Title	進化的ネットワーク形成に関する一考察
Sub Title	An evolutionary approach to network formation
Author	山方, 竜二
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1999
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.91, No.4 (1999. 1) ,p.652(98)- 679(125)
JaLC DOI	10.14991/001.19990101-0098
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19990101-0098

「三田学会雑誌」91巻4号（1999年1月）

進化的ネットワーク形成に関する一考察

山　方　竜　二

1　序

近年，経済主体がつくりあげるネットワーク構造に関心が集まっている。市場で取引の対象となるようなネットワークとしては，空港間を結ぶ航空会社の空路，そして，電話・インターネットなどにみられる事業者同士の通信網の相互接続などをあげることができる。さらには，市場情報の獲得のため販売店と生産者間に張り巡らされる様々な公式・非公式のネットワーク，企業内の組織構造を通じた情報伝達ネットワーク，加えて，消費者間の「ロコミ」ネットワークのように，普段は存在を意識されないものまでが，その関心領域に含まれている。

一口にネットワークとは言っても，その存在理由が異なれば，構成員個々にネットワークが働きかける作用も，それを分析するのに適した手法も異なったものとなってくる。例えば，企業内の情報伝達ネットワークは，その構成員が（少なくとも表向きには）勝手に構造を変えることはできず，組織中枢部によって管理された手順に従って構成されている。したがって，この場合は，人事権などの何らかの強制力を暗黙の前提にした，組織全体として効率的なネットワーク構造の導出に関心が集まる。また，電話・インターネットなどのネットワークは，各通信事業者同士は互いに顧客の獲得競争を繰り広げつつ，一方では相互接続の拡充が集客の決め手となる。このため，構成員間で様々な戦略的状況が発生する。分析は，成員個々のインセンティヴの問題に帰着され，一般的には効率性とは程遠いネットワークが出現する。

本稿においては，成員個々が自律的に構成するネットワークが，その均衡においてもつ性質を模索する。鍵となる概念は，ナッシュ均衡と進化的調整である。プレーヤーは，自分がリンクを組むことを希望するプレーヤーの集合を選択する。双方がリンクを希望した場合に，じっさいにリンクは作られ，少なくともどちらか一方がリンクを希望しない場合にはリンクが作られないような型のネットワーク形成ゲームを考える。プレーヤーは，出来上がったネットワークの形とその中で自分の占める位置に応じて利得を得る。

これまで，ネットワークのリンクの自律的な発生構造をナッシュ均衡で分析した研究は多くはない。これは，ナッシュ均衡という概念のみでは，分析に有用な程には均衡を特定できないからである。じっさい，後で見るように，非常に多数のネットワークが均衡として発生し，それぞれの間に共通する性質は多くはない。我々は，ネットワークがいかなる形状に均衡するかを知ることによって，その構成員個々が将来的にネットワークから得る便益を予測したり，逆に既に出来上がったネットワークがもつ特定の性質を観察することによって，構成員の個々の関係を類推したいとも考えている。このような共通性に欠ける複数均衡の存在はその目的のためには望ましくない。

プレーヤーの合理性を前提とした，複数均衡を精緻化するための方法は数多く知られている。しかしながら，本稿においては，むしろプレーヤーの限定的な合理性を前提にした進化的ゲーム理論の枠組みにおいて均衡の精緻化を模索したいと考える。進化的ゲーム理論を用いる利点は，これがネットワーク形成の動的な過程を叙述するのに適当な構造を備えているということである。通常のゲーム理論では，均衡の調整過程はプレーヤー間の共有知識の存在を前提として，プレーヤーの頭の中で行われ，その調整の結果としての均衡が，じっさいに観察されると考える。(詳しくは，Fudenberg and Tirole [1991] 14章などを参照。) しかしながら，じっさいのネットワーク形成は，長い時間的スパンを通じて行われ，その間プレーヤーは観察・最適反応・実験などの過程を繰り返す。インターネットの形成過程などはまさに格好の例である。

