I^c = \{1, \ldots, N\} \setminus I$ である。

証明. $I = \{1, \ldots, l\}, 1 \leq l \leq N$ とする。命題 1 により，以下の関係式を満たす $g : [0, T] \times [0, T]^N \times \Omega \to \mathbf{R}^d$ が存在する。

$$\beta(t) = g(t, \tau_1 \wedge t, \ldots, \tau_N \wedge t), \qquad a.e.t.$$

また，以下の様に $\tilde{\beta}^I(t)$ と $\beta^I(t)$ を定義する。

$$\tilde{\beta}^I(t) = g(t, t, \ldots, t, \tau_{l+1} \wedge t, \ldots, \tau_N \wedge t),$$

$$\beta^I(t) = \tan(\liminf_{h \downarrow 0} \int_{0 \vee (t-h)}^t \arctan(\tilde{\beta}^I(s)) ds), \qquad t \in [0, T].$$

すると β^I が $\{\mathcal{F}_t^{I^c}\}_{t \in [0, T]}$-可予測であることが分かり,

$$\beta(t) = \beta^I(t), \qquad a.e. t \in [0, T \wedge \tau_I] \quad P-a.s.$$

が成り立つ。他も同様に証明できる。■

ここで $\{1, \ldots, N\}$ の部分集合 I を固定し，$\rho^I(t)$ を以下の確率微分方程式の解とする。

$$d\rho^I(t)=\rho^I(t-)(\beta^I(t)dB(t)+\sum_{k\in I^c}\varkappa_k^I(t)dM_k(t)), \qquad \rho^I(0)=1$$

更に ρ^I に対して，以下のことを仮定する。

$(Q-I)$ $$E^P[\rho^I(T)]=1.$$

これにより，$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 Q^I を $dQ^I=\rho^I(T)dP$ で定義することができる。すると以下の命題が成り立つ。

命題 6　任意の有界な確率変数 Z に対して

$$Z_t^I=E^{Q^I}[Z|\mathcal{F}_t^{I^c}], \qquad t\in[0, T]$$

と置く。すると $Z_{t\wedge\tau_I}^I$ は Q-$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0, T]}$-マルチンゲールであり，$[Z^I(\cdot\wedge\tau_I), N_k]=0, k\in I$ が成り立つ。

証明. 命題 4 と定理 1 を Q^I に適用することにより，

$$B'(t)=B(t)-\int_0^t\beta^I(s)ds$$

が Q^I-$\{\mathcal{F}_t^{I^c}\}_{t\in[0, T]}$ ブラウン運動であり，

$$M'_k(t)=N_k(t)-\int_0^t(1-N_k(s))(1+\varkappa_k^I(s))ds, \qquad k\in I^c,$$

が Q^I-$\{\mathcal{F}_t^{I^c}\}_{t\in[0, T]}$-マルチンゲールであることが分かる。また $\{\mathcal{F}_t^{I^c}\}_{t\in[0, T]}$-可予測過程 $f:[0, T]\times\Omega\to\mathbf{R}^d$ と $\tilde{f}_k:[0, T]\times\Omega\to\mathbf{R}, k\in I^c,$ が存在して

$$E^{Q^I}[\int_0^T|f(t)|^2dt]<\infty, \qquad E^{Q^I}[\int_0^T|\tilde{f}_k(t)|^2(1+\varkappa_k^I(t))\lambda_k(t)dt]<\infty, \quad k\in I^c,$$

と

$$Z_t=Z_0+\int_0^t f(s)dB'(s)+\sum_{k\in I^c}\int_0^t\tilde{f}_k(s)dM'_k(s).$$

を満たす。
ここで以下のことに注意する。

$$B'(t\wedge\tau_I)=\tilde{B}(t\wedge\tau_I), \qquad M'_k(t\wedge\tau_I)=\tilde{M}_k(t\wedge\tau_I), \quad k\in I^c.$$

すると以下の関係式を得る。

$$Z_{t\wedge\tau_I}=Z_0+\int_0^{t\wedge\tau_I}f(s)d\tilde{B}(s)+\sum_{k\in I^c}\int_0^{t\wedge\tau_I}\tilde{f}_k(s)d\tilde{M}_k(s).$$

これにより定理の証明を終える。∎

さて $N_I(t)=1_{\{t\geq\tau_I\}}$ と置く。すると

$$\tilde{M}_I(t)=N_I(t)-\int_0^t(1-N_I(s))(\sum_{k\in I}(1+\varkappa_k^I(s))\lambda_k(s))\lambda_k(s))ds$$

