Title	ワルラス均衡とシャプレー値配分
Sub Title	Walrasian equilibrium and shapley value allocation
Author	福岡, 正夫 須田, 伸一
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1999
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.92, No.2 (1999. 7) ,p.388(148)- 414(174)
JaLC DOI	10.14991/001.19990701-0148
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19990701-0148

「三田学会雑誌」92巻2号（1999年7月）

ワルラス均衡とシャプレー値配分

福　岡　正　夫*
須　田　伸　一

1

ワルラス流の競争均衡を，かならずしも明示的に価格を含まない他の配分概念によって特性づけようとするプログラムは，経済分析の歴史をつうじてこれまでにもいくつかのものが提唱されてきた。厚生経済学の基本定理として著名なパレート最適の概念による特性づけや，極限定理あるいは等値定理と呼ばれるコアの概念を用いた特性づけなどが，その典型例である。またナッシュ均衡の概念にもとづいたクールノーの着想なども，その系列に含めて考えることができるであろう。

これら，経済思想史上の巨人の名で人格化するとすれば，それぞれパレート，エッジワース，クールノーで代表される三つのアプローチにさらに加えて，より新しくはウィックスティードの名に因んだ第四のアプローチともみなしうるものが，最近注目すべき進展を示しているように思われる。この動向の端緒をなしたのは，1980年に始まるオストロイとマコウスキーの研究(1)であり，彼らはウィックスティードが1894年の古典『分配法則の統合』のなかで述べた限界生産力説のオイラーの定理すなわち完全分配命題を拡張解釈して，各個人が取引に参加することにより社会的効用の総和に

*　本稿を完成させるにあたって，筆者たちは匿名の評者のコメントから有益な示唆を受け，また筆者の一人須田は本塾学事振興資金から貴重な援助を恵与された。ここに記して，深甚の謝意を表しておく次第である。

（1）　オストロイ＝マコウスキーの所論については，下記の論文を参照されたい。

Joseph M. Ostroy, “The No-Surplus Condition as a Characterization of Perfect Competitive Equilibrium”, *Journal of Economic Theory,* April 1980,

Louis L. Makowski, “A Characterization of Perfectly Competitive Economies with Firms”, *Journal of Economic Theory,* April 1980,

L. Makowski and J. M. Ostroy, “The Existence of Perfectly Competitive Equilibrium a la Wicksteed”, in P. Dasgupta, D. Gale, O. Hart and E. Maskin eds., *Economic Analysis of Markets and Games : Essays in Honor of Frank Hahn,* 1992.

付加する貢献分をも広義の「限界生産力」と解し，その意味での限界生産力どおりの分け前を各自に与える配分を「無余剰配分」ないしは「限界生産力配分」と名づけて定型化した。そしてそのような配分が結局ワルラス均衡に一致することを，1980年の論文では有限で一定数のタイプに属する個人の数を一律に増加していった場合の極限定理として証明し，ついで1992年の共同論文では当初から無限の個人が連続体をなしている場合の等値定理として証明した。

ところがきわめて興味深いことに，このようなオストロイ＝マコウスキーの議論は，それに先立って，ウィックスティードの書物などとはまったく無関係に進展したゲーム理論の一分枝，シャプレーやオーマンのシャプレー値の理論と緊密に結びついているのである。事実オーマンは1975年の著名な招待講演論文(2)において，個人の集合が連続体をなしているノン・アトミックな経済では，そこでの取引を市場ゲームと考えた場合のシャプレー値，すなわちそれぞれの結託の総利得への各参加プレーヤーの貢献分の期待値，を各プレーヤーに与えるような配分はワルラス均衡の配分に一致すること，そしてそのような経済ではシャプレー値配分と前述の限界生産力配分，オーマンの用語では限界貢献度配分，とのあいだにはほとんど差がないことを明らかにした。つまりアプローチの仕方はまったく違っているものの，一方のオーマンと，他方彼と同様にノン・アトミックな経済を想定しているオストロイ＝マコウスキーの共同論文とは，目下の主題に関するかぎり，本質的にはまったく同じ内容に帰する問題を取り扱っているわけであり，それぞれ限界貢献度配分とワルラス均衡配分とが等値になるという共通の命題に対して互いに別証を与えているにすぎないのである。

筆者の一人はかねがね上記の動向に少なからぬ興味をもち，オストロイ＝マコウスキーの所説についてはすでに彼らの推論を自分なりに整理補足した論稿を2篇ほど書いた(3)。そこで今回は目をもっぱらオーマンに向けることにし，以下では彼の論文の数理構造を，省かれた推論部分をも補い，より十全な形で示すことに照準を定めた。そうした目論見であるからには，われわれの考察に格別の新貢献が含まれているわけではないが，にもかかわらずその種の作業が無益ではあるまいと思われたのは，オーマンの論文自体が数理の運用においてかならずしも自足的な体裁を具えていないからである。

実際そこでの彼の推論は，肝心の証明のかなりの部分を前に注記したオーマン＝シャプレーの著

(2) Robert J. Aumann, “Value of Markets with Continuum of Traders”, *Econometrica,* July 1975. この論文はもともと1972年12月に行なわれたエコノメトリック・ソサイエティーのトロント・ミーティングにおいて，ワルラス＝ボウリー記念講演として報告されたものである。また R. J. Aumann and L. S. Shapley, *Values of Non-Atomic Games,* Princeton University Press, 1974 をも参照されたい。

(3) 福岡正夫「ワルラス均衡の無余剰配分による特性化について」，『関東学園大学紀要』第24集，1997年3月。
同「ワルラス均衡と限界貢献度配分」，『関東学園大学経済学紀要』第26集，1999年3月。

書に委ねており，さらにはまた後者での命題そのものがその証明を他のオーマンらの論文の参照に求めている箇所が少なくない。要するに散在するピースをパズルの一つの図柄に統合して，脈絡をつけるのになかなかの苦労が要るのである。本稿ではこの点を勘案して，いくつかのすでに確立されている命題を除けば，推論の全体がなるべく self-complete なものになるように心がけ，また前記オーマン＝シャプレーの著書の命題を利用する場合も，それらの命題の仮定が本稿の仮定や議論によって遺漏なく満たされていることを明示するように，できるだけの努力を払うことにした。[4] 本稿にもし何らかの取り柄があるとすれば，それはその点に見出されるべきものであろうが，もちろんその奏効度については読者の判定に俟つほかはない。[5]

2

本論に立ち入る前に，以下本稿で重要な役割を果たすシャプレー値（Shapley Value）ならびにシャプレー値配分（Shapley Value Allocation）の概念について，若干予備的な説明を与えておくことにしよう。最初はまず人数の有限な場合について述べるとして，プレーヤーの集合を $N=\{1, 2, \ldots, n\}$，財空間を R^l，プレーヤー i の消費集合を $X_i\equiv R^l_+$，[6] 初期賦存量ベクトルを $a_i\in R^l_+$，選好を $\gtrsim_i$ とし，その選好が連続な効用関数 $u_i: R^l_+\to R$ によって表現可能であるとする。さらに N からつくられる結託すなわち N の任意の部分集合を S，すべての結託の集合を $\mathscr{C}$ であらわす。ここで $\{\gtrsim_i\}_{i\in N}$ を表現する連続な効用関数の組 $u=\{u_i\}_{i\in N}$ を一つ選び，$v_u: \mathscr{C}\to R$ を

$$v_u(S)=\max\left\{\sum_{i\in S}u_i(x_i)\middle|\sum_{i\in S}(x_i-a_i)=0,\ x_i\in X_i\ \forall i\in S\right\}\qquad \text{if } S\neq\emptyset$$

$$v_u(S)=0\qquad \text{if } S=\emptyset$$

（4） 以下での数理の展開については，上記オーマンの論文とオーマン＝シャプレーの書物のほかつぎの論文を参照した。

R. J. Aumann and M. Perles, "A Variational Problem Arising in Economics", *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* Vol. 11, 1965,

R. J. Aumann, "Integrals of Set-Valued Functions", *ibid,* Vol. 12, 1965.

（5） 本稿で展開される等値定理の議論においては，効用関数の微分可能性の仮定が重要な役割を果たすが，シャプレー値配分がワルラス均衡配分になるというほうの命題（以下の定理１）については，これを上記の仮定なしに証明したものとして Sergiu Hart, "Values of Non-Differentiable Markets with a Continuum of Traders", *Journal of Mathematical Economics,* Vol 4, 1977 がある。そのような点を考慮に入れて議論の一般化を図ることはまた他日に期したい。

（6） $R^l_+\equiv\{x\in R^l|x_h\geq 0 \text{ for all } h\}$. なお本稿全体をつうじて，ベクトル間の不等号を以下のように定めることにする。すなわち $x, y\in R^l$ に対し

$$x>y \Leftrightarrow x_h>y_h \text{ for all } h$$

$$x\geqq y \Leftrightarrow x_h\geqq y_h \text{ for all } h$$

で定義するとすれば，v_u は各結託に対して効用和の形で，その結託が獲得できる利得（payoff）の最大値を割り振る関数であり，これはこの経済を n 人のプレーヤーからなる協力ゲームと見なしたときの，u に対応する特性関数と解することができるであろう。

さてこのゲームのシャプレー値とは，ゲームがプレーされる前に各プレーヤーがそれに参加することによって得られるであろうと期待する利得の分け前を定めるルールであり，それぞれの i に対して

$$\phi v_u(i)=\sum_{S\subset N}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v_u(S)-v_u(S\backslash\{i\})]$$
$$s=\#S=S\text{ に含まれるプレーヤーの数}$$

で定義される。(7) ここで右辺の $v_u(S)-v_u(S\backslash\{i\})$ は，いうまでもなくプレーヤー i が結託 S に参加した場合に S の獲得できる総利得に生じる増加分，すなわちその意味におけるプレーヤー i の S への限界貢献度をあらわし，$\phi v_u(i)$ はそのようなプレーヤー i の限界貢献度のつぎに述べる意味での期待値 $E[v_u(S)-v_u(S\backslash\{i\})]$ と解されるのである。すなわちいま各プレーヤーが順次に取引に参加していく状況を考え，そのさい全部で $n!$ 個ある N 人のプレーヤーの可能な並べ方のそれぞれが，すべて等しい確率 $\frac{1}{n!}$ で起こるものと想定する。すると i を含む任意の結託 S を考えたとき，i が取引に参加する前にすでに $S\backslash\{i\}$ だけのプレーヤーが取引に参加している確率は $(s-1)!(n-s)!/n!$ となる。つまり N の $n!$ 通りの順列のうち，i に先立って $(s-1)$ 人の $S\backslash\{i\}$ のメンバーが取引に参加する順番には $(s-1)!$ 通りの相異なる並べ方があり，他方 S 以外の $(n-s)$ 人のプレーヤーが i のあとで取引に参加する順番にも $(n-s)!$ 通りの並べ方がある。ゆえに $S\backslash\{i\}$ のプレーヤーが i に先立つ場合の可能な並べ方の総数は $(s-1)!(n-s)!$ であり，よってこの場合のプレーヤー i の限界貢献度の期待値 $E[v_u(S)-v_u(S\backslash\{i\})]$ は $\sum_{S\subset N}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v_u(S)-v_u(S\backslash\{i\})]$ に等しく，それがまさに $\phi v_u(i)$ のあらわすところである。(8)