進化的ゲーム理論には，Maynard Smith and Price [1973] などに始まる非確率的進化ゲーム理論と，Forster and Young [1990], Young [1993], Kandori, Mailth and Rob [1993] などに始まる確率的進化ゲーム理論の 2 つがあるが，本稿のモデルは後者に属する。確率的進化ゲームの理論は次のような調整過程をもっている。システムは観察・最適反応の過程を通じて一時的には局所的な最適状態に落ち着く。しかし，確率的にプレーヤーが突然変異を起こして最適状態を崩し，その結果システムは，また新たな観察・最適反応過程を通じて次の最適状態へと動いていく。システムは長期的には，他の状態に比べ最も突然変異によって崩れにくい状態に最も長い時間いることになるから，このような状態を長期均衡ととらえて，分析を行なう。

本稿は，とりわけ，Nöldeke and Samuelson [1993] の結果に多くを依存している。彼らは，進化的ゲームを用いて展開型ゲームの均衡の分析を行なったが，そこで分析手法として示された局所安定コンポーネントの概念は均衡の選別に非常に有用であり，本稿でも用いられる。

自律的なネットワーク形成に関する研究で代表的なものは，Jackson and Wolinsky [1996] である。かれらは，ここで均衡概念として，対安定 (pairwise stability) とよばれる概念を導入した。対安定は，プレーヤー同士が張る既存のリンクをそれぞれを一つずつ見たとき，双方にそれを切断するインセンティヴはなく，また，存在しないリンクについては，少なくともその当事者の一方がリンクを拒否するインセンティヴをもっていることをあらわした概念である。彼らは対安定性とネットワーク内での資源配分ルールの関係について分析を行ない，一般には効率的なネットワークを

対安定なものとして実現するような資源配分ルールは存在しないことを示した（Jackson and Wolinsky [1996] 定理1）。対安定性は，1つのリンクに対する安定性をあらわす概念であり，ナッシュ均衡で考えるような，1人のプレーヤーがリンクを一度に複数個変更する状況は考慮に入れていない。

他の重要な理論として，プレーヤーが自由にリンクを選択できないモデルではあるが，Radner [1992, 1993], Bolton and Dewatripont [1994] をあげることができる。彼らのモデルは，企業内で情報を一ヶ所にまとめあげるために最適なネットワーク構造のもつべき性質を分析している。ここで示されたアイデアにおいて重要なのは，リンクを通じて情報を一方から他方に伝達する際には，コストが発生するということである。彼らは，それを，ある個人によって処理された情報を他の個人が受け取った際，その内容を受け取った個人が理解し新たにまとめあげるためにかかる時間のことであると解釈した。リンクにはコストがかかるという考えは，さらに一般の場合に拡張が可能である。

また，協力ゲームの文脈においても，ネットワークは重要な役割を果たしている。Myerson [1977] では，プレーヤー間の協力関係が，ネットワークで連結されているもの同士以外では結べないという制限のもとで，シャプレイ値の拡張を行なった。

本稿の構成は次のとおりである。まず，2節において本稿で扱う一般モデルを提示する。また，進化的ゲーム理論の話題に入る前に，現在の問題設定で発生する複数均衡の問題を，一般的な理論と具体例の双方から描写する。次に，3節において，進化的ゲーム理論を本稿の文脈にあわせて構成する。この節の後半では，Nöldeke and Samuelson によって示された，極めて有用な諸性質を紹介する。4節において，進化ゲーム理論をもちいたネットワーク形成ゲームの分析を行なう。本稿での設定は特殊であるので，長期均衡がナッシュ均衡になることは証明を要する。この節でその証明が与えられ，あわせていくつかの諸性質も考察する。具体例による均衡の精緻化も試みる。5節では今後のあるべき展開を方向付ける。

2　モ デ ル

プレーヤーの集合を $\mathcal{N}=\{1, 2, ..., N\}$ とする。プレーヤーは，ネットワークにおける節点[1]の役割を果たす。各プレーヤー i の戦略は，集合 $\{0, 1\}^N$ 上の点 $a_i=(a_i(1), a_i(2), ..., a_i(N))$ であらわされる[2]。ここで，$a_i(j)=0$ とはプレーヤー i がプレーヤー j とのリンクを望まないことをあらわし，$a_i(j)=1$ はプレーヤー i がプレーヤー j とのリンクを希望することをあらわしている。自分自身と