が Q-$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$-マルチンゲールとなることが分かる。よって以下の命題を得る。

命題 7　任意の有界 $\mathcal{F}_T^{I^c}$ 可測な確率変数 Z に対して以下が成立する。

$$\begin{aligned}&E^Q[Z(1-N_I(s))|\mathcal{F}_t]\\&=(1-N_I(t))E^{Q'}[Z\exp(-\int_t^s(\sum_{k\in I}(1+\varkappa_k^I(u))\lambda_k(u)du)|\mathcal{F}_t^{I^c}],\qquad 0\leq t\leq s\leq T.\end{aligned}$$

証明. まず

$$Z'=Z\exp(-\int_0^s(\sum_{k\in I}(1+\varkappa_k^I(u))\lambda_k(u)du).$$

と置く。すると Z' は $\mathcal{F}_T^{I^c}$ 可測である。また

$$Z'_t=E^{Q'}[Z|\mathcal{F}_t^{I^c}]$$

と

$$X'_t=(1-N_I(t\wedge s))\exp(\int_0^{t\wedge s}(\sum_{k\in I}(1+\varkappa_k^I(u))\lambda_k(u)du),\qquad t\in[0,T]$$

と置く。する $Z'_{\cdot\wedge\tau_I}$ と $\{X'_t\}_{t\in[0,T]}$ は Q-$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$-局所マルチンゲールであり，$[Z'_{\cdot\wedge\tau_I},X']=0$ が成り立つ。ゆえに $Z'_{\cdot\wedge\tau_I}X'$ もまた局所マルチンゲールとなる。また

$$Z'_{t\wedge\tau_I}X'_t=Z'_tX_t$$

なので $Z'_tX'_t$ が有界 Q-$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$-マルチンゲールであることが分かる。それゆえに以下の関係式を得る。

$$E^Q[Z(1-N_I(s))|\mathcal{F}_t]=E^Q[Z'_TX'_T|\mathcal{F}_t]=Z'_tX'_t.$$

これで命題の証明を終える。∎

系 1　$t\leq s$ なる任意の $t,s\in[0,T]$ に対して，以下が成り立つ。

$$Q[\tau_I>s|\mathcal{F}_t]=(1-N_I(t))E^{Q'}[\exp(-\int_t^s(\sum_{k\in I}(1+\varkappa_k^I(u))\lambda_k(u)du)|\mathcal{F}_t^{I^c}].$$

命題 8　$\{Z_t\}_{t\in[0,T]}$ を有界な $\{\mathcal{F}_t^{I^c}\}_{t\in[0,T]}$-可予測過程とする。すると任意の $t\in[0,T]$ に対して，以下の関係式が成り立つ。

$$E^{Q}[\int_t^T Z_s dN_I(s)|\mathcal{F}_t]$$
$$=(1-N_I(t))E^{Q^I}[\int_t^T Z_s(\sum_{k\in I}(1+x_k^I(s))\lambda_k(s))\exp(-\int_t^s(\sum_{k\in I}(1+x_k^I(u))\lambda_k(u)du)|\mathcal{F}_t^{I^c}]$$

証明. 以下の関係式と命題 7 よりこの命題の証明が終わる。

$$\int_t^T Z_s dN_I(s)=\int_t^T Z_s dM_I(s)+\int_t^T Z_s(1-N_I(s-))(\sum_{k\in I}(1+x_k^I(s))\lambda_k(s))ds. \blacksquare$$

元の測度 P に対して以下の系を得る。これが，第 2 章でスタンダードモデルと呼ぶ理由となっている。

系 2　任意の有界 $\mathcal{G}_T$-可測な確率変数 Z に対して以下の関係式が成り立つ。

$$E^P[Z(1-N_I(s))|\mathcal{F}_t]$$
$$=(1-N_I(t))E^P[Z\exp(-\int_t^s(\sum_{k\in I}\lambda_k(u)du)|\mathcal{F}_t],\qquad 0\leq t\leq s\leq T$$

特に，任意の $t\leq s$ なる $t, s\in[0,T]$ に対して以下が成り立つ。

$$P[\tau_I>s|\mathcal{F}_t]=(1-N_I(t))E^P[\exp(-\int_t^s(\sum_{k\in I}\lambda_k(u)du)|\mathcal{F}_t].$$

