Title	完備資産市場における確率の異質性
Sub Title	Heterogenous probabilities in complete asset markets
Author	Calvet, L. Grandmont, J. M. Lemaire, I 古川, 徹也
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1999
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.92, No.3 (1999. 10) ,p.463(7)- 476(20)
JaLC DOI	10.14991/001.19991001-0007
Abstract	
Notes	小特集：経済の数理解析
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19991001-0007

「三田学会雑誌」92巻3号（1999年10月）

完備資産市場における確率の異質性*

L. カルヴェ
J.-M. グランモン
I. ルメール
訳 古川徹也

序

個人の特徴づけ（嗜好，初期保有量）に関する分布が任意であるとき，競争的一般均衡モデルは，（ワルラス法則や貨幣錯覚に至るまで）ほぼ任意の集計的な行動を生みだすことが可能であるという意味で，実証的な内容をほとんど含まないということはよく知られている。しかし最近，異質性こそが，実証的な側面の助けとなることが示されている。(Grandmont (1992)，Quah (1997)。）とくに，各主体が $u(x_1, \ldots, x_n)$ の形の効用（x_h：財 h の消費量）を最大化するならば，それぞれの財の単位をある方法で測り直すかぎり同じ嗜好をもつ主体のクラスとして考えることができる。測り直しとは，パラメータ $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ を任意としたとき，$u(e^{\alpha_1}x_1, \ldots, e^{\alpha_n}x_n)$ の形の効用関数を最大化する主体を同じ嗜好を持つとして考えるということである。このとき，言うなれば，もしベクトル α に関するクラスの分布が大きなサポートをもつ一様分布に十分近い場合，所得が価格から独立であるならば，このクラスでの集計的支出は価格変動に対してほぼ非感応的になる。この特徴は，加法性が存在するとき，異なるクラス，とくに根本的に異なる嗜好を持つクラスに関して集計する場合には保たれる。実際，各主体の初期保有量を市場価値で換算した所得が価格に依存するときには，完全競争的交換経済においては，それは粗代替性をもつ集計的超過需要を生じさせ，同時に均衡の一意性と安定性を含んでいる。

---

* この論文は，*Advances in Mathematical Economics*, volume 1, pp. 3-15 Springer-Verlag, 1999 に英文で掲載されたものを出版社の許可を得て日本語訳したものです。原題 “Heterogenous probabilities in complete asset markets”。

本稿の目的は，完備資産市場における異質性から得ることができる利益について検討することである。完備資産市場とは，結局完全競争市場のひとつの特別な形であり，したがってこの序文のはじめにおいて暗黙のうちに述べた類の批判に潜在的にさらされるものである。我々は，標準的な1期間の資産選択問題を考察する。y_s を状態 s における所得，π_s を状態 s に対する主観的な確率としたとき，各主体は期待効用 $\sum_s \pi_s u(y_s)$ を最大化する。またここでは，各主体間の異質性に関する1つの本質的な原因，すなわち主観的確率 π_s の異質性に焦点を絞るが，その理由は2つある。1つは，上に述べた「測り直し」の方法が，この文脈ではもはや適切ではないからである。なぜなら，そのような方法では，$\sum_s \pi_s u(e^{-a_s} y_s)$ という状態に依存する形での効用を最大化することになるが，これは金融のモデルでは受け入れられない。（本文中では状態に依存する効用を認めることとするが，資産選択の「純粋」モデルに適用可能であるようにすべての分析を行いたいと思っている。）第2に（こちらのほうが重要であるが），主観的確率の異質性は，いままでほとんど研究されてこなかったが，もっとも重要な仮定であるように我々には思われるし，また過去の文献の中でいわゆる理論的「パズル」と呼ばれてきたいくつかの問題に対するもっともらしい説明を与えるかもしれない。

我々は，個人の主観的確率の分布における異質性が，いわゆる「アロー＝ドブリュー」証券，すなわち所得が価格に依存しないときに，それらの価格の変動に対して非感応的であるような証券に対する集計的支出を生みだすことを示す。このためには，相対的危険回避度がもっとも高くなる主体において，異質性は最大でなければならない。この結論の鍵となる部分は，個人の支出の資産価格に関する偏微係数と，主観的確率に関する偏微係数とを結びつける関係である。またそれは，ここでは利用可能ではないけれども，すでに上で述べた測り直し変換に関して研究され発展された方法に適用可能である。この事実の帰結は，各主体の所得がそれぞれの初期保有量を市場価値で評価したものであるような競争的経済における資産取引において，アロー＝ドブリュー証券は粗代替的ということである。このことはとくに均衡の一意性と安定性を含み，また集計量としては顕示選好の弱公準を満たす。