つぎにこの経済のシャプレー値配分を定義することにしよう。$\{x_i\}_{i\in N}$ がシャプレー値配分であるとは，達成可能条件 $\sum_{i\in S}(x_i-a_i)=0$ が満たされており，かつ $\{\succsim_i\}_{i\in N}$ を表現する連続な効用関数のベクトル $u=\{u_i\}_{i\in N}$ が存在して，どのプレーヤー i についても $\phi v_u(i)=u_i(x_i)$ が成り立っていることである。これは明らかに序数的効用にもとづく定義である。(9) またシャプレー値は元来，譲渡

(7) プレーヤーの数が有限であるゲームのシャプレー値については，Aumann and Shapley, *op. cit.*, pp. 295-300, のほか Paul Champsaur, "Cooperation versus Competition", *Journal of Economic Theory*, December 1975, p. 397, Alvin E. Roth, "Introduction to the Shapley Value", in A. Roth ed., *The Shapley Value : Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, 1988, pp. 5-7 など参照。

なお，シャプレー値は本来，加法性，対称性，効率性，ナル・プレーヤーのゼロ評価という四つの条件を満たす関数として定義されたものである。このうち，のちの議論で明示的に重要な役割を果たすのは，効率性条件 $\sum_{i=1}^{n}\phi v_u(i)=v_u(N)$ である。

可能効用の仮定の下で計算されるが，シャプレー値配分においては実際上，効用の移転が必要とされないようにうまく u が選ばれているのである。(10)

本節を終えるにあたって，人数の有限な経済においてはシャプレー値配分とワルラス均衡配分とがかならずしも一致しないことに注目しておくのが有益であろう。いま $N=\{1,2,3\}$，$l=2$，$a_1=(2,0)$，$a_2=(1,1)$，$a_3=(0,2)$ で，どのプレーヤー i も $u_i(x^1,x^2)=\sqrt{x^1+1}+\sqrt{x^2+1}$ で表現されるような選好をもっている経済を考える。(11) この経済のワルラス均衡配分は $x_1=x_2=x_3=(1,1)$ に一意に決まり，プレーヤー 2 は初期賦存量 $(1,1)$ をそのまま消費して得られる効用しか得ていない。ところがこの選好を表現する効用関数をいろいろ動かしてみると，その選び方によってはワルラス均衡配分とは異なったシャプレー値配分が得られ，しかも次節で仮定するような微分可能な効用関数を使えば，選好をどのような $u=\{\hat{u}_i\}_{i\in N}$ で表現しても，プレーヤー 2 のシャプレー値すなわち限界貢献度の期待値は $\hat{u}_2(1,1)$ よりも高くなってしまうことが分かる。なぜなら，どの S に対しても $v_u(S)-v_u(S\setminus\{2\})\geqq\hat{u}_2(1,1)$ となり，さらに $S=\{1,2\},\{2,3\}$ に対しては $v_u(S)-v_u(S\setminus\{2\})>\hat{u}_2(1,1)$ となるからである。したがって人数の有限な経済では一般に（少なくとも微分可能な効用関

(8) 上記の考え方の理解を助けるため，ここで $N=\{1,2,3\}$，$i=1$ という簡単な場合について例示してみよう。この場合プレーヤー 1 の含まれる結託は $\{1\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{1,2,3\}$ の 4 個で，それらに対応する確率はそれぞれ $\frac{2}{6}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{2}{6}$ となる。なぜなら，たとえば結託 $\{1\}$ の場合，すなわちプレーヤー 1 のみが市場を占めている場合は，つぎにプレーヤー 2 が参加するか 3 が参加するかで 2 通りの可能性があり，そのそれぞれの順序 $(1,2,3)$ と $(1,3,2)$ に $\frac{1}{6}$ ずつの確率がつくので，$\{1\}$ に対応する確率は $\frac{2}{6}$ である。またプレーヤー 2 がすでにいるところにプレーヤー 1 が参加する場合は，つぎの可能な参加者は 3 しかなく，$(2,1,3)$ の順序しかないので，$\{1,2\}$ に対応する確率は $\frac{1}{6}$ である。$\{1,3\}$ の場合も同様。最後に $\{1,2,3\}$ の場合は，一つの既定事実しかないかに見えるが，事前の可能性としてはやはり 2 が 3 よりさきに入ったか 3 のほうがさきに入ったかの 2 通りの場合があるので，それらを区別して，合わせて確率 $\frac{2}{6}$ とするのである。

(9) 他方，基数的効用にもとづくシャプレー値配分の概念もあり，それは λ-transfer value の概念を用いて定義される。これら二つのシャプレー値配分の関係については Wayne J. Shafer, "On the Existence and Interpretation of Value Allocation", *Econometrica,* March 1980, Aumann, *op. cit.,* pp. 631-634, などを参照。

(10) これが譲渡可能効用をもたないゲームのシャプレー値（NTU value）を定義するときの基本的な考え方である。なおこの概念の解釈をめぐってはオーマンとロスらのあいだで論争が取り交わされた。興味ある読者は以下の文献を参照されたい。

Alvin E. Roth, "Values for Games without Sidepayments: Some Difficulties with Current Concepts", *Econometrica,* March 1980, R. Aumann, "On the Non-Transferable Utility Value: A Comment on the Roth-Shafer Examples", *Econometrica,* May 1985, Roth, "On the Non-Transferable Utility Value: A Reply to Aumann", *Econometrica,* July 1986, Aumann, "Rejoinder", *Econometrica,* July 1986.

また David W. Emmons and Allen J. Scafuri, "Value Allocations - An Exposition", in C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw and N. J. Rothman eds., *Advances in Equilibrium Theory,* Springer-Verlag, 1985 をも参照。

(11) この事例については Aumann, "Values of Markets with a Continuum of Traders", p. 634 参照。

数の仮定の下では)，ワルラス均衡配分の集合がシャプレー値配分の集合に含まれるとも，また逆にシャプレー値配分の集合がワルラス均衡配分の集合に含まれるともいえないことになる。(12)

3

ここで本論に入り，以下では全篇をつうじて，市場に参加するプレーヤーの数が無限で，それが$(T, \mathscr{C}, \mu)$という測度空間であらわされるようなゲームを考えることにする。ここで$T=[0,1]$はプレーヤーの集合，$\mathscr{C}$はTのボレルσ集合体で，その元$S \in \mathscr{C}$がプレーヤーの結託をあらわし，またμは$\mathscr{C}$上のルベーグ測度である。また前節と同様に財空間をR^l，プレーヤー$t \in T$の消費集合を$X_t \equiv R^l_+$，初期賦存量ベクトルを$a(t) \in R^l_+$，その選好を$\succsim_t$とする。μがノン・アトミック測度であることから，この経済を以下ではノン・アトミック経済と呼ぶ。そのような経済の特性関数形ゲームとは$\mathscr{C}$から実数への関数vで，$v(\emptyset)=0$を満たすものをいう。

このゲームではプレーヤーの集合は連続体の濃度をもち，各交換当事者の「大きさ」をあらわす測度がノン・アトミックとなるので，個々の主体は経済全体から見ればnegligibleな影響しか及ぼしえないことになる。これはプライス・テイカーという競争的な行動原理が個別主体の行動と整合的であることをモデル化する場合の常套手段であるが，同時に個々のプレーヤーを文字どおりTの1点として解釈してしまうと，その限界貢献度はゼロとなり，シャプレー値もまたゼロとなるほかなくなってしまう。そこでノン・アトミックな経済でのシャプレー値を前節の議論に平行した形で理解するためには，個々のプレーヤーをTの1点tとしてではなく，どんなに小さくてもある大きさ$\mu(dt)>0$をもった「無限小部分」(“infinitesimal segment”) dtと解するのが望ましい。その場合，個人dtの初期賦存量ベクトルおよび効用はそれぞれ$a(t)\mu(dt)$，$u(x(t))\mu(dt)$として考えられることになる。(13) 以下ではこの解釈を念頭におきながらシャプレー値ならびにシャプレー値配分を定義することにしよう。(14)

シャプレー値を有限ゲームからこのような無限ゲームに拡張する方法にはいくつかのものがあるが，本稿ではオーマンの上記論文にしたがって漸近シャプレー値の概念を用いることにする。直観

---

(12) この例をも含めて一般にシャプレー値配分そのものが存在することはShafer, *op. cit.* の定理によって保証されている。なおNicholas C. Yannelis, “Value and Fairness”, in C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw and N. J. Rothman eds., *Advances in Equilibrium Theory,* Springer-Verlag, 1985には，ワルラス均衡配分（これはつねにコア配分に含まれる)，コア配分，シャプレー値配分などの関係が図で示されている。

(13) 個人dtに正の測度$\mu(dt)$をもたせて解釈する場合，厳密にはそれは個人の集合であるが，同じdtに入るtについては$a(t)$も$u(x(t))$もみな同じと考えられているのである。この点についてはAumann and Shapley, *op. cit.*, p. 178参照。

的には，ゲーム v の漸近シャプレー値は T を漸次細かい区間に分割していき，その都度その区間の集合をプレーヤーの集合と見なして有限ゲームのシャプレー値を計算したとき，その極限として定義されるものである。いま T の分割の列 $(\Pi_1, \Pi_2, \ldots)$ でつぎの性質を満たすものを考える。すなわち Π_m は $\mathscr{C}$ の有限個の元からなり，Π_{m+1} は Π_m より細かい分割で，かつ T の任意の異なる点 s, t に対し，m を十分大きくとれば s と t は Π_m の異なる元に属する，とするのである。たとえば $\Pi_m \equiv \{[0, 2^{-m}], (2^{-m}, 2 \cdot 2^{-m}], \ldots, ((2^m-1)\, 2^{-m}, 1]\}$ で定義された T の分割の列を考えてみれば，この手続きの意味するところは明らかであろう。