証明. まず，今までの結果を $Q=P$ として適用すれば $Q^I=P$ が成り立つことに注意する。さらに仮定 **(M-2)** により，任意の有界 $\mathcal{G}_T$ 可測な確率変数 Z に対して

$$E^P[Z|\mathcal{G}_t]=E^P[Z|\mathcal{F}_t],\qquad t\in[0,T]$$

が成り立つ。ゆえに，命題 7 と系 1 から結論を得る。$\blacksquare$

例.　$T>0, \lambda_1, \lambda_2>0, \Omega=[0,\infty)^2$ で $\mathcal{F}$ を Ω 上の Borel 集合族とし，確率測度を

$$P(dx,dy)=(\lambda_1\lambda_2)\exp(-\lambda_1 x-\lambda_2 y)dxdy$$

とする。また $\tau_1(x,y)=x, \tau_2(x,y)=y, N_k(t)=1_{\{\tau_k\leq t\}}, t\in[0,T]$ とする。すると $d=0, K=2, \lambda_k(t)=\lambda_k, k=1,2$ と置くことにより仮定 **(A-1)**-**(A-3)**, **(M-1)**, **(M-2)** が成り立つことが容易に分かる。ここで $\alpha_1, \alpha_2>0$ に対して，x_1, x_2 を以下の様に置く。

$$x_1(t)=(\frac{\alpha_1}{\lambda_1}-1)N_2(t-),$$

$$x_2(t)=(\frac{\alpha_2}{\lambda_2}-1)N_1(t-).$$

また ρ_t を以下の確率微分方程式の解とする。

$$d\rho_t=\rho_{t-}(\sum_{k=1}^{2}x_k(t)dM_k(t)),\qquad \rho_0=1.$$

すると ρ_t は有界で正値なマルチンゲールとなる。さて Q を Ω 上の確率測度で $dQ=\rho_T dP$ なるものとする。すると

$$\tilde{M}_k(t)=N_k(t)-\int_0^t(1-N_k(s))\tilde{\lambda}_k(s)ds\qquad t\in[0,\ T],\quad k=1,2$$

は Q-$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\ T]}$-マルチンゲールとなる。ただし,

$$\tilde{\lambda}_1(t)=\lambda_1(1-N_2(t))+\alpha_1 N_2(t),$$
$$\tilde{\lambda}_2(t)=\lambda_2(1-N_1(t))+\alpha_2 N_1(t)$$

である。ここで命題5を適用することにより

$$x_1^{(1)}(t)=x_1(t),\qquad x_2^{(1)}(t)=0,\qquad a.e.t\in[0,\ T].$$

が成り立ち, $N_2(t)-\int_0^t(1-N_2(s))\lambda_2 ds$ が $Q^{(1)}$-$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\ T]}$-マルチンゲールであることが分かる。ゆえに以下のことが成立する。

$$Q^{(1)}(\tau_2>t|\mathcal{F}_s)=(1-N_2(s))\exp(-\lambda_2(t-s)),\qquad t,s\in[0,\ T]\ \text{with}\ s<t.$$

また, 系1により任意の $s<t$ なる $s,t\in[0,\ T]$ に対して以下の関係式が α_2 には依存せずに成り立つ。

$$Q(\tau_1>t|\mathcal{F}_s)=(1-N_1(s))E^{Q^{(1)}}[\exp(-\int_s^t du(1+x_1^{(1)}(u))\lambda_1)|\mathcal{F}_s^{(1)}]$$
$$=(1-N_1(s))\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2-\alpha_1}(\lambda_2\exp(-\alpha_1(t-s))+(\lambda_1-\alpha_1)\exp(-(\lambda_1+\lambda_2)(t-s))).$$

同様に以下の関係式を得る。

$$Q(\tau_2>t)$$
$$=\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2-\alpha_2}(\lambda_1\exp(-\alpha_2 t)+(\lambda_2-\alpha_2)\exp(-(\lambda_1+\lambda_2)t),\qquad t\in[0,\ T]$$

ここで $\alpha_2=\lambda_2$ の場合には

$$Q(\tau_2>t)=\exp(-\lambda_2 t),\qquad t\in[0,\ T]$$

が成り立ち, また

$$Q(\tau_2 > t) \to \exp(-(\lambda_1+\lambda_2)t), \qquad t \in [0, T], \qquad \text{as } \alpha_2 \to \infty.$$