第1節では，個人の1期間の資産選択問題について考察する。そして，主観的確率の変動がどのように最適選択に影響を与えるかについて検討する。第2節では，危険回避度が大きい主体間の主観的確率に関する異質性が，いかにして集計的支出を価格に対して非感応的にするかについて示す。資産市場における競争的交換均衡に対する含意を，第3節で検討する。

1　資産選択

標準的な1期間の資産選択問題を考える。個人は今期に $b>0$ の所得をもち，それを $j=1, \dots, n$ で名付けられた金融資産に投資する必要がある。1単位の資産 j は，来期に，そのときの様々な状態 s に応じて d_{sj} の所得（会計上の単位あるいは同様にはかられたもの）を生む。x_j を購入された資

産 j の単位数，p_j をその資産の単位価格とすると，主体の今期の予算制約は $\sum_j p_j x_j = b$ であらわされる。資産の組み合わせ $x=(x_j)$ は，それぞれの状態において $y_s = \sum_j d_{sj} x_j$ の所得を生む。ここで，それぞれの状態 s における所得が非負である，すなわち $y_s \geq 0$ という制約を課し，π_s を状態 s に対する主観的確率としたとき，主体の目的は彼の所得に関する期待効用 $\sum_s \pi_s u_s(y_s)$ を最大化することであると仮定する。さらに，分析全体において以下のことを仮定する。

(1.a) それぞれの（状態依存的でもありうる）von Neumann-Morgenstern の効用関数 $u_s(y)$ は，$y \geq 0$ に対して定義され，かつ連続であり，$y>0$ において 2 回連続微分可能で，$u_s'(y)>0$, $u_s''(y)<0$ であるとする。また，$\lim_{y \to 0} u_s'(y) = +\infty$, $\lim_{y \to +\infty} u_s'(y) = 0$ であるとする。

最初に，モデルを標準的な資産選択モデル，すなわち効用は状態から独立と仮定するモデルとして解釈するが，状態に依存する効用も許すこととする。なぜなら，なんらかの事象（例えば病気）が生じることによって個人の厚生に影響を与えるような証券の問題に対しても分析が適用可能だからである。所得が 0 へと収束する（あるいは無限大へとむかう）につれて限界効用が無限大へと発散する（あるいは 0 へと収束する）という仮定は，端点解を避けるための簡単化の仮定であり，おそらく（細かく検討していないが），適当な稲田条件によっておきかえられる。

ここでは完備な市場を仮定する。すなわち，利得行列 $D=(d_{sj})$ は $n \times n$ であり，$n \geq 2$ で階数は n である。よく知られているように，裁定取引の機会が存在しないことは，以下の条件を満たす状態価格 $q_s>0$ が存在することを含んでいる。すなわち，それぞれの資産 j が $\sum_s q_s d_{sj} = p_j$ にしたがって評価されるような価格である。したがって，状態 s に対応する**アロー＝ドブリュー証券**，すなわち，1 単位あたりの価格が $q_s>0$ であるとき，状態 s では 1 単位の所得を生み出すが，それ以外の状態では 0 であるような証券に対する需要として，$y_s \geq 0$ は解釈可能である。このとき，資産の組み合わせ $x=(x_j)$ の選択は，予算制約 $\sum_s q_s y_s = b$ のもとで，期待効用を最大化するようなアロー＝ドブリュー証券に対する需要ベクトル $y=(y_s)$ を選択することと等しくなる。

この節のねらいは，**アロー＝ドブリュー証券に対する個人需要** $y_s(q, b, \pi)$，あるいは対応する**支出** $w_s(q, b, \pi) = q_s y_s(q, b, \pi)$ に関するいくつかの性質，とくに主観的確率 $\pi=(\pi_s)$ の関数としての性質を検討することである。より明確に述べると，一般性を失うことなく，確率に課せられた $\sum_s \pi_s = 1$ という制約をゆるめ，ベクトル π の各要素が，互いに独立に，自由に動くことを仮定する。そのとき，最適支出はベクトル π に関して 0 次同次となる。我々の目的は，ベクトル π の各要素の変化がこれらの支出に与える影響と，状態価格 $q=(q_s)$，あるいは所得 $b>0$ の変動がこれらの支出に与える影響との間のいくつかの簡単な関係を確立することである。

これらの関係の基礎を理解するために，それぞれの（状態依存的であることもありうる）効用の弾力性が一定である場合について見ることにする。主体の問題は，そのとき，$\sum_s w_s = b$ を制約と

する $\sum_s \pi_s u_s(w_s/q_s)$ の最大化問題として再構築できる。ただし，相対的危険回避度 $\rho_s \neq 1$ のとき，

$$\pi_s u_s(w_s/q_s) = \frac{\pi_s}{1-\rho_s}\left(\frac{w_s}{q_s}\right)^{1-\rho_s} \tag{1.1}$$