（1）　端点・点などとよぶこともある。
（2）　$a_i(j)$ は N 次元ベクトル a_i の第 j 成分をあらわす。

のリンク $a_i(i)$ は本モデルにおいては何ら意味をもたないが，記号の便宜上，常に $a_i(i)=0$ とおく。したがって，今後 i の戦略の集合を，

$$S_i=\{a_i\in\{0,1\}^N: a_i(i)=0\},$$

とおく。またその直積を $S=\times_{i=1}^{N}S_i$ とおく。

プレーヤー i とプレーヤー j との間に張られたリンクを記号 ij であらわす。いま，リンクには方向があるとは考えていないので，ij と ji は同じリンクをあらわしている。完全グラフ g^N とは，任意のプレーヤーの組にリンクが張られたグラフである。すなわち，$g^N=\{ij: i\in\mathcal{N}, j\in\mathcal{N}, i\neq j\}$ である。これは，任意のプレーヤーが自分以外のプレーヤーのすべてにリンクしている状態をあらわす。本稿でネットワークはすべて完全グラフの部分集合であるから，ネットワーク全体の集合は，$\mathcal{G}=\{g: g\subset g^N\}$ である。

ネットワーク写像 $\gamma(a): S\rightarrow\mathcal{G}$ とは，プレーヤーの戦略の組 $a=(a_1,\ldots,a_N)$ から，それによって実現されるネットワークへの写像である。本モデルにおいては，プレーヤー間のリンクはその当事者双方がリンクを希望している場合にのみ張られると仮定する。したがって，ネットワーク写像 $\gamma(a)$ は，

$$\gamma(a)=\{ij: a_i(j)=1, a_j(i)=1, i\in\mathcal{N}, j\in\mathcal{N}\}, \tag{1}$$

とあらわされる。$\gamma(a)$ を a のネットワークとよぶこともある。例えば，$N=3, a_1=(0,1,1)$, $a_2=(1,0,1), a_3=(1,0,0)$ のとき，$\gamma(a)=\{12,13\}$ である。

各プレーヤーがネットワークから得る利得を定義するために，いくつかの記号・用語を定義する。まず，写像 $N(g):\mathcal{G}\rightarrow 2^{\mathcal{N}}$ はグラフ g において少なくとも一つのリンクを張っているプレーヤーの集合である。すなわち，$N(g)=\{i\in\mathcal{N}: \exists j\in\mathcal{N}, ij\in g\}$ である。$i\in N(g)$ を単に「i は g に属する」と読むこともある。例えば，$N=4, g=\{12,14\}$ のとき，$N(g)=\{1,2,4\}$ である。

グラフ g においてプレーヤー i_1 とプレーヤー i_n が連結しているとは，$N(g)$ 上のそれぞれ相異なるプレーヤーから構成される列 $\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}$ が存在して，$\{i_1i_2, i_2i_3,\ldots,i_{n-1}i_n\}\in g$ となっていることである。また，このとき列 $\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}$ を i_1 と i_n を結ぶ経路とよび，$i_1i_2\ldots i_n$ と書く。したがって，リンク ij をしているプレーヤー i と j は自明に連結しており，その経路は ij である。例えば，$N=5, g=\{12,23,45\}$ では，1 と 2，1 と 3，2 と 3，4 と 5 はそれぞれ連結している。それらを結ぶ経路はそれぞれ，12，123，23，45である。1 と 4 はこの場合連結していない。

さらに，グラフ g の成分 g' を次のように定義する。

定義 1． $g'\subset g$ は，以下の 2 条件を満たすとき g の成分であるという。

1. $N(g')$ に属する任意の相異なる二人のプレーヤー i,j は連結している。

2. $N(g')$ に属するプレーヤーとリンクしている任意のプレーヤーは，$N(g')$ に属している。

すなわち，g の成分 g' とは，g の中で互いに連結しているプレーヤーで構成された，極大の部分グラフである。たとえば，直前であげた，$N=5, g=\{12, 23, 45\}$ の例では，g の成分は $\{12, 23\}$ と $\{45\}$ の 2 つである。

あるグラフ g からプレーヤー i が得る利得を $\pi(i, g): \mathcal{N} \times \mathcal{G} \to R$ であらわす。$i \notin N(g)$ のとき，$\pi(i, g)=0$ と正規化する。また，$\pi(i, g)$ は次の性質を満たすと仮定する。