ここで所定の m について，Π_m の各元を Δt であらわし，それをあたかも個々のプレーヤーであるかのようにみなした有限ゲーム $v_m : 2^{\Pi m} \to R$ を，$S_m \subset \Pi_m$ に対して $v_m(S_m) = v(\cup_{\Delta t \in S_m} \Delta t)$ で定義する。すると，各プレーヤー Δt に対し，そのシャプレー値は

$$\phi v_m(\Delta t) = E[v_m(S_m) - v_m(S_m \backslash \Delta t)]$$

と定義でき，それに伴って任意の $S_m \subset \Pi_m$ に対しても

$$\phi v_m(S_m) = \sum_{\Delta t \in S_m} \phi v_m(\Delta t)$$

と書くことができる。

さて任意の $S \in \mathscr{C}$ に対し，$\Pi_1 = \{S, T \backslash S\}$ から始まり上記の性質を満たす T の分割の列 $(\Pi_1, \Pi_2, \ldots)$ を任意に選んで $S_m = \{\Delta t \in \Pi_m : \Delta t \subset S\}$ とし，$m \to \infty$ としたときに，$\phi v_m(S_m)$ の極限が存在し，しかもそれがこの $(\Pi_1, \Pi_2, \ldots)$ の選び方に依存しないならば，この極限を $\phi v(S)$ であらわす。そのときもしすべての $S \in \mathscr{C}$ に対して $\phi v(S)$ が存在するならば，それを v の漸近シャプレー値 (Asymptotic Value) と呼ぶのである。有限ゲームで効率性条件が成り立っていることから，漸近シャプレー値においても $\phi v(T) = v(T)$ という関係が成り立つことは明らかであろう。またこのような極限においても，前述の方針にしたがって各個のプレーヤーは $\mu(dt)$ の測度をもつと解するならば，有限ゲームの場合に準じて個人 dt のシャプレー値をあたかも

$$\phi v(dt) = E[v(S) - v(S \backslash dt)]$$

であるかのようにみなし，

$$\phi v(S) = \int_S \phi v(dt)$$

と考えることができるであろう。

さてここで経済のモデルに戻り，以下の議論が立脚する仮定としては，当面つぎの二つを設定することにしよう。

---

(14) 「無限小」(“infinitesimal”) という概念は，これを超準解析 (nonstandard analysis) の立場から厳密に定義することも可能である。そのような枠組みでシャプレー値配分とワルラス均衡配分の等値性を証明した論文としては Donald J. Brown and Peter A. Loeb, “The Values of Nonstandard Exchange Economies”, *Israel Journal of Mathematics*, Vol. 25, 1976 がある。

A 1　$a: T \to R^l_+$ は可測で $\int_S a(t)\mu(dt)>0$。

A 2　a は一様に有界，すなわちすべての $t\in T$ について $a(t)<\bar{a}$ となるような点 $\bar{a}\in R^l_+$ がある。

また選好 $\succsim_t$ を表現する効用関数 u_t として以下では非負の値をとるものだけを考え，それに関する仮定を述べる上で必要なつぎの二つの定義を導入する。

定義　効用関数 $u=\{u_t\}$ が以下の諸性質を満たすとき，u は有界微分可能であるという。

(a)　u を $T\times R^l_+$ 上で定義された関数とみなしたとき，それは（$T\times R^l_+$ のボレル σ 集合体に関して）可測。

(b)　u は一様に有界，すなわちすべての $x\in R^l_+$ とすべての $t\in T$ について $u_t(x)<\bar{u}$ となるような $\bar{u}\in R$ がある。

(c)　各 $t\in T$ について，u_t は R^l_+ 上で連続微分可能。

(d)　導関数 $u'_t=\left(\dfrac{\partial u_t}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial u_t}{\partial x_l}\right)$ はどんなコンパクト集合 $C\subset R^l_+$ の上でも一様に有界かつ一様に正，すなわち $u'_t(x)<\bar{u}'\quad\forall x\in C, t\in T$ かつ $u'_t(x)>\bar{\bar{u}}'\quad\forall x\in C, t\in T$ となるような $\bar{u}'\in R^l, \bar{\bar{u}}'\in R^l_{++}$ がある。

定義　効用関数 $u=\{u_t\}$ が有界微分可能である上に，さらにつぎの諸性質を満たすとき，効用関数 u は一様に滑らかであるという。

(e)　各 $t\in T$ について，u_t は R^l_+ 上で擬凹かつ 2 回連続微分可能。

(f)　u_t で定義される無差別曲線の x におけるガウス曲率を $u^C_t(x)$ であらわすとき，$u^C_t(x)$ がどんなコンパクト集合 $C\subset R^l_+$ の上でも一様に正，すなわち $u^C_t(x)>\bar{u}^C\quad\forall x\in C, t\in T$ となるような $\bar{u}^C\in R_{++}$ がある。

(g)　2 階の導関数 D^2u_t はどんなコンパクト集合 $C\subset R^l_+$ の上でも一様に有界，すなわち $\|D^2u_t\|<\bar{u}''\quad\forall x\in C, t\in T$ となるような $\bar{u}''\in R$ がある。

以下のシャプレー値配分の定義を見れば明らかなように，シャプレー値配分を考えるときにはつねに，「選好 $\{\succsim_t\}_{t\in T}$ を表現するような有界微分可能な効用関数 $u=\{u_t\}$ が存在する」ことが仮定されている。ゆえに後述の定理 1 に関するかぎりは，効用関数の有界微分可能性の仮定を掲げることは不要である。しかし他方，定理 2 の証明にあたっては，これよりいっそう強い

A 3　選好 $\{\succsim_t\}_{t\in T}$ を表現するような一様に滑らかな効用関数 $u=\{u_t\}$ が存在する。

を仮定するのでなくてはならない。

ここで $\{\succsim_t\}_{t\in T}$ を表現する有界微分可能な効用関数 $u=\{u_t\}$ が存在するとき，あらためて

$v_u: \mathscr{C} \to R$ を

$$v_u(S) = \max\left\{\int_S u_t(x(t))\mu(dt) \middle| \int_S x(t)\mu(dt) = \int_S a(t)\mu(dt),\ x(t) \in R_+^l \text{ for all } t \text{ in } S\right\}$$

で定義することにしよう。このときＡ１の仮定の下では上記の最大値が達成され，よって $v_u(S)$ の定義が意味をもつことは，オーマン＝ペルレスの論文[(15)]から保証されるところとなる。すると $v_u(S)$ は $(T, \mathscr{C})$ をプレーヤーと結託の集合とする，譲渡可能効用をもつ特性関数形ゲームとなるわけであり，それについては漸近シャプレー値 ϕv_u の存在することがすでにオーマン＝シャプレーの著書によって示されている[(16)]。

さて，T から R_+^l への可測関数 x で $\int_T x(t)\mu(dt) = \int_T a(t)\mu(dt)$ を満たすものを配分 x と呼ぶことにしよう。すると本稿にとって重要な意味をもつシャプレー値配分とは，$\{\succsim_t\}_{t \in T}$ を表現する有界微分可能な効用関数 $u = \{u_t\}$ が存在して，

$$\phi v_u(S) = \int_S u_t(x(t))\mu(dt)$$

が任意の $S \in \mathscr{C}$ について成り立つ配分として定義される。前記のように各プレーヤーを T の「無限小部分集合」dt と解するならば，これは dt については

$$\phi v_u(dt) = u_t(x(t))\mu(dt)$$

と書けることをも意味している。ここで右辺の $u_t(x(t))\mu(dt)$ は各プレーヤーが $x(t)$ という配分から得る効用の大きさであり，上式はそれが左辺のシャプレー値による効用配分に一致することを示すものである。したがって，ここでのシャプレー値配分の概念が，第２節で定義したシャプレー値配分の概念をノン・アトミックな経済に拡張したものに当たることが容易に看取されるであろう。

他方この経済で配分 x がワルラス均衡配分であるとは，ある価格ベクトル $p \in R_+^l \backslash \{0\}$ が存在して，T のほとんどすべての t に対して[(17)]，$x(t)$ が予算集合 $B_P(t) \equiv \{x \in R_+^l | px \leqq pa(t)\}$ の上で効用を最大にしていること，すなわち $x(t) \in \{x \in B_P(t) | x \succsim_t y \text{ for all } y \in B_P(t)\}$ が成り立っていることである。

以下本稿の中心課題として，当面われわれがその証明に専念したいのは，つぎの二つの基本定理にほかならない。

定理１　仮定Ａ１が満たされていれば，すべてのシャプレー値配分はワルラス均衡配分となる。

定理２　仮定Ａ１，Ａ２およびＡ３が満たされていれば，すべてのワルラス均衡配分はシャプレー値配分となる。

---

(15) R. J. Aumann and M. Perles, *op. cit.,* Main Theorem.
(16) R. J. Aumann and L. S. Shapley, *op. cit.,* Proposition 31.7.
(17) 測度が０のところは除いて考える，という意味である。

なお定理1は見かけの上では効用関数の微分可能性を仮定していないが，前述のようにシャプレー値配分の定義の中に「選好 $\{\succsim_t\}_{t\in T}$ を表現する有界微分可能な効用関数 $u=\{u_t\}$ が存在する」と仮定されている点に注意すべきである。

4

本節はすべて定理1の証明にあてられる。

証　明

配分 $x^*: T\to R^l_+$ がシャプレー値配分であるとする。するとシャプレー値配分の定義から選好 $\{\succsim_t\}_{t\in T}$ を表現する有界微分可能な効用関数 $u=\{u_t\}$ が存在して，どの $S\in\mathscr{C}$ についても

$$\phi v_u(S)=\int_S u_t(x^*(t))\mu(dt) \tag{4.1}$$

となっている。

ところで漸近シャプレー値の性質から $\phi v_u(T)=v_u(T)$ が成立するから，それと (4.1) を $S=T$ について考えた式を合わせて用いることにより，

$$v_u(T)=\int_T u_t(x^*(t))\mu(dt)$$

となる。よって，左辺の $v_u(T)$ が T の達成できる総効用の最大値であることを考慮すれば，x^* は制約条件 $\int_T x(t)\mu(dt)=\int_T a(t)\mu(dt)$，$x(t)\in R^l_+$ の下で $\int_T u_t(x(t))\mu(dt)$ を最大化していることが知られる。