である。(相対的危険回避度が1のとき，すなわち $u_s(y) = \log y$ のときは，連続性によって通常のように扱うことができる。) 以下のことは明らかである，すなわち，q_s を λq_s に変化させることは，π_s を $\pi_s/\lambda^{(1-\rho_s)}$ に変化させることに等しい。すなわち，状態価格 q_s の1%の上昇の効果は，ベクトル π の要素である π_s の $(1-\rho_s)$ %の低下の効果に等しいということである。実際，効用の一般的な特徴づけである $u_s(y_s)$ も，局所的には同様の性質をもつ。

補題1.1 仮定 (1.a) のもとで，ベクトル π の要素 $\pi_s > 0$ を，$\sum_s \pi_s = 1$ を課すことなく互いに独立に動かすことが可能であるとする。このとき，アロー＝ドブリュー証券に対する最適な支出 $w_s(q, b, \pi) > 0$ は，連続微分可能で，(q, b) に関して1次同次，π に関して0次同次，予算の恒等式 $\sum_s w_s(q, b, \pi) \equiv b$ を満たすものである。さらに，相対的危険回避度をあらわす係数を $\rho_s(y) = -yu''_s(y)/u'_s(y)$ のように定義し，$\rho_s \equiv \rho_s(y_s(q, b, \pi))$，$w_s \equiv w_s(q, b, \pi)$ とあらわすこととすると，

$$\frac{\partial w_r}{\partial \log q_s} + (1-\rho_s)\frac{\partial w_r}{\partial \log \pi_s} \equiv 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial w_r}{\partial \log \pi_s} \equiv \frac{w_r}{\rho_r}\left(\delta_{rs} - \frac{\partial w_s}{\partial b}\right) \tag{1.3}$$

が成立する。ここで，δ_{rs} はクロネッカーのデルタ，すなわち $r=s$ のときに $\delta_{rs}=1$ であり，それ以外の場合にはゼロとなる指標である。また，

$$\frac{\partial w_s}{\partial b} \equiv \frac{w_s/\rho_s}{\sum_i w_i/\rho_i} \tag{1.4}$$

である。

証明 最適支出は内点であり ($w_s > 0$)，かつそれは予算制約と，1階の条件，すなわち任意の $r \neq s$ に対して，

$$\frac{\pi_s}{q_s}u'_s\left(\frac{w_s}{q_s}\right) = \frac{\pi_r}{q_r}u'_r\left(\frac{w_r}{q_r}\right) \tag{1.5}$$

によって特徴づけられる。

最適支出が連続微分可能であることは，陰関数定理によって導かれる。(1.2) 式を証明するために，w_r, w_s が (q, b, π) の関数であるとき，(1.5) 式は恒等式であることに注意が必要である。(1.5) 式 (の対数) を $\log \pi_s$ と $\log q_s$ に関して微分することによって，任意の $r \neq s$ に対して，

$$\frac{\rho_s}{w_s}\frac{\partial w_s}{\partial \log \pi_s}-1=\frac{\rho_r}{w_r}\frac{\partial w_r}{\partial \log \pi_s}$$
$$\frac{\rho_s}{w_s}\frac{\partial w_s}{\partial \log q_s}+1-\rho_s=\frac{\rho_r}{w_r}\frac{\partial w_r}{\partial \log q_s}$$

が得られる。

1行目を$(1-\rho_s)$倍して2行目に加えることで，以下の（1.6）式が得られる。

$$\frac{\rho_s}{w_s}\left[\frac{\partial w_s}{\partial \log \pi_s}(1-\rho_s)+\frac{\partial w_s}{\partial \log q_s}\right]=\frac{\rho_r}{w_r}\left[\frac{\partial w_r}{\partial \log \pi_s}(1-\rho_s)+\frac{\partial w_r}{\partial \log q_s}\right] \tag{1.6}$$

ここで，予算に関する恒等式より，

$$\sum_r\left[\frac{\partial w_r}{\partial \log \pi_s}(1-\rho_s)+\frac{\partial w_r}{\partial \log q_s}\right]=0 \tag{1.7}$$

が得られる。(1.6) 式が意味するのは，(1.7) 式の括弧内の要素がすべてのrに関して同じ符号をもつことである。したがって，それぞれはすべて0となる必要があり，すなわちこれは (1.2) 式が成立することを示している。(1.3) (1.4) も同様に示すことができるが，詳細は読者に譲る。(証明終)

2　市場需要

上の主張は，部分的には，いくつかの標準的な「教科書」の結論を再構築したものである。効用関数が分離可能であることによって，アロー＝ドブリュー証券は正常財である($\partial w/\partial b>0$)。状態sに対応する証券の個人需要は，他の状態に関する主観的確率が低下したり，その状態に関する主観的確率が上昇したとき増加する。($r\neq s$のとき$\partial w_r/\partial \log \pi_s<0$，$r=s$のとき$>0$。）これらの性質は加法的であり，各主体が異なる特徴を持っているときや，すべての所得，あるいはある状態におけるすべての主観的確率が同じ方向に変化するときには保存される。しかし，このことは集計的需要に関するこれ以上の構造を生み出さない。