が成り立つことに注意する。

すると

$$E^Q[\exp(-\int_0^t \tilde{x}_1(s)ds)] = E^Q[\exp(-\lambda_1(t\wedge\tau_2) - \alpha_1(t - t\wedge\tau_2))],$$

により，一般には $\lambda_1 \neq \alpha_1$ の場合には

$$Q(\tau_1 > t) \neq E^Q[\exp(-\int_0^t \tilde{x}_1(s)ds)]$$

となることが分かる。

4　フィルターリングモデル

この章では Duffie-Lando ［1］により紹介されたフィルターリングモデルについて考察する。まず $(\Omega, \mathcal{B}, \{\mathcal{B}_t\}_{t\in[0,T]}, P)$ を通常の仮定を満たすフィルトレーションをもつ完備確率空間とする。(B_t, B'_t), $t\in[0, T]$ を 2 次元 $\{\mathcal{B}_t\}_{t\in[0,T]}$-ブラウン運動とする。$\sigma_i : [0, T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $i=0, 1$, $b_0 : [0, T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を有界で滑らかな関数として $x_0>0$, $y_0\in\mathbf{R}$ とする。そこで，以下の確率微分方程式を考える。

$$dX_t = \sigma_0(t, X_t)dB_t + b_0(t, X_t)dt, \qquad X_0 = x_0.$$

ここで

$$\tau = \inf\{t\in[0, T]\,;\, X_t = 0\}$$

と置き，以下の確率微分方程式を考える。

$$dY_t = \sigma_1(t, Y_t)dB'_t + b_1(t, X_{t\wedge\tau}, Y_t)dt \qquad Y_0 = y_0$$

ただし $c_0>0$ が存在して以下のことが成り立つことをここでは仮定する。

$$\sigma_i(t, x) \geq c_0, \qquad t\in[0, T],\ x\in\mathbf{R},\ i=1,\ 2.$$

また

$$\mathcal{G}_t = \sigma\{Y_s\,;\, s\in[0, t]\} \qquad t\in[0, T],$$
$$\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \sigma\{\tau\wedge t\} \qquad t\in[0, T].$$

と置く。

ここで前章までの結果を応用することにする。

$$F_i(t, x) = \int_0^x \sigma_i(t, y)^{-1}dy, \qquad y\in\mathbf{R},\ i=0, 1.$$

と置くと，$F_i(t,\cdot) : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $i=0,\ 1$ は可微分同相写像である。

$t\in[0, T]$ に対して $\tilde{X}_t=F_0(t, X_t)$, $\tilde{Y}_t=F_1(t, Y_t)$ と置くと以下の関係式を得る。

$$d\tilde{X}_t=dB_t+\beta_0(t, \tilde{X}_t)dt, \qquad \tilde{X}_0=\tilde{x}_0$$
$$d\tilde{Y}_t=d\tilde{B}_t+\beta_1(t, \tilde{X}_{t\wedge\tau}, \tilde{Y}_t)dt, \qquad \tilde{Y}_0=\tilde{y}_0.$$

ただし

$$\beta_0(t, F_0(t, x))=\frac{\partial F_0}{\partial t}(t, x)+\sigma_0(t, x)^{-1}b_0(t, x)+\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_0}{\partial x}(t, x),$$

$$\beta_1(t, F_0(t, x), F_1(t, y))=\frac{\partial F_1}{\partial t}(t, y)+\sigma_1(t, y)^{-1}b_1(t, x, y)+\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_1}{\partial y}(t, y),$$

$$\tilde{x}_0=F_0(0,\cdot)^{-1}(x_0), \qquad \tilde{y}_0=F_1(0,\cdot)^{-1}(y_0).$$

である。すると

$$\tau=\inf\{t\in[0, T]\,;\tilde{X}_t=0\}.$$

と

$$\mathcal{G}_t=\sigma\{\tilde{Y}_s\,;s\in[0, t]\} \qquad t\in[0, T].$$

が成り立つことが明らかに分かる。さて

$$\gamma(t, x, y)=\beta_1(t, x, y)-\beta_1(t, 0, y), \qquad t\in[0, T],\ x, y\in\mathbf{R},$$

$$\rho=\exp(-\int_0^T(\beta_0(\tilde{X}_t)dB_t+\gamma(t, \tilde{X}_{t\wedge\tau}, \tilde{Y}_t)d\tilde{B}_t)-\frac{1}{2}\int_0^T(|\beta_0(\tilde{X}_t)|^2+|\gamma(t, \tilde{X}_{t\wedge\tau}, \tilde{Y}_t)|^2)dt),$$