成分独立性　グラフ g が成分 g' をもつとき，任意の $i \in N(g')$ について，$\pi(i, g)=\pi(i, g')$ が成立する。

成分独立性は，プレーヤーの利得は彼が属する成分のみに依存することを述べている。プレーヤーは，自分の属さない成分に属するプレーヤーと連結する経路をもたないのだから，自分の属さない成分から何ら影響を受けないと考えるのである。成分独立性の仮定は，Jackson and Wolinsky [1996] でも行われている。

2.1　非協力ゲームにおける均衡

定義の途中ではあるが，進化的ゲームの説明に入る前に，このゲームを非協力ゲームとしてみたときのナッシュ均衡について考察してみよう。ここで，ナッシュ均衡は，通常通り次のように定義される。プレーヤー i 以外の戦略集合の直積を $S_{-i}=\times_{j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}} S_j$ とおき，その要素を a_{-i} などと表記する。

ナッシュ均衡　戦略の組 $a^*=(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_N^*) \in S$ が，任意のプレーヤー i の任意の戦略 $a_i \in S_i$ について，

$$\pi(i, \gamma(a_i^*, a_{-i}^*)) \geq \pi(i, \gamma(a_i, a_{-i}^*)),$$

を満たすとき，a^* をナッシュ均衡とよび，$\gamma(a^*)$ をナッシュ均衡ネットワークとよぶ。また，あるネットワークは，それをナッシュ均衡として実現するような戦略の組がすくなくとも 1 つあるとき，ナッシュ均衡ネットワークとよばれる。

いま，ネットワーク g の形成のために必要なリンクを支持し，それ以外のリンクを拒絶するようなプレーヤー i の戦略を e_i^g とおく。すなわち，

$$e_i^g(j)=\begin{cases}1 & (ij\in g \text{ のとき})\\ 0 & (ij\notin g \text{ のとき})\end{cases} \tag{2}$$

ここで，明らかに

$$e_i^g(j)=e_j^g(i), \tag{3}$$

であることに注意。例えば，$g=\{12,13\}$ のときには，$e_1^g=(0,1,1), e_2^g=(1,0,0), e_3^g=(1,0,0)$ である。

本稿ではプレーヤー間のリンクの形成には，両者の合意が必要であると仮定しているが，この仮定から直ちに次の命題1が得られる。証明の中で，交わりの演算 $a_i\wedge b_i : S_i\times S_i\rightarrow S_i$ を用いるが，これは，

$$(a_i\wedge b_i)(j)=\min\{a_i(j), b_i(j)\}, \forall j\in\mathcal{N},$$

と定義する。とくに，戦略 $a_i\wedge e_i^g$ は，戦略 a_i から，ネットワーク g において存在していないリンクの支持を排除したものである。自明に，$a_i\wedge e_i^g\leq e_i^g$ である。

命題1． あるネットワーク g がナッシュ均衡ネットワークとして実現可能であるための必要十分条件は，任意のプレーヤー i について，戦略 $\hat{a}_i\in S_i$ が，$\hat{a}_i\leq e_i^g$ を満たすならば，

$$\pi(i, \gamma(e^g))\geq\pi(i, \gamma(\hat{a}_i, e_{-i}^g)), \tag{4}$$

が成立することである。

証明　補論 A. 1参照。

命題1は，現在存在するリンクを切断するような他の戦略がプレーヤーの利得を増やさないことをチェックするだけで，均衡が確かめられることを述べている。これは，直観的には明らかなことである。リンクは両者の合意の上で張られるのだから，自分以外の誰もが自分とのリンクを希望していない状態では，彼のナッシュ均衡戦略からの逸脱は，ネットワークに新たにリンクを付け加えるようには働かず，彼の張る既存のリンクを切断するのみである。極端な例として，空グラフは切るべきリンクがひとつも無いから，自明にナッシュ均衡ネットワークである。さらに，命題1と利得の成分独立性より，直ちに次の結果を得る。

系1．(a) g がナッシュ均衡ネットワークであるならば，その成分である g' もナッシュ均衡ネッ

トワークである。
（b） g, g' がナッシュ均衡ネットワークであり，$N(g)\cap N(g')=\emptyset$ ならば，$g\cup g'$ もナッシュ均衡ネットワークである。