我々がより興味をもつ1つの性質は**粗代替性**である。上に述べた（1.2）式の主張は，他の標準的な教科書の結果（たとえばMas-Colell, Whinston, Green (1995), p. 612を見よ）を確認するものである。すなわち，もし主体が期待効用の最大化を目指すものであり，また危険回避度が低いときには，完備市場におけるアロー＝ドブリュー証券に対する個人需要はこの性質（すなわち$r\neq s$のとき，$\partial w/\partial \log q_s>0$）を持つということである。またさらに，**すべての**主体の危険回避度が低ければ（すなわち任意のsに関して$\rho_s<1$)，粗代替性は加法的な性質となり集計的需要にもこの性質は保存される。しかしこの条件はたいへん強い。

この節では，とくに，個々の主体の主観的確率に関する非常に大きな異質性が，アロー＝ドブリュー証券への集計的支出の状態価格に対する感応性を低下させる傾向がある，ということを示

す。このために鍵となる関係式は上に述べた（1.2）式である。この式は，個人支出の状態価格に関する偏微係数を，確率に関する偏微係数にむすびつけるものである。このことによって，Grandmont（1992）において研究が進められた集計問題に関する方法を用いることができる。その結果次の節で示されるように，各個人の所得がそれぞれの初期保有量の市場価値によって与えられるような，資産に関する交換経済において，アロー＝ドブリュー証券に対する集計的需要は，主観的確率の異質性が非常に大きいときには粗代替性を満たすことが言える。

主体の母集団を以下のように定義する。まず「タイプ」の集合 A を，問題を絞るために**分離可能な距離空間**とする。A の要素であるタイプ a は，（状態に依存しうる）効用関数 $u_{as}(y)$ によって特徴づける。この効用関数は，仮定（1.a）を a を含めた形で拡張した以下の仮定を満たすものとする。

（2.a）それぞれの状態 s と，A におけるそれぞれのタイプ a に対して，効用関数 $u_{as}(y)$ は仮定（1.a）を満たす。さらに $u_{as}(y)$ は，その偏微係数と同様に，(a, y) 両方に関して連続である。

前の節と同じ市場の状況を考える。とくにタイプ a の主体は，価格から独立の所得 $b_a>0$ をもつ。異なるタイプでの母集団の分布は，A 上の確率分布 μ によって特徴づける。問題を簡単化するために，μ は**コンパクトなサポート**を持つものとする。（この点は，いくらかの技術的な問題を克服すれば取り除くことができる。）

（2.b）A におけるそれぞれのタイプ a は，所得 $b_a>0$ をもつ。それは a に関して連続である。集計した所得（より正確には平均所得）は，$\int_A b_a\mu(da)=\bar{b}$ である。

すべての主体は同じ価格システム p_j に直面し（市場は競争的である），また**彼らすべては同じ利得行列 $D=(d_{sj})$ を予想している**と仮定する。裁定の機会がないときには，このことは彼らすべてが，背後にある同じ状態価格システム $q=(q_s)$ に直面していることを含んでいる。しかし各主体は，それぞれの状態に対する主観的な確率分布 $\pi=(\pi_s)$ に関しては異なりうる。初期時点で主観的確率分布が $\pi=(\pi_s)$ であるようなタイプ a の主体は，前の節で説明したように，実際に $w_{as}(q, b_a, \pi)$ であらわされるようなアロー＝ドブリュー証券への支出を選択する。上に述べた仮定のもとでは，これらの支出は，それらの偏微係数と同様に，(a, q, b_a, π) すべてに関して同時に連続である。

前の節より，適切な変数は確率それ自体ではなくそれらの対数である。このことにしたがって，主観的確率を以下のようにパラメータ化することにする。

$$\pi_s(\gamma)=e^{\gamma_s}/(\sum_r e^{\gamma_r}) \tag{2.1}$$

確率の和は1であるから（あるいは，それと同値であるが，個人支出 $w_{as}(q, b_a, \pi)$ は π に関して0次同次であるから），パラメータ γ_s を何らかの方法で規準化する必要がある。一般性を失うことなく，$\gamma_n=0$ とおき，そしてタイプ a の主体の主観的確率の分布を，残りのパラメータ γ のベクトル上の確率分布によって表現することにする。

(2.c) $\gamma_n=0$。タイプ a の主体の主観的確率の分布は，R^{n-1} 次元のパラメータのベクトル $\gamma=(\gamma_1, ..., \gamma_{n-1})$ の分布によって表現される。その分布を $f(\gamma|a)$ であらわし，それは (γ, a) 両方に関して連続である。(1)