と置き, $\tilde{P}$ を $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率測度で $d\tilde{P}=\rho dP$ なるものとする。すると $\tilde{X}$ と $\tilde{Y}$ は $\tilde{P}$ の下で独立であり, $\tilde{X}_t$ と $\tilde{B}'_t=\tilde{Y}_t-\int_0^t\beta_1(s, 0, \tilde{Y}_s)ds$ は P-$\{\mathcal{B}_t\}_{t\in[0, T]}$-ブラウン運動である。ゆえに $\{\tilde{B}'_t\}_{t\in[0, T]}$ は $(\Omega, \{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0, T]}, \tilde{P})$ のブラウニアンベースであり, τ は $\tilde{P}$ の下で $\mathcal{G}_T$ と独立である。以上より確率測度 $\tilde{P}$ の下では, 条件 **(A-1)**-**(A-3)** と **(M-1)** と **(M-2)** は $d=1, N=1$ と置くことにより成り立つことが分かり, 以下の式も成り立つ。

$$\lambda(t)=-q(t)^{-1}\frac{d}{dt}q(t), \qquad t\in[0, T].$$

ただし

$$q(t)=\int_t^\infty ds\frac{\tilde{x}_0}{\sqrt{2\pi s^3}}\exp(-\frac{\tilde{x}_0^2}{2s}), \qquad t>0.$$

である。

また P と $\tilde{P}$ は同値な測度なので, 第 3 章の結果を適用することができる。

ここで

$$g(t, x, y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}(\exp(-\frac{(x-y)^2}{2t})-\exp(-\frac{(x+y)^2}{2t})), \qquad t>0,\ x, y>0$$

と置く。これは Dirichlet 境界条件付きの熱方程式の基本解である。すると以下が成り立つ。

$$q(t)=\int_0^\infty dy\ g(t,\ \tilde{x}_0,\ y), \qquad t>0.$$

ここで以下の事に注意する。

$$\frac{\partial}{\partial x}\log g(t,\ x,\ y)=-\frac{x-y}{t}+\frac{1}{x}\varphi\left(\frac{2xy}{t}\right), \qquad x,\ y>0,\ t>0$$

ただし $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は

$$\varphi(x)=\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}, \quad x\neq 0, \quad \text{and} \quad \varphi(0)=1$$

で与えられる滑らかな関数である。

さて $Z(t)=Z_{0,x}^{s;y}(t),\ t\in[0,\ s),\ x>0,\ y\geq 0,\ s>0$ を以下の確率微分方程式とする。

$$dZ(t)=dB_t-\frac{Z(t)-y}{s-t}dt+\frac{1}{Z(t)}\varphi\frac{2Z(t)y}{s-t}dt, \quad t\in[0,\ s), \qquad Z(0)=x.$$

すると任意の $x>0,\ y\geq 0$, と $s>0$ に対して，以下の性質が P-a.s. に成立することが分かる。

(i) $\inf_{t\in[0,u]} Z_{0,x}^{s;y}(t)>0, \qquad u\in[0,\ s),$

(ii) $Z_{0,x}^{s;y}(t)\to y, \qquad t\uparrow s.$

それゆえに $Z_{0,x}^{s;y}(s)=y$ と定義する。

さて任意の $x>0,\ y\geq 0,\ s>0$ に対して $\upsilon_{0,x}^{s;y}$ を P に関する $\{Z_{0,x}^{s;y}(t)\}_{t\in[0,\ s]}$の確率法則とする。これは $C([0,\ s]\,;\mathbf{R})$ 上の確率測度である。

すると，以下の命題を得る。

命題 9　任意の $s\in[0,\ T]$ と有界連続関数 $f:C([0,\ s]\,;\mathbf{R})\to\mathbf{R}$ に対して以下の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&E^{\tilde{P}}[f(\{\tilde{X}_{t\wedge\tau}\}_{t\in[0,\ s]})|\tau\wedge s] \\
&=1_{\{\tau>s\}}q(s)^{-1}\int_0^\infty dy\ g(s,\ \tilde{x}_0,\ y)\int_{C([0,s];\mathbf{R})}f(w)\upsilon_{0,\tilde{x}_0}^{s,y}(dw) \\
&\qquad +1_{\{s\geq\tau\}}\int_{C([0,\tau];\mathbf{R})}f(\psi_{\tau,s}(w))\upsilon_{0,\tilde{x}_0}^{\tau,y}(dw)
\end{aligned}$$