するとこの結果から，まず (x^*, p^*) が譲渡可能効用をもつワルラス均衡になるような価格ベクトル p^* の存在することが示されるのである。ここで (x^*, p^*) が譲渡可能効用をもつワルラス均衡であるとは，配分 x^* がほとんどすべての $t\in T$ について $x\in R^l_+$ の条件の下で $u_t(x)-p^*(x-a(t))$ を最大化していること[18]，すなわちほとんどすべての $t\in T$ とすべての $x\in R^l_+$ について

$$u_t(x^*(t))-p^*(x^*(t)-a(t))\geqq u_t(x)-p^*(x-a(t)) \tag{4.2}$$

が満たされていることをいう。

上記の命題はオーマン＝ペルレスの論文[19]に負い，無限次元空間における条件付最大化問題のクー

(18)　これは，$P_{l+1}\equiv 1$ であるような第 $(l+1)$ 財を導入し，消費者 t が予算制約 $px+x_{l+1}=pa(t)$ の下で効用関数 $u_t(x)+x_{l+1}$ を最大化すると仮定したときの競争均衡をあらわしている。

(19)　R. J. Aumann and M. Perles, *op. cit.*, Theorem 5.1. 彼らの定理は x^* が譲渡可能効用をもつ経済のワルラス均衡配分になることが，前記の最大化問題の解になることの必要十分条件であることを主張しているが，いうまでもなくここでの脈絡で必要なのは，必要条件になることの証明のみである。

ン＝タッカー条件とも考えられるものである。以下においてはこの命題の証明を詳しく辿っていくことにしよう。

推論はかなりの長丁場になるので，二つのステップに分けて述べるのが便利である。

ステップ1　まずここではすべての可積分関数 $y: T \to R^l_+$ について

$$\int_T [u_t(x^*(t)) - u_t(y(t))]\mu(dt) \geqq p^* \int_T [x^*(t) - y(t)]\mu(dt) \tag{4.3}$$

となるような $p^* \in R^l_+$ が存在することを示す。

そこでそのための証明の手順として，はじめに $l+1$ 次元ベクトルの集合 K_1, K_2 をつぎのように定義する。

$$K_1 \equiv \{(y^0, y) \in R^{l+1}_+ | \text{ 可積分関数 } y: T \to R^l_+ \text{ が存在して}$$
$$y^0 \leqq \int_T u_t(y(t))\mu(dt) \text{ かつ } y \leqq a - \int_T y(t)\mu(dt)\}$$
$$K_2 \equiv \{(y^0, y) \in R^{l+1}_+ | y^0 > \int_T u_t(x^*(t))\mu(dt) \text{ かつ } y \geqq 0\}$$
$$\text{ここで } a \equiv \int_T a(t)\mu(dt)。$$

すると，まず K_1 と K_2 は共通部分をもたないことがいえる。いまかりに $(y^0, y) \in K_1 \cap K_2$ であったとすれば，$\int_T u_t(y(t))\mu(dt) \geqq y^0 > \int_T u_t(x^*(t))\mu(dt)$ かつ $0 \leqq y \leqq a - \int_T y(t)\mu(dt)$ となり，これは明らかに x^* が制約条件 $\int_T x(t)\mu(dt) = \int_T a(t)\mu(dt)$，$x(t) \in R^l_+$ の下で $\int_T u_t(x(t))\mu(dt)$ を最大化していることに矛盾する。

またつぎに K_1 が凸であることが以下のようにして示される。事実 $K_1(t)$ という多価写像を

$$K_1(t) \equiv \{(y^0, y) \in R^{l+1}_+ | \text{ ある } z \in R^l_+ \text{ に対し } y^0 \leqq u_t(z) \text{ かつ } y \leqq a - z\}$$

と定義すると，ここで $K_1 = \int_T K_1(t)\mu(dt)$ となることさえ示せば，あとはリアプーノフの定理のリヒターによる系[20]により K_1 は凸となるのである。そこで上記の命題の成立を示すため $(y^0, y) \in K_1$ とすれば，K_1 の定義からある可積分関数 $y: T \to R^l_+$ が存在して，$y^0 \leqq \int_T u_t(y(t))\mu(dt)$，$y \leqq a - \int_T y(t)\mu(dt)$ となっている。そこで右辺と左辺の差を取って，それぞれ

(20)　**リアプーノフの定理のリヒターによる系**　F をノン・アトミックな有限測度空間 (Ω, A, ν) から R^m への多価写像とすると，$\int_\Omega F(\omega)\nu(d\omega)$ は凸集合になる。ここで多価写像 F の積分は $\int_\Omega F(\omega)\nu(d\omega) \equiv \{\int_\Omega f(\omega)\nu(d\omega) \in R^m | f(\omega)$ は可積分かつほとんどすべての ω に対し $f(\omega) \in F(\omega)\}$ と定義される。証明については Werner Hildenbrand, *Core and Equilibria of a Large Economy,* Princeton University Press, 1974, pp. 62-63，丸山徹『均衡分析の数理』日本経済新聞社，1985, pp. 185-186 などを見よ。

$$d^0=\int_T u_t(y(t))\mu(dt)-y^0\geqq 0$$

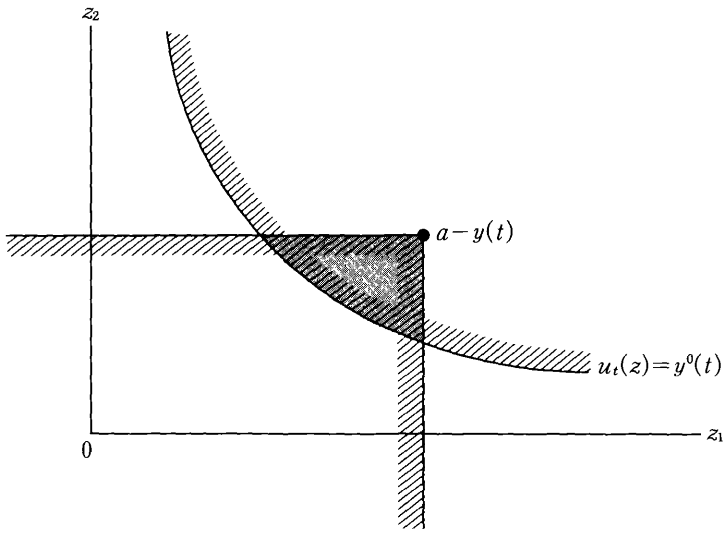
$$d=a-\int_T y(t)\mu(dt)-y\geqq 0$$

とする。すると任意の $t\in T$ について $(u_t(y(t))-d^0,\ a-y(t)-d)\in K_1(t)$ となるので $(\int_T u_t(y(t))\mu(dt)-d^0,\ a-\int_T y(t)\mu(dt)-d)\in\int_T K_1(t)\mu(dt)$, すなわち $(y^0, y)\in\int_T K_1(t)\mu(dt)$ となることがいえる。他方また逆に $(y^0, y)\in\int_T K_1(t)\mu(dt)$ とすれば，ある可積分関数 $y^0, y: T\to R_+^l$ があって，ほとんどすべての $t\in T$ について $(y^0(t), y(t))\in K_1(t)$ かつ $(y^0, y)=(\int_T y^0(t)\mu(dt), \int_T y(t)\mu(dt))$ となっている。ここで

$$\Gamma(t)\equiv\{z\in R_+^{l+1}|y^0(t)\leqq u_t(z) \text{ かつ } y(t)\leqq a-z\}$$

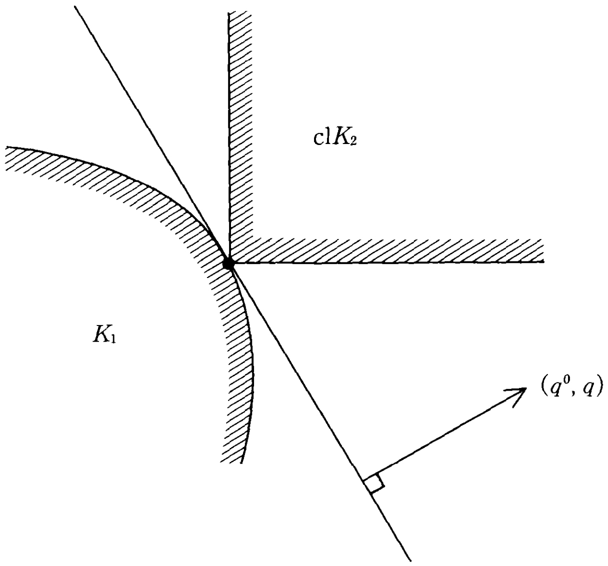
という多価写像を定義する。2次元の図で示せば，Γ は所与の t に対して第1図の影をつけた部分を対応させるような写像である。するとオーマンの可測選択子の定理[21]により，可測関数 $z: T\to R_+^l$ でほとんどすべての $t\in T$ について $z(t)\in\Gamma(t)$ となるものが存在し，また $\Gamma(t)$ の定義から $z(t)$ が可積分であることも分かる。しかも，やはり $\Gamma(t)$ の定義から $y^0(t)\leqq u_t(z(t))$ であるから

第1図



(21) **オーマンの可測選択子の定理** F を測度空間 (Ω, A, ν) から完備可分な距離空間 S への多価写像とし，F のグラフが $A\otimes B(S)$ ($B(S)$ は S のボレル σ 集合体) に属するならば，可測関数 $f: \Omega\to S$ が存在してほとんどすべての ω に対し $f(\omega)\in F(\omega)$ となる。証明については R. J. Aumann, "Integrals of Set-Valued Functions", Proposition 2.1, W. Hildenbrand, *op. cit.,* pp. 54-58 を見よ。

第 2 図



$$y^0=\int_T y^0(t)\mu(dt)\leqq\int_T u_t(z(t))\mu(dt)$$

が成り立ち，また $y(t)\leqq a-z(t)$ であるから

$$y=\int_T y(t)\mu(dt)\leqq a-\int_T z(t)\mu(dt)$$

が成り立つ。よって $(y^0, y)\in K_1$ となることが示された。

ここまでのところで K_1 と K_2 は共通部分をもたず，また K_1 は凸集合となることがいえ，そして K_2 が凸集合となることは自明であるから，凸集合の分離定理が使えて，それらを分離する超平面と，その法線ベクトル $(q^0, q)\neq 0$ が存在することになる。そしてすべての $(y_1^0, y_1)\in K_1$，すべての $(y_2^0, y_2)\in \mathrm{cl}K_2$（$\mathrm{cl}K_2$ は K_2 の閉包）に対して

$$q^0y_1^0+qy_1\leqq q^0y_2^0+qy_2 \tag{4.4}$$

が成立する。（第 2 図参照）

そこでつぎに $q^0>0$，$q\geqq 0$ となることを示すことにしよう。まず $y=x^*$ として K_1 の定義を考えれば $(\int_T u_t(x^*(t))\mu(dt), 0)\in K_1$ となることが分かり，また任意の $b\geqq 0$ に対して $(\int_T u_t(x^*(t))\mu(dt), b)\in \mathrm{cl}K_2$ となることも明らかである。よって (4.4) より $0\leqq qb$ となり，これが任意の $b\geqq 0$ に対して成り立つのであるから，$q\geqq 0$ とならねばならないことが示された。