このとき，以下の式を得る。

$$w_{as}(q, b_a, \pi(\gamma))=w_{as}(q, b_a, \gamma_1, ..., \gamma_{n-1}, 0)\overset{\text{def}}{=}w_{as}(q, b_a, \gamma) \tag{2.2}$$

このようにあらわすことで，**タイプ a のすべての主体に関するアロー＝ドブリュー証券に対する条件付き集計的支出**は，以下の式によって与えられる。

$$W_{as}(q, b_a)=\int w_{as}(q, b_a, \gamma)f(\gamma|a)d\gamma \tag{2.3}$$

また，すべてのタイプを集計することによって，集計的支出の総計が以下の式によって得られる。

$$W_s(q)=\int_A W_{as}(q, b_a)\mu(da) \tag{2.4}$$

集計的価格効果

タイプ a の主体の主観的確率の分布における，ある特別な意味で測られた大きな異質性が，アロー＝ドブリュー証券に対する集計的支出 $W_{as}(q, b_a)$ を，状態価格のシステム q に関する変動に対して非感応的にする傾向があることを示す。

ここで必要な異質性に関する正確な尺度は，以下の仮定によって与えられる。

(2.d) それぞれのタイプ a に対して，密度関数 $f(\gamma|a)$ は連続微分可能であり，その偏微係数

(1) この形式は，それぞれのタイプ a において，主体が連続的であることを仮定するものである。たとえば，タイプ a の主体の母集団において無作為に分布するベクトル γ を仮定し，大数の法則をあてはめ，そして極限をとることの結果である。有限母集団の場合は，J. Quah (1997) によって導入された方法によって取り扱うことができる。

は (γ, a) 両方に関して連続である。さらに，$s=1, \ldots, n-1$ に対して，

$$\int\left|\frac{\partial f}{\partial \gamma_s}(\gamma|a)\right|d\gamma=m_{as}<+\infty$$

が成立し，また $s=n$ に対しては，

$$\int\left|\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial \gamma_s}(\gamma|a)\right|d\gamma=m_{an}^{(2)}$$

が成立する。

係数 m_{as} は，様々な方向にそった密度の全変動の尺度である。大きな異質性は，小さな係数 m_{as} を意味する。その場合，分布は大きな変動を持つだけではなく，密度は「平板」，すなわち一様分布に（C^1 形式において）近いものである。対称性より，$s=n$ に対して導入された最後の係数は $m_{an}<\sum_{s=1}^{n-1} m_{as}$ を満たし，そして他の係数が小さいときには，つねにそれにしたがって小さくなる。

我々の仮定のもとでは，タイプ a のすべての主体の集計的支出は連続微分可能であり，ライプニッツの法則より，

$$\frac{\partial W_{ar}}{\partial \log q_s}(q, b_a)=\int\frac{\partial w_{ar}}{\partial \log q_s}(q, b_a, \gamma)f(\gamma|a)d\gamma$$

が成立する。

次に補題1.1の（1.2）を積分の符号内のそれぞれの要素にあてはめる。ρ_{am} と ρ_{aM} を相対的危険回避度 $\rho_{as}(y)=-yu''_{as}(y)/u'_{as}(y)$ の下限と上限とする。（有限であることを仮定する。）$r\neq s$ であれば，$\partial w_{ar}/\partial \log \pi_s<0$ であることはわかる。そのとき，（1.2）は，（2.3）を利用すると，以下の（2.5）式を含んでいる。

$$(1-\rho_{aM})B\leq\frac{\partial W_{ar}}{\partial \log q_s}(q, b_a)\leq(1-\rho_{am})B \tag{2.5}$$

ここで，$B>0$ は，$s\neq n$ のときには，

$$B=-\int\frac{\partial w_{ar}}{\partial \gamma_s}(q, b_a, \gamma)f(\gamma|a)d\gamma \tag{2.6}$$

であり，$s=n$ のときには，$B>0$ は（$w_{ar}(q, b_a, \pi)$ が π に関して 0 次同次であることと，それに対応するオイラー恒等式を用いれば），

（2）（2.c）（2.d）でおかれた連続性の仮定は，表現を簡単にするためにおかれたものである。この分析は，不連続な分布（たとえば一様分布）にも，いくらかの技術的なコストをはらえば（J. Quah (1997) を見よ），同様にあてはめることができる。

$$B=-\int\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial w_{ar}}{\partial\gamma_s}(q,\,b_a,\,\gamma)f(\gamma|a)d\gamma \tag{2.7}$$

に等しい。(2.6) 式を部分積分すれば,

$$B=\int w_{ar}(q,\,b_a,\,\gamma)\frac{\partial f}{\partial\gamma_s}(\gamma|a)d\gamma$$