証明 補論 A. 2 参照。

系1（a）は，相異なる成分 g_1, g_2 をもつネットワーク g があれば，g_1, g_2 それ自身もナッシュ均衡ネットワークであることを述べている。系1（b）は，共通した構成員をもたないナッシュ均衡ネットワーク g_1, g_2 が存在したとき，それらが同時に存在するネットワーク $g_1\cup g_2$ もナッシュ均衡として実現されることを述べている。これらは，ネットワーク形成ゲームにおける本質的な複数均衡の存在を示唆するのである。これらに該当する場合以外にもナッシュ均衡が複数存在する状況の具体例を以下の2.2に与えておこう。

2.2 結合モデル

以下の設定は，Jackson and Wolinsky［1996］で用いられたものである。各プレーヤー i がグラフ g から引き出す利得 π は，次のようにあたえられる。

$$\pi(i,g)=\sum_{j\neq i}\delta^{t_{ij}(g)}w_{ij}-\sum_{j:\, ij\in g}c_{ij}.$$

ここで，w_{ij} は i にとっての j の連結上の価値であり，$w_{ij}>0$ と仮定する。また，$t_{ij}(g)$ は i と j の間の最短経路上でのリンク数をあらわす。便宜上，g において i と j が連結していない場合は $t_{ij}(g)=\infty$ と仮定する。$\delta\in(0,1)$ は i と j の近さを表現するために用いる割引因子である。c_{ij} は i が j とのリンクを張るために負担する費用である。

ここでは，結合モデルのうちで対称なケースに注意を限定する。$w_{ij}=1, c_{ij}=c$ とおき，

$$\pi(i,g)=\sum_{j\neq i}\delta^{t_{ij}(g)}-\sum_{j:\, ij\in g}c, \tag{5}$$

と考える。結合モデルは，連結していないプレーヤーからの影響を一切受けないから，成分独立性を自明に満たしている。

これらについて，次の命題が成立する。記号 $g+ij$ は $g\cup\{ij\}$ をあらわすものとする。

命題2．（a） g がナッシュ均衡ネットワークだとする。g が相異なる成分 g_1, g_2 をもつとき，それぞれに属するあるプレーヤー $i\in N(g_1), j\in N(g_2)$ で，彼らが実際につないでいるリンク数 n_i, n_j について，

$$\min\{n_i, n_j\} \geq \frac{c-\delta}{\delta c},$$

を満たすものが存在するなら，$g+ij$ もナッシュ均衡ネットワークとして実現される。

(b) もし，$\delta \geq c$ ならば，ナッシュ均衡ネットワーク g に対して，g においてリンクをもたなかったプレーヤー $i \notin N(g)$ と任意のプレーヤー $j \in \mathcal{N}$ の間のリンクを付け加えたネットワーク $g+ij$ もナッシュ均衡ネットワークとして実現される。

証明

(a) 新たに結ばれるリンクを $ij, i \in N(g_1), j \in N(g_2)$ としよう。いま j が p の利得を得ており n_j 個のリンクをそれ以前に結んでいたとすると，j が以前にリンクから得ていた費用差し引き前の収益は $p+n_j c$ である。j が以前にナッシュ均衡としてリンクを結んでいたことを考慮すると，$p \geq 0$ が必要であることに注意。i は以前には j と連結しているプレーヤーと一切連結していなかったから，新たに作られたリンクによって g_2 の各プレーヤーとの距離は j から見たそれぞれの距離よりちょうど1ずつ大きくなる。したがって，i が j との新たなリンクから得る収益は $\delta(p+n_j c)+\delta$ であり，新たにかかる費用は c である。したがって新たなリンク ij から得る利得の純増加は

$$\begin{aligned}\delta(p+n_j c)+\delta-c &\geq \delta p+\delta n_j c+\delta-c, \\ &=\delta p+\delta c\left(n_j-\frac{c-\delta}{\delta c}\right) \geq 0.\end{aligned}$$

よって新たなリンクから非負の利得を得るからこれを切断するような戦略は弱支配される。また，以前からある既存のリンクについては，そこに属するプレーヤーとの距離が変化しないから，それを切断するインセンティヴは発生しない。したがって，i については，新たに与えられた戦略 e_i^{g+ij} は e_{-i}^{g+ij} に対する最適反応となっている。