ただし $\psi_{t,s}(w)$ は，$\psi_{t,s}(w)(u)=w(u),\ u\in[0,\ t],\ \psi_{t,s}(w)(u)=0,\ u\in(t,\ s]$ で定義されるものである。

この命題の系として，以下の命題を得る。

命題10　任意の $t\in[0,\ T]$ に対して以下の関係式が成り立つ。

$$\rho_t = E^{\tilde{P}}[\frac{dP}{d\tilde{P}}|\mathcal{F}_t]$$

$$=1_{\{\tau>t\}}q(t)^{-1}\int_0^\infty dy\ g(t,\ \tilde{x}_0,\ y)\int_{C([0,t];\mathbf{R})}G(t,\ w\ ;\ \tilde{Y})\nu_{0,\tilde{x}_0}^{t,y}(dw)$$

$$+1_{\{t\geq\tau\}}\int_{C([0,\tau];\mathbf{R})}G(t,\ \psi_{\tau,t}(w)\ ;\ \tilde{Y})\nu_{0,\tilde{x}_0}^{\tau,0}(dw).$$

ただし

$$G(t,\ w\ ;\ \tilde{Y})$$

$$=\exp(\int_0^t(\beta_0(s,\ w(s))dw(s)+\gamma(s,\ w(s),\ \tilde{Y}_s)d\tilde{B}'_s)$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t(|\beta_0(w(s))|^2+|\gamma(s,\ w(s),\ \tilde{Y}_s)|^2)ds),$$

である。

また特に ρ_t は以下の確率微分方程式を満たす。

$$d\rho_t = \rho_{t-}(h(t)d\tilde{B}'_t + x(t)dM_t).$$

ただし

$$M_t = N_t - \int_0^t(1-N_s)\lambda(s)ds, \qquad N_t = 1_{\{t\geq\tau\}},$$

$$h(t)=\rho_{t-}^{-1}1_{\{\tau\geq t\}}q(t)^{-1}\int_0^\infty dy\gamma(t,\ y,\ \tilde{Y}_t)g(t,\ \tilde{x}_0,\ y)\int_{C([0,t];\mathbf{R})}G(t,\ w\ ;\ \tilde{Y})\nu_{0,\tilde{x}_0}^{t,y}(dw),$$

$$x(t)=1_{\{\tau\geq t\}}(\rho_{t-}^{-1}\int_{C([0,t];\mathbf{R})}G(t,\ w\ ;\ \tilde{Y})\nu_{0,\tilde{x}_0}^{t,y}(dw)-1)$$

である。

注意 1　命題 6 により，$N_t - \int_0^t(1+x(s))\lambda(s)ds$ が P の下でマルチンゲールとなる。ここで

$$\frac{d}{dt}q(t) = -\lim_{y\downarrow 0}\frac{1}{2y}g(t,\ \tilde{x}_0,\ y)$$

に注意すると以下の事が $\{\tau > t\}$ では成立する。

$$(1+x(t))\lambda(t)=\lim_{x\downarrow 0}\frac{1}{2x}\frac{\tilde{P}(\tilde{X}t\in dx|\mathcal{F}_t)}{dx}$$

これは当然の事ながら Duffie-Lando [1] の結論と一致する。ところが(1)は $x(t)$ なる項の存在により，一般には成立しないと思われる。

[付記：本論文を書くにあたり，吉田朋広，青沼君明，乾孝治の各氏より貴重なコメントを頂いた。特に記して謝意を表わす。]

（東京大学大学院数理科学研究科教授）
（訳者　東京大学大学院数理科学研究科博士課程）

参 考 文 献

[1] D. Duffie and D. Lando, Term Structures of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information, Preprint (1997).

[2] D. Duffie, M. Schroder and C. Skiadas, Recursive Valuation of Defaultable Securities and the Timing of Resolution of Uncertainty, *Annals of Applied Probability* **6** (1996), 1075-1090.

[3] D. Duffie and K. Singleton, Modelling Term Structures of Defaultable Bonds, Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.

[4] R. Jarrow and S. Turnbull, Pricing Options on Financial Securities Subject to Default Risk, *Journal of Finance* **50** (1995), 53-86.