が得られ, 同様に (2.7) 式を部分積分すれば

$$B=\int w_{ar}(q,\,b_a,\,\gamma)\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial\gamma_s}(\gamma|a)d\gamma$$

となる。したがって, $s=1,\dots,n$ のすべてのケースに関して, 仮定 (2.d) によって $B>0$ は $b_a m_{as}$ を上限とすることがわかる。

$r=s$ のときには, $\partial w_{ar}/\partial\log\pi_r>0$ であることがわかる。したがって, 上の議論は $(-\partial W_{ar}(q,b_a)/\partial\log q_r)$ にもあてはまる。

命題2.1 (2.a) (2.b) (2.c) (2.d) を仮定する。タイプ a のすべての主体のアロー＝ドブリュー証券に対する集計的支出, すなわち $W_{as}(q,\,b_a)$ は連続微分可能である。ここで, $0\leq\rho_{am}$ と $\rho_{aM}<+\infty$ を, 所得 $y>0$ と, 状態 s に関する相対的危険回避度の下限と上限とする。そのとき, 任意の $r\neq s$ に対して,

$$(1-\rho_{aM})B\leq\frac{\partial W_{ar}}{\partial\log q_s}(q,\,b_a)\leq(1-\rho_{am})B \tag{2.8}$$

が成立する。ここで, $0<B\leq b_a m_{as}$ である。$r=s$ のときには, 上の不等式は $(-\partial W_{ar}(q,\,b_a)/\partial\log q_r)$ によって満たされる。

主観的確率の異質性がタイプ a の主体の間で大きいとき, すなわち係数 m_{as} が小さいとき, 集計的支出は状態価格の変動に対してより非感応的になることを上の結果は含んでいる。実際, 上の結果は「加法的」である。すなわち母集団に存在するすべてタイプに関して集計したときにも, それは保存される。大きな所得 b_a と大きな危険回避度をもつ主体において, 確率に関する異質性が大きいとき (すなわち係数 m_{as} が小さいとき), アロー＝ドブリュー証券への集計的支出の総計は, 状態価格に対してより非感応的になる。

系2.1 η_a を $|1-\rho_{am}|$ と $|1-\rho_{aM}|$ の最大値とする。そのとき, 母集団に存在する任意のタイプと任意の状態 r,s に対して,

$$\left|\frac{\partial W_{ar}}{\partial\log q_s}(q,\,b_a)\right|\leq\eta_a b_a m_{as} \tag{2.9}$$

が成立する。集計的支出の総計に対しては，

$$|\frac{\partial W_r}{\partial \log q_s}(q)| \leq \int_A \eta_a b_a m_{as} \mu(da) \tag{2.10}$$

が成立する。とくに，$\eta_a m_{as}$ が μ のサポートにおいて m_s を上限とするとき，

$$|\frac{\partial W_r}{\partial \log q_s}(q)| \leq \bar{b} m_s \tag{2.11}$$

が成立する。

3 交換均衡

ここでは，資産交換経済，すなわちすべての主体の所得 b_a は彼の初期保有量の市場価値であるような経済における競争均衡の存在，一意性，安定性に関して見いだしうることの意味について検討する。これは，Grandmont（1992）で述べられた方法と結果を直接適用することで達成される。

前の節での仮定はすべて満たされるとする。さらに，タイプ a のすべての個人は，ベクトル $\bar{x}_a$ であらわされる初期保有資産を持つ。したがって彼の所得は $b_a = \sum_j p_j \bar{x}_{aj}$ であらわされる。我々の仮定（各主体は同じ利得行列 D を期待している，完備市場，裁定の機会がない）のもとでは，このことは市場価値が $b_a = q\omega_a$ となるようなアロー＝ドブリュー証券 $\omega_a = D\bar{x}_a$ を，主体が初期時点で保有しているという仮定に等しい。以下では，ω_a は非負，非ゼロ，a に関して連続，そして集計するとすべてのアロー＝ドブリュー証券は正の量で存在していることを仮定する。

(3.a) 仮定（2.a）（2.b）（2.c）はそのまま満たされるとする。A のすべてのタイプは，アロー＝ドブリュー証券のベクトル ω_a を初期時点で保有している。ただし，$\omega_a \geq 0, \omega_a \neq 0$ で，ω_a は a に関して連続であるとする。集計された初期保有量は，すべての要素に関して正である，すなわち，$\int_A \omega_a \mu(da) = \bar{\omega} \gg 0$。

タイプ a のすべての主体のアロー＝ドブリュー証券に対する条件付き集計支出は，（2.3）式における b_a を $q\omega_a$ に置き換えることによって与えられる。すなわち，

$$W_{as}(q, q\omega_a) = \int w_{as}(q, q\omega_a, \gamma) f(\gamma|a) d\gamma \tag{3.1}$$