つぎに，K_2 の定義から $c\geqq\int_T u_t(x^*(t))\mu(dt)$ のようなすべての c については当然 $(c, 0)\in \mathrm{cl}K_2$ となる。そこでこれと $(\int_T u_t(x^*(t))\mu(dt), 0)\in K_1$ を (4.4) に適用すれば

$$q^0\int_T u_t(x^*(t))\mu(dt) \leqq q^0 c$$

したがって $q^0 \geqq 0$ となる。ところがかりに $q^0=0$ であったとすれば，$(\int_T u_t(0)\mu(dt), a) \in K_1$ と $(\int_T u_t(x^*(t))\mu(dt), 0) \in \mathrm{cl}K_2$ の 2 点に対し（4.4）をあてはめることにより $qa \leqq 0$ となり，しかも $(q^0, q) \neq 0$ であるところから，q の少なくとも一つの座標は厳密に正となっている。明らかにそれは $a>0$ と相容れないから，$q^0 \neq 0$，したがって $q^0>0$ である。

以上の結果を用いてステップ 1 の証明を終えることにしよう。いま可積分の $y(t) \geqq 0$ を任意に選べば $(\int_T u_t(y(t))\mu(dt), a-\int_T y(t)\mu(dt)) \in K_1$，$(\int_T u_t(x^*(t))\mu(dt), 0) \in \mathrm{cl}K_2$ となるから，（4.4）より

$$q^0\int_T [u_t(x^*(t))-u_t(y(t))]\mu(dt) \geqq q\int_T [x^*(t)-y(t)]\mu(dt)$$

を得る。そこで上に証明した $q^0>0$ という結果を用いて両辺を q^0 で割り，$q/q^0=p^*$ とおけば，ステップ 1 で示したかった主張が示されたことになる。

ステップ 2　ここまでの推論で（4.3）を満たすような $p^* \geqq 0$ が存在することを示したので，ステップ 2 ではその p^* の下で（4.2）もまた成立することを示す。背理法の論法を用いるとして，いまある $S \subset T$ があって，$\mu(S)>0$ かつすべての $t \in S$ について

$$u_t(x)-u_t(x^*(t)) > p^*(x-x^*(t)) \tag{4.5}$$

となるような $x \in R^l_+$ があったと仮定する。ここで $y(t)$ を，$t \in T \backslash S$ に対しては $y(t)=x^*(t)$ とし，また $t \in S$ に対しては（4.5）を成り立たせるような $x \in R^l_+$ をうまく選んで定義すれば，$y: T \to R^l_+$ を可測にすることができる。[22] ところがこの y に対しては明らかに

$$\int_T [u_t(x^*(t))-u_t(y(t))]\mu(dt) < p^*\int_T [x^*(t)-y(t)]\mu(dt)$$

となるので，これはすでにステップ 1 で証明したところに矛盾するのである。

ここまでの推論で，$x^*: T \to R^l_+$ がシャプレー値配分であるならば，(x^*, p^*) を譲渡可能効用をもつワルラス均衡にするような p^* の存在することが明らかになった。つぎにわれわれは，(x^*, p^*) がそのような譲渡可能効用をもつワルラス均衡であるとすれば，任意の $S \in \mathscr{C}$ について

$$\int_S (u_t(x^*(t))-p^*(x^*(t)-a(t)))\mu(dt) = \phi v_u(S)$$

---

(22)　事実，$\Delta(t)=\{x \in R^l_+ | u_t(x)-u_t(x^*(t)) > p^*(x-x^*(t))$　if　$t \in S\}$ と定義し，これから注(21)で示した可測選択子の定理を使って可測関数 $x(t)$ を選んでくれば，$x(t)$ は S 上で（4.5）を満たすので，これを S 上での $y(t)$ とすればよい。

となることを示したい。

そのための手順として，いま ν を

$$\nu(S)=\int_S(u_t(x^*(t))-p^*(x^*(t)-a(t)))\mu(dt)$$

で定義し，ν が v_u のコアに含まれることをまず示すことにしよう。ν がコアに含まれるとは，それが達成可能で，しかも他のいかなる結託によっても dominate されないこと，すなわち

$$\nu(T)\leqq v_u(T) \quad \text{および} \quad \nu(S)\geqq v_u(S) \quad \text{for all } S\in\mathscr{C}$$

となることを意味している。(23) 前者が成り立つことについては

$$\begin{aligned}\nu(T)&=\int_T(u_t(x^*(t))-p^*(x^*(t)-a(t)))\mu(dt)\\&=\int_T u_t(x^*(t))\mu(dt)-p^*\int_T(x^*(t)-a(t))\mu(dt)\\&=\int_T u_t(x^*(t))\mu(dt)\end{aligned}$$

であり，しかも

$$v_u(T)=\max\left\{\int_T u_t(x(t))\mu(dt)\middle|\int_T x(t)\mu(dt)=\int_T a(t)\mu(dt),\, x(t)\in R^l_+ \quad \text{for all } t \text{ in } T\right\}$$

であることから明らかであろう。他方，後者の成立については，つぎのようである。いま $v_u(S)$ の値が $y(t)$ で達成されているとする。すなわち

$$v_u(S)=\int_S u_t(y(t))\mu(dt) \quad \text{ここで} \quad \int_S y(t)\mu(dt)=\int_S a(t)\mu(dt),\, y(t)\in R^l_+ \quad \text{for all } t \text{ in } S$$

であるとする。すると譲渡可能効用をもつワルラス均衡の定義から

$$u_t(x^*(t))-p^*(x^*(t)-a(t))\geqq u_t(y(t))-p^*(y(t)-a(t))$$

となっているから，両辺を S 上で積分することにより

$$\int_S(u_t(x^*(t))-p^*(x^*(t)-a(t)))\mu(dt)\geqq\int_S(u_t(y(t))-p^*(y(t)-a(t)))\mu(dt)$$

を得る。ところが左辺は $\nu(S)$ そのもの，右辺は

$$v_u(S)-\int_S p^*(y(t)-a(t))\mu(dt)$$

であるが，第 2 項＝ 0 であるから $v_u(S)$ となる。よって

$$\nu(S)\geqq v_u(S)$$

となるのである。

---

(23) コアの定義については Aumann and Shapley, *op. cit.*, p. 167 参照。

このように ν が v_u のコアに含まれることが示されれば，オーマン＝シャプレーの命題31.7[24]から目下の仮定の下では v_u のコアが一意であること，しかもそれが v_u の漸近シャプレー値 ϕv_u に一致することが保証されるから，当面の目的とされた

$$\int_S (u_t(x^*(t)) - p^*(x^*(t) - a(t)))\mu(dt) = \phi v_u(S) \quad \text{for all } S \in \mathscr{C}$$

がいえたことになる。さらに，前節の（4.1）より

$$\phi v_u(S) = \int_S u_t(x^*(t))\mu(dt) \quad \text{for all } S \in \mathscr{C}$$

であるところから，

$$\int_S p^*(x^*(t) - a(t))\mu(dt) = 0 \quad \text{for all } S \in \mathscr{C}$$

となることがただちに導かれる。よってほとんどすべての $t \in T$ において

$$p^*(x^*(t) - a(t)) = 0$$

となるのでなくてはならない。

そこでこれらの帰結を総合すれば，x^* がワルラス均衡配分であることがただちに導かれるのである。事実 x^* が配分であるところから $\int_T x^*(t)\mu(dt) = \int_T a(t)\mu(dt)$ であることは自明であるから，あとはほとんどすべての t について u_t が予算集合 $\{x \in R^l_+ | p^*x \leqq p^*a(t)\}$ の上で $x^*(t)$ において最大化されていることが示されればよい。そこでもし正の測度をもつ t の集合について $u_t(y(t)) > u_t(x^*(t))$ で $p^*y(t) \leqq p^*a(t)$ となっているような $y(t) \in R^l_+$ があったとすれば，それらの t のほとんどすべてについては $u_t(y(t)) - p^*(y(t) - a(t)) \geqq u_t(y(t)) > u_t(x^*(t)) = u_t(x^*(t)) - p^*(x^*(t) - a(t))$ となっており，これは (x^*, p^*) が譲渡可能効用をもつワルラス均衡になっているという前の帰結に矛盾する。

よって x^* はワルラス均衡配分であり，定理1の証明は完了する。

5

本節では定理2を証明する。すなわち (x^*, p^*) がワルラス均衡したがって x^* がワルラス均衡配分であるという前提から出発して，それがシャプレー値配分になっていることを示すのが眼目である。

証　明

定理の証明そのものに立ち入る前に，若干の予備的な事項を述べておくのが便利であろう。これ

(24)　Aumann and Shapley, *op. cit.*, p. 184.