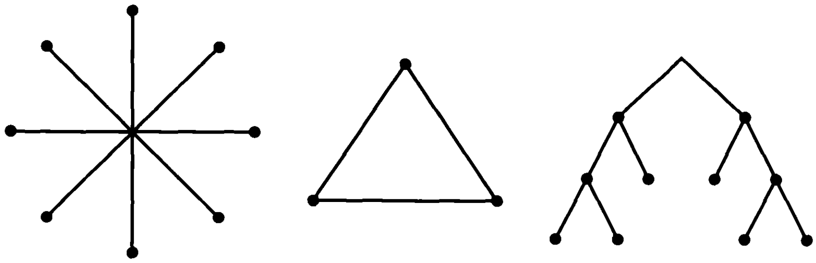
i と同じ成分 g_1 に属する他のプレーヤー k については，同じ成分に属しているプレーヤー同士の距離は変わらないことに注意しよう。また，$e_k^g = e_k^{g+ij}$ である。既存のリンクを切断するような戦略を $a_k (\leq e_k^g)$ とする。これらについて，次の関係が成立する。

$$\pi(k, \gamma(e^{g+ij})) = \pi(k, \gamma(e^g)) + f, \tag{6}$$

$$\pi(k, \gamma(a_k, e_{-k}^{g+ij})) = \pi(k, \gamma(a_k, e_{-k}^g)) + \delta^t f, \tag{7}$$

ここで，f はリンク ij によって k が新たに得た利得（具体的には，$f=\delta^{t_{ki}(g)+1}(p+n_j c)$）である。$t$ はプレーヤー k が戦略を e_k^{g+ij} から a_i に変更したときのリンクの変化に対応する，k と i の間の距離の増分である。もし切断されるリンクの中に i との最短経路を構成するものが属している場合は，i との距離が大きくなるから式 (7) 中の t が1以上になり，それ以外の場合は0となる。どちらにしろ，式 (6) は式 (7) より大きいから，リンク ij が加わった後も，k は既存のリンクを切る

図１：ナッシュ均衡ネットワークの例（$\delta^2+c<\delta$）



インセンティヴをもたない。

j および，j と同じ成分 g_2 に属するプレーヤーについても同様な証明が可能である。

(b) 条件 $\delta-c\geq0$ より，孤立点からリンクをもつように変わったプレーヤー i については，リンクを切断するインセンティヴをもたない。

i とリンクされるプレーヤー j は i とのリンクで正の純収益を獲得し，かつ既存のリンクとの距離は変化しないから，結局リンクを切断するインセンティヴはない。

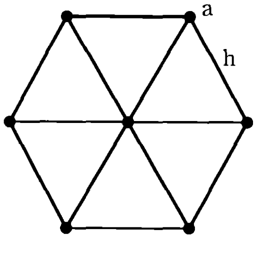
j と同じ成分に属する他のプレーヤー k については，上記(a)と同様な証明を行なうことができる。(証明了)

系１では成分ごとの構造に変化がないような複数のナッシュ均衡ネットワークについて言及したが，ここでの命題２では，成分の構造が変化しても依然としてナッシュ均衡ネットワークであり続けるようなケースについて言及している。この命題によって，系１で考えられるよりもさらに多くのネットワークがナッシュ均衡ネットワークとして存在しうることが分かる。

とくに命題２(b)は極端なケースであり，任意の林（閉路をもたないネットワーク）や木（すべてのプレーヤーが互いに連結しており，閉路をもたないネットワーク）も，ナッシュ均衡ネットワークとなる（リンクを全くもたないネットワーク（空グラフ）は，自明にナッシュ均衡ネットワークであることに注意)。図１はこのとき，ナッシュ均衡ネットワークとして支持されるものの例である。

命題２(b)のケースは非常に極端であるので，ともすれば任意のネットワークがナッシュ均衡ネ

図２：ナッシュ均衡ネットワークではない例（$\delta<c+\delta^2$）



ットワークになってしまい，ナッシュ均衡を考えること自体が無意味であると思われるかもしれない。しかしながら，例えば，図2のようなケースにおいては，$c \leq \delta$ であっても，もしも，δ が $\delta < c + \delta^2$ の範囲にあるならば，プレーヤー a はリンク ℓ_1 を切断するような戦略をとれば，いまよりも真に高い利得を得ることができる。よって，図2はナッシュ均衡ネットワークではない。