である。また，（2.4）に関しても上と同様にすることで，集計支出の合計が得られる。すなわち

$$W_s(q) = \int_A W_{as}(q, q\omega_a) \mu(da) \tag{3.2}$$

である。

競争的交換均衡は，アロー＝ドブリュー証券の正の価格ベクトル q^* として定義される。ただし q^* は，任意の状態 $s=1, \ldots, n$ に対して $W_s(q^*)=q_s^* \bar{\omega}_s$ を満たす。これに対応する本来の資産の価格システム $p^*=(p_j^*)$ は，利得行列を用いることで通常のように与えられる。すなわち $p_j^*=\sum_s q_s^* d_{sj}$ である。

ここでは，各主体の主観的確率に関して非常に大きな異質性が存在するとき，すなわち仮定 (2.d) で用いられたパラメータ (m_{as}) が小さいとき，均衡は一意で，任意の模索過程に関して安定的であることと，均衡価格ベクトル q^* との間でのように，顕示選好の弱公準が集計的には満たされることを示す。

考察を進めるために，主観的確率に関して十分な異質性があれば，アロー＝ドブリュー証券は集計的には粗代替的である，すなわち，任意の $r \neq s$ に対して，$\partial W_r(q)/\partial \log q_s>0$ が成立することに関して議論する。まず，(3.2) より，$\partial W_r(q)/\partial \log q_s$ が 2 つの項の和，すなわち

$$\frac{\partial W_r(q)}{\partial \log q_s}=\int_A \frac{\partial W_{ar}}{\partial \log q_s}(q, q\omega_a)\mu(da) + \int_A \frac{q_s \omega_{as}}{q\omega_a} \frac{\partial W_{ar}}{\partial \log b}(q, q\omega_a)\mu(da) \tag{3.3}$$

となることは明らかである。(μ がコンパクトなサポートを持つという仮定を思い出して欲しい。したがって，積分記号のもとでの微分は実際正しい。) 命題2.1と系2.2より，(3.3) の第 1 項は主観的確率の異質性が大きい場合に小さくなる。粗代替性を得るためには，第 2 項が，各主体の主観的確率の異質性の程度から独立に 0 より大きくならなければならない。ただし第 2 項は，正であることがわかっている。(分離可能な効用関数では，アロー＝ドブリュー証券は，(1.4) より正常財であり，この性質はミクロレベルからマクロレベルへと集計される。) この問題を扱ういくつかの方法があるが，ここでは，Grandmont (1992) のように，大まかに言えば，アロー＝ドブリュー証券に対する集計した予算の比率が 0 より大きいことを保証するという仮定をおくことで分析を進めることにする。同様の仮定もまた以下のことを保証するであろう。すなわち，再び主観的確率の異質性の程度から独立に，均衡証券価格 q^* が 0 より大きくなっているということである。

(3.b) 対数期待効用 $\sum_s \pi_{as} \log y_s$ をもつタイプの集合 A_0 が存在する。タイプ a の平均主観的確率を $\bar{\pi}_{as}=\int \pi_s(\gamma) f(\gamma|a) d\gamma$ で定義する。そのとき，任意の状態 s に対して，以下の条件を満たす $0<\varepsilon_s<1$ が存在する。すなわち，

$$\int_{A_0} \bar{\pi}_{ar}(q_s \omega_{as})\mu(da) \geq \varepsilon_r(q_s \bar{\omega}_s) \tag{3.4}$$

である。

上の（明らかに不完全な）仮定は，Grandmont（1992）の結果を直接あてはめることを可能にするために，特におかれたものである。

定理3.1　(3.a)（3.b）を仮定する。任意のタイプ a に対して，$\eta_a<+\infty$ を，任意の $y>0$ と任意の s に対する $|1-\rho_s(y)|$ の上限とする。また，$\eta_a m_{as}$ は，μ のサポートにおいて m_s によって上から抑えられるとする。このとき，以下の(1)から(4)の主張が成立する。

(1)アロー＝ドブリュー証券に対する均衡価格システム $q^*>>0$ が存在する。またそれは，$q^*\bar{\omega}_s\geq\varepsilon_s(q^*\bar{\omega})$ を満たす。

$GS(m,\varepsilon)$ を，以下の（3.5）を満たす価格 $q>>0$ の凸錐とする。

$$q_s\bar{\omega}_s(\varepsilon_r-\sum_i m_i)>m_s(q\bar{\omega}),\ \text{all}\ \ r\neq s \tag{3.5}$$

(2)価格システム q が $GS(m,\varepsilon)$ に含まれるとき，アロー＝ドブリュー証券は粗代替的である。すなわち，$r\neq s$ に対して，$\partial W_r(q)/\partial\log q_s>0$ が成立する。
(3)以下の（3.6）式を仮定する。

$$\varepsilon_s(\varepsilon_r-\sum_i m_i)>m_s,\ \text{all}\ \ r\neq s \tag{3.6}$$