は凸性を満たす選好がどのような条件の下で凹の効用関数で表現可能か[25]という問題に関係している。オーマンは，仮定のA 3が成り立つ場合，すなわち選好 $\{\succsim_t\}_{t\in T}$ を表現する一様に滑らかな効用関数 $\bar{u}=\{\bar{u}_t\}$ が存在する場合には，どんな $\gamma>0$ に対してもつぎのような性質を満たす効用関数 $w=\{w_t\}$ が存在することを証明した[26]。

(イ) どの $t\in T$ についても，w_t は本来の選好 $\succsim_t$ を表現している。

(ロ) $w=\{w_t\}$ は有界微分可能である。

(ハ) 各 $t\in T$ について，w_t は $\|x\|\leqq\gamma$[27]を満たすどの $x\in R_+^l$ においても R_+^l 上で凹である。すなわちそのような x では，任意の $y\in R_+^l$ に対して $w_t(y)-w_t(x)\leqq w_t'(x)\cdot(y-x)$ が成り立っている。

オーマンの命題そのものについて証明に立ち入るのはここでは差し控えなければならないが[28]，それを所与とすれば，T 上で有界かつ一様に0より大であるような可測関数 α があり，その α を用いて $u_t=\alpha(t)w_t$ と定義することにより，$u=\{u_t\}$ について，定理の目的である

$$\phi v_u(S)=\int_S u_t(x^*(t))\mu(dt) \quad \text{for all} \quad S\in\mathscr{C}$$

という帰結を示すことができるのである。

ここから証明の本筋に入るが，以下では一般性を失うことなく，出発点のワルラス均衡 (x^*, p^*) において $\sum_{h=1}^{l}p_h^*=1$ が成り立つように価格が規準化されているものと考える。仮定A 3が有界微分可能性の定義(d)項を含むところから，$p^*>0$ となっていることはいうまでもない。またやはりA 3が仮定されるので上記のオーマンの命題が成立し，そこで仮定A 2により存在が保証されている $\bar{a}$ を用いて $\gamma=\max_h \bar{a}_h/\min_h p_h^*$ としたときに，その命題から得られる効用関数を $w=\{w_t\}$ であらわすことにする。

まずはじめに，ほとんどすべての $t\in T$ について w_t は $x^*(t)$ において R_+^l 上で凹となることを示そう。$w=\{w_t\}$ が有界微分可能であることにより，その定義の(d)項から $w_t'(x^*(t))>0$，したがって，ほとんどすべての $t\in T$ に対し $p^*x^*(t)=p^*a(t)$ となっている。またそのような t については $x^*(t)\in R_+^l$ であるところから，すべての h について

$$p_h^*x_h^*(t)\leqq p^*x^*(t)=p^*a(t) \tag{5.1}$$

(25) 選好が効用関数で表現可能であれば，選好の凸性と効用関数の擬凹性とは同値になる。したがってこの問題は，どのような場合に擬凹関数をうまく単調変換して凹関数にできるか，ということでもある。これが一般には可能でないことは，たとえば Andreu Mas-Colell, *The Theory of General Economic Equilibrium,* 1985, pp. 80-1 に示されている。

(26) Aumann, "Values of Markets with a Continuum of Traders", p. 639, Lemma 15.1 参照。

(27) 以下本節では $\|x\|$ は最大値ノルム，すなわち $\|x\|=\max_h|x_h|$ を意味する。

(28) この補題の証明について興味をもつ読者は，オーマンの上記論文の pp. 639-642を参照されたい。また Mas-Colell, *op. cit.,* pp. 78-82, pp. 94-95 をも参照することが有益である。

となっているのでなくてはならない。他方仮定A 2 と p^* が規準化されていることから

$$p^* a(t) < p^* \bar{a} \leqq \max_h \bar{a}_h \tag{5.2}$$

となり，よって (5.1)，(5.2) からすべての h について

$$x_h^*(t) < \max_h \bar{a}_h / p_h^* \leqq \max_h \bar{a}_h / \min_h p_h^*$$

を得る。ゆえにほとんどすべての $t \in T$ について

$$\|x^*(t)\| \leqq \max_h \bar{a}_h / \min_h p_h^*$$

となり，w_t の性質(ハ)より w_t はほとんどすべての $t \in T$ について $x^*(t)$ において R_+^l 上で凹となるのである。

さて以下ではそのような t について，$x^*(t)$ が非ゼロの場合とゼロの場合とに分けて推論を進める。

ケース1　$x^*(t) \neq 0$ の場合

一般性を失うことなく $x_1^*(t) > 0$ として $\alpha(t) = p_1^* / w_{t,1}(x^*(t))$ と定義する。[29] そのとき，まず

$$p_h^* \geqq \alpha(t) w_{t,h}(x^*(t)) \quad \text{for all } h \tag{5.3}$$

となることを示したい。

事実いまかりに，ある $h \neq 1$ について $p_h^* < \alpha(t) w_{t,h}(x^*(t))$ であったとすれば，$h=1$ についてはもちろん定義から $p_1^* = \alpha(t) w_{t,1}(x^*(t))$ であるから，

$$\frac{p_h^*}{p_1^*} < \frac{\alpha(t) w_{t,h}(x^*(t))}{\alpha(t) w_{t,1}(x^*(t))},$$

ゆえに

$$0 < \frac{p_h^*}{p_1^*} < \theta < \frac{\alpha(t) w_{t,h}(x^*(t))}{\alpha(t) w_{t,1}(x^*(t))} \tag{5.4}$$

となるような $\theta > 0$ をとることができる。ここで

$$x^s = x^*(t) + (\underset{(1\text{st})}{-\theta s}, 0, \ldots, 0, \underset{(h\text{ th})}{s}, 0, \ldots, 0)$$

とすると，$x_1^*(t) > 0$ としたので十分小さい $s > 0$ については $x^s \in R_+^l$ となり，$w_t(x^s) = w_t(x_1^*(t) - \theta s, x_2^*(t), \ldots, x_{h-1}^*(t), x_h^*(t) + s, x_{h+1}^*(t), \ldots, x_l^*(t))$ であるところから

(29)　ここで $w_{t,h}(x^*(t)) \equiv \dfrac{\partial w_t(x^*(t))}{\partial x_h}$, $h = 1, 2, \ldots, l$ である。

$$\frac{dw_t(x^S)}{ds}=-\theta\frac{\partial w_t(x^S)}{\partial x_1}+\frac{\partial w_t(x^S)}{\partial x_h}$$

を得る。ここで $s\to 0_+$ とすれば $x^S\to x^*(t)$，そして w_t が連続微分可能であることから

$$-\theta\frac{\partial w_t(x^S)}{\partial x_1}\to -\theta w_{t,1}(x^*(t)),\quad \frac{\partial w_t(x^S)}{\partial x_h}\to w_{t,h}(x^*(t))$$

となり，極限では前に導いた（5.4）によって $-\theta w_{t,1}(x^*(t))+w_{t,h}(x^*(t))>0$ となる。ゆえに十分小さい $s>0$ については $dw_t(x^S)/ds>0$ であり，よって $w_t(x^*(t))<w_t(x^S)$ である。ところが $x^*(t)$ はワルラス均衡配分であるから，上の不等式が成り立つためには x^S が予算制約を満たすことは許されず，$p^*x^S>p^*a(t)=p^*x^*(t)$，したがって $p_1^*(-\theta s)+p_h^*s>0$ となり，$s>0$ であることを考慮すれば $p_h^*/p_1^*>\theta$ となって，前の（5.4）と矛盾する。

つぎに j を $x_j^*(t)>0$ となる財の番号としたとき，

$$p_j^*\leqq\alpha(t)w_{t,j}(x^*(t))$$

となることを示したい。

まず $j=1$ なら定義からこの式は当然成り立つ。そこで $j\neq 1$ として議論を進めることにする。かりに $p_j^*>\alpha(t)w_{t,j}(x^*(t))$ だったとすれば，

$$\frac{p_j^*}{p_1^*}>\frac{\alpha(t)w_{t,j}(x^*(t))}{\alpha(t)w_{t,1}(x^*(t))},$$

よって

$$\frac{p_j^*}{p_1^*}>\theta>\frac{\alpha(t)w_{t,j}(x^*(t))}{\alpha(t)w_{t,1}(x^*(t))} \tag{5.5}$$

のような θ がある。そこでこんどは

$$x^S=x^*(t)+(\underset{(1\text{st})}{\theta s},0,\dots,0,\underset{(j\text{ th})}{-s},0,\dots,0)$$

とすると，$x_j^*(t)>0$ なので十分小さな $s>0$ については $x^S\in R_+^l$ となり，

$$\frac{dw_t(x^S)}{ds}=\theta\frac{\partial w_t(x^S)}{\partial x_1}-\frac{\partial w_t(x^S)}{\partial x_j},$$

ゆえに $s\to 0_+$ とすれば

$$\theta\frac{\partial w_t(x^S)}{\partial x_1}\to\theta w_{t,1}(x^*(t)),\quad \frac{\partial w_t(x^S)}{\partial x_j}\to w_{t,j}(x^*(t))$$

となるから，十分小さい $s>0$ については（5.5）より $dw_t(x^S)/ds>0$ が成り立つ。よって $w_t(x^*(t))<w_t(x^S)$ となり，前と同様の議論をつうじて（5.5）と矛盾する結論 $p_j^*/p_1^*<\theta$ が得られる。

以上の議論を統合することにより，

$$p_j^* = \alpha(t) w_{t,j}(x^*(t)) \quad \text{for} \quad x_j^*(t) > 0$$
$$p_j^* \geqq \alpha(t) w_{t,j}(x^*(t)) \quad \text{for} \quad x_j^*(t) = 0$$
となることが示されたから，すべての $y \in R_+^l$ について
$$\begin{aligned} &\alpha(t) w_{t,j}(x^*(t))(y_j - x_j^*(t)) = p_j^*(y_j - x_j^*(t)) \quad \text{for} \quad x_j^*(t) > 0 \\ &\alpha(t) w_{t,j}(x^*(t))(y_j - x_j^*(t)) \leqq p_j^*(y_j - x_j^*(t)) \quad \text{for} \quad x_j^*(t) = 0 \end{aligned} \tag{5.6}$$
という帰結が得られたことになる。

ここで $u_t = \alpha(t) w_t$ と定義し，w_t が $x^*(t)$ において R_+^l 上で凹であることを考慮すれば，任意の $y \in R_+^l$ に対して
$$u_t(y) - u_t(x^*(t)) = \alpha(t)(w_t(y) - w_t(x^*(t))) \leqq \alpha(t) w_t'(x^*(t))(y - x^*(t))$$
という不等式が得られるが，それに上の（5.6）を用いることにより
$$u_t(y) - u_t(x^*(t)) \leqq p^*(y - x^*(t)) \quad \text{for all} \quad y \in R_+^l \tag{5.7}$$
という帰結を得る。

ケース 2　$x^*(t) = 0$ の場合

この場合は $\alpha(t) = \min_h p_h^* / \max_h w_{t,h}(0)$ とおけば
$$\alpha(t) \max_h w_{t,h}(0) = \min_h p_h^* \leqq p_h^* \quad \text{for all} \quad h$$
から，任意の j についても
$$\alpha(t) w_{t,j}(0) \leqq p_h^* \quad \text{for all} \quad h$$
となる。ここでも $u_t = \alpha(t) w_t$ と定義し，w_t が 0 において R_+^l 上で凹であることを考慮すれば，任意の $y \in R_+^l$ に対して
$$u_t(y) - u_t(0) = \alpha(t)(w_t(y) - w_t(0)) \leqq \alpha(t) \, w_t'(0)(y - 0)$$
が成り立つところから，その右辺に上の結果を代入して
$$u_t(y) - u_t(0) \leqq p^* (y - 0)$$
を得る。これは $x^*(t) = 0$ の場合も前記（5.7）の不等式が得られることを意味している。

ところで $\alpha(t)$ は，いずれの定義に徴してみても t について可測である。これは $x^*(t)$ の可測性，$w_t(x)$, $w_{t,j}(x)$ の x についての連続性と t についての可測性から明らかであろう。よって $\alpha(t)$ は T 上の可測関数となる。また $\alpha(t)$ は有界，かつ一様に 0 より大でもあるが，これは $\alpha(t)$ の定義にあらわれる p^* が正の定数で t から独立であること，x がすべてコンパクト集合
$$\{y \in R_+^l \mid \|y\| \leqq \max_h \bar{a}_h / \min_h p_h^*\}$$
の中を動くこと，さらにそのコンパクト集合上で $w_{t,j}(x)$，$j = 1, \ldots, l$ が有界，かつ一様に 0 より大であることより知られる。したがって $w = \{w_t\}$ が有界微分可能であることと総合すれば，

$u=\{u_t\}=\{\alpha(t)w_t\}$ もまた有界微分可能となることが知られるのである。

以上に述べたところから，定理2の帰結を導くことはもはや容易である。まず上に示したように，ワルラス均衡配分の $x^*(t)$ については，それが非ゼロであってもゼロであっても一般に

$$u_t(y)-u_t(x^*(t))\leqq p^*(y-x^*(t)) \quad \text{for all } y\in R^l_+$$

という不等式が成立している。ゆえに両辺に $p^*a(t)$ を加えて変形すれば

$$u_t(y)-p^*(y-a(t))\leqq u_t(x^*(t))-p^*(x^*(t)-a(t)) \quad \text{for all } y\in R^l_+$$

という不等式を得，これは (x^*, p^*) が譲渡可能効用をもつワルラス均衡であることを意味している。すると，どの $S\in\mathscr{C}$ についても

$$\int_S (u_t(x^*(t))-p^*(x^*(t)-a(t)))\mu(dt)=\phi v_u(S)$$

となることがすでに定理1の証明の一部として第4節で示されている。ところが x^* は仮定によりワルラス均衡配分であるので，ほとんどすべての $t\in T$ において $p^*x^*(t)=p^*a(t)$ となっている。ゆえにどの $S\in\mathscr{C}$ についても

$$\int_S u_t(x^*(t))\mu(dt)=\phi v_u(S)$$

であることになり，$u=\{u_t\}$ によって評価すればワルラス均衡配分 x^* がシャプレー値配分になることが知られるのである。各プレーヤーを $\mu(dt)$ の測度をもつ dt と解釈すれば，上記の結果から

$$u_t(x^*(t))\mu(dt)=\phi v_u(dt)$$

となることも明らかであろう。

6

さて前節までの考察で，しかるべき仮定の下ではシャプレー値配分がワルラス均衡配分となり，ワルラス均衡配分がシャプレー値配分となることが明らかにされた。この帰結がオストロイ＝マコウスキーたちの議論と合流するためには，最後にシャプレー値配分が後者の意味での限界生産力配分（オーマンの用語では限界貢献度配分）と一致することが示されねばならないが，すでにこの点については，オーマン自身が『エコノメトリカ』論文の付録において周到な考察を行なっている[(30)]。以下に述べるところは，そこで展開されている推論を，本稿の目的に最小限必要な部分のみについて翻案し襲用したものである。

直観的にいえば各プレーヤーが $v_u(S)-v_u(S\backslash dt)$ の期待値に等しい効用を受け取るような配分

(30) Aumann, “Values of Markets with a Continuum of Traders”, Appendix, pp. 642-645 参照。また本文 p. 625をも参照されたい。

がシャプレー値配分であり，これに対して彼らが $v_u(T)-v_u(T\backslash dt)$ に等しい効用を受け取るような配分，すなわち社会全体に対する貢献分を受け取るような配分が本来の限界貢献度配分である。この両者が目下のノン・アトミックな交換経済において果たして一致するかどうかを検討してみる作業が，本節での，そして本稿最後のプログラムとなるのである。

ここではわれわれのノン・アトミック経済が仮定A 1，A 2を満たし，その選好が有界微分可能な効用関数 $u=\{u_t\}$ で表現されるものと仮定して，ゲーム v_u とその漸近シャプレー値 ϕv_u を第3節と同じように定義することにしよう。さらにそこで説明した T の分割を細かくしていく手法をいま一度想起するとして，$(\Pi_1, \Pi_2, \ldots)$ でそのような分割の列をあらわすものとする。いま m を任意に固定したとき，Π_m の任意の元 B に対して B の限界貢献度は

$$\varDelta_B v_u(T)=v_u(T)-v_u(T\backslash B)$$

と定義される。すると本節で証明すべき定理は，つぎのように表現される。

定理 3　任意に $\varepsilon>0$ を定めたとき，その ε に対してある m_0 が決まって，m がその m_0 より大きくなれば，すべての $B\in\Pi_m$ について

$$|\varDelta_B v_u(T)-\phi v_u(B)|<\varepsilon\mu(B)$$

が成り立つ。

この定理の主張が，本節での本来の課題に対してもつ意味は明らかであろう。m を限りなく大きくすれば B の測度 $\mu(B)$ は限りなく小さくなり[31]，$\varDelta_B v_u(T)$ や $\phi v_u(B)$ はともに小さくなっていく。すると $\varDelta_B v_u(T)$ と $\phi v_u(B)$ の差そのものも小さくなっていくが，同時にそれを $\mu(B)$ で割った「1人当たりの」$\varDelta_B v_u(T)$ と $\phi v_u(B)$ の差もまた任意に小さく押さえることができるのである。

証　明[32]

いま

$$v_u(T)=\max\left\{\int_T u_t(x(t))\mu(dt)\middle|\int_T x(t)\mu(dt)=\int_T a(t)\mu(dt),\ x(t)\in R^l_+\quad\text{for all } t \text{ in } T\right\}$$

が x において達成されているとすれば，すでに定理1の証明中で示したように[33] (x, p) が譲渡可能効用をもつワルラス均衡になるような p が存在し，どんな $S\in\mathscr{C}$ についても

---

(31)　この主張の厳密な証明については Aumann and Shapley, *Values of Non-Atomic Games,* Lemma 18.7 を参照せよ。この性質は以下の推論で繰り返し用いられる。

(32)　以下の証明においては Aumann and Shapley, *Values of Non-Atomic Games* 所収の命題をこれまで以上に活用して推論を進める箇所が多い。したがって証明にあたってその概略を述べるにとどまった部分もあることをあらかじめお断りしておきたい。詳しい証明を必要とする読者は，オーマンの原論文およびオーマン＝シャプレーの著書を参照していただきたい。

(33)　第4節。

$$\int_S (u_t(x(t)) - p(x(t) - a(t)))\mu(dt) = \phi v_u(S) \tag{6.1}$$

となる。

ここで任意の $a \in R_+^l$ と $S \in \mathscr{C}$ について

$$u_S(a) = \max\left\{\int_S u_t(x(t))\mu(dt) \middle| \int_S x(t)\mu(dt) = a,\ x(t) \in R_+^l \quad \text{for all } t \text{ in } S\right\}$$

と定義し，オーマン＝シャプレーの著書の命題38.5[34]の b を $\int_T a(t)\mu(dt)$ に，S を T に，y を x に読み換えれば，$u_S(b)$ が y で達成されているということは $u_T(\int_T a(t)\mu(dt))$ が x で達成されているということであり，これは冒頭で仮定した $v_u(T)$ が x で達成されていることに等しい。ゆえに命題38.5の前提はすべて満たされていることになり，その帰結

$$\frac{\partial u_S(a)}{\partial a_j} = p_j, \quad j = 1, 2, \ldots, l,$$

すなわちベクトル表示で

$$u'_S(a) = \left(\frac{\partial u_S(a)}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial u_S(a)}{\partial a_l}\right)^{(35)}$$

としたときに，

$$u'_T\left(\int_T a(t)\mu(dt)\right) = p \tag{6.2}$$

が成り立つことになる。そこで（6.1）の p の部分に（6.2）の左辺を代入することにより，それを

$$\phi v_u(S) = \int_S (u_t(x(t)) + u'_T\left(\int_T a(t)\mu(dt)\right)(a(t) - x(t)))\mu(dt) \tag{6.3}$$

と書き替えることができる。

つぎにオーマン＝シャプレーの補題40.1[36]で，S を T に，S_0 を $T \backslash B$ に，y を x に読み換えれば，m を十分大きくとることによって任意の $B \in \Pi_m$ に対して $\mu(B)$ をいくらでも小さくできるので，$\int_{T \backslash B} a(t)\mu(dt) > 0$ という仮定は元来の仮定A 1から当然満たされ，また $v_u(T) = u_T(\int_T a(t)\mu(dt))$ が x で達成されるという仮定も目下の議論の大前提であるから，やはり当然満たされる。ゆえに補題40.1の仮定はすべて満たされており，その帰結を用いてつぎのように主張することができる。

(34) *op. cit.*, p. 226.
(35) $u_S(a)$ の微分可能性は Aumann and Shapley, *op. cit.*, p. 224, Proposition 38.1 で証明されている。
(36) *op. cit.*, p. 242.