このとき，$GS(m,\varepsilon)$ は，$q_s\bar{\omega}_s\geq\varepsilon_s(q\bar{\omega})$ を満たす価格 $q>>0$ の集合を含み，均衡価格ベクトル q^* は（スカラー倍を除いて）一意に決まる。
(4)アロー＝ドブリュー証券に対する集計的超過需要関数を，任意の s に対して $Z_s(q)=(W_s(q)-q_s\bar{\omega}_s)/q_s$ と定義する。このとき以下の（3.7）式

$$\varepsilon_s^2(\varepsilon_r-\sum_i m_i)>m_s,\ \text{all}\ \ r\neq s \tag{3.7}$$

は，均衡価格システム q^* と，q^* と相互に線形でない他の任意の価格ベクトル $q>>0$ との間に成立するように，集計量としては顕示選好の弱公準を含んでいる，すなわち $q^*Z(q)>0$ である。

証明　我々の仮定のもとでの均衡価格ベクトル p^* の存在は標準的な結果である。一方，以下の式が得られる。

$$W_s(q)\geq\int_{A_0}W_{as}(q,q\omega_a)\mu(da)=\int_{A_0}\bar{\pi}_{as}(q\omega_a)\mu(da)$$

したがって，(3.4）を用いると，$W_s(q)\geq\varepsilon_s(q\bar{\omega})$ がえられ，Grandmont（1992）の命題3.2を適用することができる。

(2) (3) (4) を証明するには，(3.3) 式を用いて，$\partial W_r(q)/\partial \log q_s$ の下限をまず探す。系2.2より，(3.3) の最初の積分は $-m_s(q\bar{\omega})$ を下限とする。第2項の下限を求めるには，$W_{as}(q, b_a)$ が価格と所得に関して1次同次であることに注意する。オイラー恒等式と系2.2を用いると，μ のサポートにおいて

$$\left|\frac{\partial W_{ar}}{\partial \log b}(q, b_a) - W_{ar}(q, b_a)\right| \leq b_a \eta_a \sum_i m_{ai} \leq b_a \sum_i m_i$$

が成立することを示せる。したがって，(3.3) 式の2番目の積分は，

$$\int_A q_s \omega_{as}[W_{ar}(q, q\omega_a)/q\omega_a]\mu(da) - (q_s \bar{\omega}_s)\sum_i m_i$$

を下限とする。(3.4) 式と仮定 (3.b) より，この積分自体が，

$$\int_{A_0}(q_s \omega_{as})\bar{\pi}_{ar}\mu(da) \geq \varepsilon_r(q_s \bar{\omega}_s)$$

を下限とする。したがって，$\partial W_r(q)/\partial \log q_s$ に対する下限は，$q_s\bar{\omega}_s(\varepsilon_r - \sum_i m_i) - m_s(q\omega_s)$ である。このことから，アロー＝ドブリュー証券への集計的支出が，$GS(m, \varepsilon)$ において，証券の価格 q に対して粗代替的であるということは明らかである。(3) (4) の主張は，Grandmont (1992) の定理3.3と同様にして直ちに得られる。(証明終)

上の結果は，以下のことを示すものである。すなわち，各主体の主観的確率の非常に大きな異質性が，どのようにしてアロー＝ドブリュー証券に対する粗代替性と顕示選好の弱公準を満たす集計的需要を生み出すかである。この異質性はまた，任意の種類の模索過程のもとで (一意の) 均衡の安定性を上昇させる。Grandmont (1992) の系3.4は，何ら変更を加えることなくここでの議論にあてはまるので，それを見て欲しい。

4 結　　論

本稿で示したことは，完備競争的資産市場において，主観的確率の異質性が，どのようにして，以下の性質をもつ粗代替的なアロー＝ドブリュー証券に対する集計的需要へと導くかである。その性質とはすなわち，交換均衡は一意であり，任意の模索過程に関して安定的であり，集計的には顕示選好の弱公準を満たしているというものである。この結果を得るためには，相対的危険回避度の大きな人々の間で異質性がもっとも高くなる必要がある。本稿で用いられた方法と得られた結果が，不完備資産市場のような不確実性を含んだり，保険市場のモデルに利用可能かどうかは検討課題である。

(ハーバード大学)
(CREST and CNRS)
(CREST-INSEE)
(訳者　東京国際大学経済学部専任講師)

参考文献

[1] Grandmont, J-M. (1992) Transformations of the Commodity Space, Behavioral Heterogeneity and the Aggregation Ploblem, *Journal of Economic Theory*, 57, 1-35.
[2] Mas-Colell, A., M.D. Whinston, J.R. Green (1995) *Microeconomic Theory*, Oxford University Press.
[3] Quah, J. (1997) The Law of Demand When Income Is Price Dependent, *Econometrica*, 65, 1421-1442.