すなわちそこでの $\int_{S_0} y(t)\mu(dt)$ を $\int_{T\setminus B} x(t)\mu(dt)$ に読み換えれば，十分大きな m をとると任意の $B\in\Pi_m$ に対して $\int_{T\setminus B} x(t)\mu(dt)$ と $\int_{T\setminus B} a(t)\mu(dt)$ とを結ぶ線分上に点 $c\in R^l$ があり，

$$\varDelta_B v_u(T)=v_u(T)-v_u(T\setminus B)=\int_B (u_t(x(t))+u'_{T\setminus B}(c)(a(t)-x(t)))\mu(dt) \tag{6.4}$$

となっている，といえるのである。

さて c は $\int_{T\setminus B} x(t)\mu(dt)$ と $\int_{T\setminus B} a(t)\mu(dt)$ とを結ぶ線分上にあるのであるから，ある θ，$0\leqq\theta\leqq 1$ を選んで，2点の凸結合として c をあらわせば

$$\begin{aligned}
c&=\theta\int_{T\setminus B} x(t)\mu(dt)+(1-\theta)\int_{T\setminus B} a(t)\mu(dt)\\
&=\theta\left(\int_T x(t)\mu(dt)-\int_B x(t)\mu(dt)\right)+(1-\theta)\left(\int_T a(t)\mu(dt)-\int_B a(t)\mu(dt)\right)\\
&=\int_T a(t)\mu(dt)-\int_B [\theta x(t)+(1-\theta)a(t)]\mu(dt) \qquad \left(\because \int_T x(t)\mu(dt)=\int_T a(t)\mu(dt)\right)
\end{aligned}$$

となり，$b\equiv\int_T a(t)\mu(dt)-\int_B x(t)\mu(dt)$ とすれば

$$b-c=(1-\theta)\int_B (a(t)-x(t))\mu(dt) \tag{6.5}$$

を得る。

ここでふたたびオーマン＝シャプレーの命題38.7[37]を用い，そこでの S を $T\setminus B$ に読み換えれば，任意の $\varepsilon>0$ に対してある m_0 が決まり，m がその m_0 より大きくなれば，すべての $B\in\Pi_m$ について

$$\|u'_{T\setminus B}(b)-u'_{T\setminus B}(c)\|<\varepsilon \tag{6.6}$$

となることが分かる。

事実，まず m を十分に大きくとり，したがって任意の $B\in\Pi_m$ について $\mu(B)$ を十分小さくすれば，b，c のつくり方から，それらの座標はすべて正となるので，$b, c\in A(\varepsilon,\alpha)\equiv\{x\in R^l_+ | x_h\geqq\varepsilon$ for all h and $\sum_{h=1}^l x_h\leqq\alpha\}$ となるように十分小さな $\varepsilon\,(0<\varepsilon<\mu(T))$ と十分大きな α を選べることに注意しよう。そこでそのような ε と α に対して命題38.7を適用すれば，ある $\delta>0$ が存在して，$\mu(T\setminus B)\geqq\varepsilon$，$\|b-c\|\leqq\delta$ かつ $b, c\in A(\varepsilon,\alpha)$ である限りは $\|u'_{T\setminus B}(b)-u'_{T\setminus B}(c)\|<\varepsilon$ となることが分かる。ここで m を十分に大きくすれば，上記の注意より $b, c\in A(\varepsilon,\alpha)$ となり，またそのとき任意の $B\in\Pi_m$ に対して $\mu(B)$ をいくらでも小さくできるので $\mu(T\setminus B)$ を $\mu(T)$ に，そして (6.5) の右辺を 0 にいくらでも近づけることができる。したがって十分大きな m に対しては任意の $B\in\Pi_m$ について $\mu(T\setminus B)\geqq\varepsilon$ ならびに $\|b-c\|\leqq\delta$ となることもいえるのである。よって任意の $\varepsilon>0$ に対

(37) *op. cit.*, p. 226.

してある m_0 が決まり，m がその m_0 より大きくなれば，すべての $B \in \Pi_m$ について $\|u'_{T\setminus B}(b) - u'_{T\setminus B}(c)\| < \varepsilon$ となることが分かる。

最後にふたたびオーマン＝シャプレーの補題40.1[38]を用い，そこでの S を T に，S_0 を $T\setminus B$ に読み換えれば，もし $\int_{T\setminus B} x(t)\mu(dt) > 0$ なら

$$u'_T(\int_T a(t)\mu(dt)) = u'_{T\setminus B}(\int_{T\setminus B} x(t)\mu(dt))$$

という帰結を得る。ここで $\int_{T\setminus B} x(t)\mu(dt) > 0$ という前件は，前にも述べたように m を大きくすれば任意の $B \in \Pi_m$ についてかならず保証されると考えてよい。ゆえに目下の b の定義から

$$\int_{T\setminus B} x(t)\mu(dt) = \int_T x(t)\mu(dt) - \int_B x(t)\mu(dt) = b$$

であることを考慮すれば，上記の帰結から十分に大きな m に対しては

$$u'_{T\setminus B}(b) = u'_T(\int_T a(t)\mu(dt)) \quad \text{for all } B \in \Pi_m \tag{6.7}$$

が得られる。

さて (6.3)，(6.4)，(6.6) および (6.7) が成立していれば，定理 3 の証明はストレートに完了する。

ステップ 1　まず任意の $\varepsilon_1 > 0$ に対して m_0 が決まって，$m \geqq m_0$，$B \in \Pi_m$ のようなすべての m，B について

$$|\Delta_B v_u(T) - \phi v_u(B)| \leqq \varepsilon_1 \sum_{h=1}^{l} \int_B (a_h(t) + x_h(t))\mu(dt)$$

となることを示したい。

事実 (6.3)，(6.4) および (6.7) から，十分大きな m_0 と $m \geqq m_0$，$B \in \Pi_m$ となる m，B については

$$\begin{aligned}
&\Delta_B v_u(T) - \phi v_u(B) \\
&= \int_B [u_t(x(t)) + u'_{T\setminus B}(c)(a(t) - x(t))]\mu(dt) \\
&\qquad\qquad - \int_B [u_t(x(t)) + u'_T(\int_T a(t)\mu(dt))(a(t) - x(t))]\mu(dt) \\
&= \int_B [u'_{T\setminus B}(c)(a(t) - x(t))]\mu(dt) - \int_B [u'_{T\setminus B}(b)(a(t) - x(t))]\mu(dt) \\
&= \int_B (u'_{T\setminus B}(c) - u'_{T\setminus B}(b))(a(t) - x(t)))\mu(dt)
\end{aligned}$$

となるから，

---

(38)　*op. cit.*, p. 242.

$$
\begin{aligned}
|\Delta_B v_u(T)-\phi v_u(B)| &\leqq \int_B |(u'_{T\setminus B}(c)-u'_{T\setminus B}(b))(a(t)-x(t))|\mu(dt) \\
&\leqq \int_B \|u'_{T\setminus B}(c)-u'_{T\setminus B}(b)\| \|a(t)-x(t)\|\mu(dt) \\
&\leqq \varepsilon_1 \int_B (\|a(t)\|+\|x(t)\|)\mu(dt) \\
&\leqq \varepsilon_1 \sum_{h=1}^{l} \int_B (a_h(t)+x_h(t))\mu(dt)
\end{aligned}
$$

となる。ここで上から2番目の不等式はコーシー＝シュヴァルツの不等式，3番目の不等式は(6.6)と三角不等式，最後の不等式は各座標の和がノルムより大であるところによる。

ステップ2　つぎに任意の $\varepsilon>0$ に対して m_0 が決まり，$m \geqq m_0$，$B \in \Pi_m$ のようなすべての m，B について，最終的な帰結

$$|\Delta_B v_u(T)-\phi v_u(B)| < \varepsilon\mu(B)$$

が成り立つことを示したい。

まず仮定A2から a は一様に有界であるから，すべての $t \in T$，かつすべての $h \in \{1, 2, \ldots, l\}$ について

$$a_h(t) \leqq M_a$$

となるような M_a がある。

つぎにオーマン＝シャプレーの補題37.8で[39]，そこでの ε を $\mu(T)>\varepsilon>0$ を満たす任意の実数，α を $\sum_{h=1}^{l}\int_T a_h(t)\mu(dt)<\alpha$ を満たす任意の実数とし，S を T に，y を x に，b を $\int_T a(t)\mu(dt)$ に読み換え，さらに $v_u(T)=u_T(\int_T a(t)\mu(dt))$ が x で達成されることに注意すれば，この補題の帰結よりある可積分な関数 η が存在し，ほとんどすべての t について

$$x_h(t) \leqq \eta(t)$$

がどの h についても成り立つことが分かる。ところで補題37.8の証明によれば，この η は補題37.1[40]に登場する $\eta_\delta(t)$ をそのまま使ってよいことになっている。われわれは $u=\{u_t\}$ が有界微分可能であることを仮定しているので，その性質(c)より u には一様な上界 $\bar{u}$ が存在しており，そこでそれについて

$$\eta_\delta(t)=\max\left(\frac{\bar{u}}{\delta}, 1+\frac{1}{\delta^2}\right), \text{ for all } t \text{ in } T$$

と定義すれば，実は $\eta_\delta(t)$ が補題37.1の仮定をすべて満たすことが知られるのである。この点はつぎのような推論から明らかとなる。いま $\sum x=\sum_{h=1}^{l} x_h(t) \geqq \eta_\delta(t)$ とすれば，上記の $\eta_\delta(t)$ のつくり方

(39)　*op. cit.*, p. 218.

(40)　*op. cit.*, p. 215.

から $\eta_\delta(t)\geqq \bar{u}/\delta$ であるから，当然 $\sum x\geqq \bar{u}/\delta$ すなわち $\delta\sum x\geqq \bar{u}$ となり，したがって $u_t<\bar{u}$ であることと考え合わせて

$$u_t(x)<\delta\sum x$$

を得る。他方やはり $\eta_\delta(t)$ のつくり方から $\eta_\delta(t)\geqq 1+1/\delta^2>1/\delta^2$ であるから，$\sum x>1/\delta^2$ すなわち $1<\delta^2\sum x$，よって $1<\delta\sqrt{\sum x}$ である。そこでその両辺に $\sqrt{\sum x}$ をかけて

$$\sqrt{\sum x}<\delta\sum x$$

を得る。

ゆえに補題37.8の帰結がこの $\eta_\delta(t)$ について成り立つことが分かり，$x(t)$ は，ほとんどすべての t，すべての h について

$$x_h(t)\leqq \max\left(\frac{\bar{u}}{\delta}, 1+\frac{1}{\delta^2}\right)$$

を満たすという帰結が得られたことになる。

そこで

$$M=\max(M_a, \max\left(\frac{\bar{u}}{\delta}, 1+\frac{1}{\delta^2}\right))$$

と定義して，以上の帰結をステップ1の結論に適用する。すると

$$\begin{aligned}&\sum_{h=1}^{l}\int_B(a_h(t)+x_h(t))\mu(dt)\\ &\leqq \sum_{h=1}^{l}\int_B 2M\mu(dt)=2lM\int_B\mu(dt)=2lM\mu(B)\end{aligned}$$

となるので，いま任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2lM}$$

とおけば，ステップ1の結論から，この ε_1 に対して m_0 が決まって，$m\geqq m_0$，$B\in\Pi_m$ のようなすべての m，B について

$$|\Delta_B v_u(T)-\phi v_u(B)|<\varepsilon_1 2l\,M\mu(B)=\varepsilon\mu(B)$$

が成り立ち，定理3の証明が完了する。

これで本稿で企図したプログラムは，すべて果たされたことになる。

（名誉教授）
（経済学部助教授）