3　進化的ネットワーク形成モデル

前節でみたように，ネットワーク形成においては，非協力ゲームの枠組みとナッシュ均衡の概念のみでは，均衡が多数存在するケースを排除できないために，ネットワークの特徴的な性質が導出できない。本稿においては，近年多くの重要な結果を導いた進化的ゲーム理論の枠組みを用いて，均衡の精緻化が可能であるかを考察していくことにする。

ここでは，進化的ゲーム理論の枠組みを本稿のコンテキストで説明し，Nöldeke and Samuelson [1993] によって紹介された諸性質（3.3節で述べる）を用いて，均衡の精緻化を試みる。

3.1　観察と調整

各プレーヤー $i \in \mathcal{N}$ それぞれに対応した有限のエイジェントの集合 $\triangle_i$ を考える。$|\triangle_i| = d$ とする。各 $t = 0, 1, 2, \ldots$ 期に，各 $\triangle_i$ からそれぞれ1人ずつランダム(3)に任意のエイジェントが選ばれ，ネットワーク形成ゲームを行う。

各 t 期初，任意の集合 $\triangle_i$ の任意のエイジェント ξ は，彼のもつ純粋戦略 $a_\xi \in S_i$ によって特徴づけられている。t 期の状態 θ とは，その期初にそれぞれのプレーヤーのうち，ある戦略をとっているエイジェントの人数を与えるベクトルである。すなわち，θ は任意の $i \in \mathcal{N}$ について $\theta(i, \cdot)$: $S_i \to \{0, 1, \ldots, d\}$, $\sum_{a_i \in S_i} \theta(i, a_i) = d$ を満たす関数とみなすことができる。ありうる状態 θ の集合 Θ を状態空間とよぶ。以下では，$\mathcal{N}, S$, 各 $\triangle_i$ ともに有限であると仮定するので，Θ も有限となる。

各期のネットワーク形成ゲームが終った後，それぞれの $\triangle_i$ に属する任意のエイジェントは，それぞれ独立に μ の確率でその期に行われたネットワーク形成ゲームの結果として出現したネットワークを観察する。$1 - \mu$ の確率で何も観察を行わない。

各エイジェントはゲームの結果として出現したネットワークの形のみを観察することができ，個々のエイジェントがじっさいにとった戦略そのものは観察できないと仮定する。また，自分が現在リンクを希望している相手以外には興味を抱かないとも仮定する。これらは，本稿において扱うネットワーク形成ゲーム独自の仮定である。エイジェントからは，あるリンクが存在しないのはリンクの両端のプレーヤーが片方だけそのリンクを嫌った結果であるのか，それとも両者ともにリン

（3）　任意の $\triangle_i$ に属するエイジェントは，毎期 $1/d$ の確率でネットワーク形成ゲームに参加する。

クを嫌った結果なのかは観察できない。また，エイジェントの観察は，彼の行動によって制限されると考えるのである。

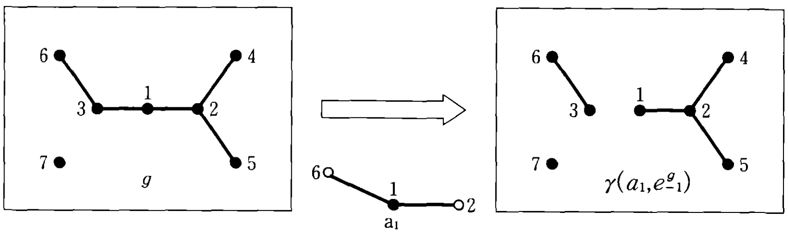
実現されたネットワークの観察を行なったエイジェントは，そのネットワークにあわせて自分の戦略を切り替える。すでに述べたように，エイジェントはネットワークに現存するリンクのみを考慮する。そこで，エイジェントは観察したネットワークで自分に対応するエイジェント（同じ $\triangle_i$ に属するエージェント）とリンクを結んでいる相手以外と新たにリンクを結べる可能性は無視して戦略を選ぶと考える。すなわち，もともと戦略 a_i をとっていたエイジェントが，ここで切り替える戦略 a_i^* は，観察したネットワークが $g \in \mathcal{G}$ であるとき，次に定義される集合 $B_i(g, a_i)$ に属すると考えるのである。

$$
\begin{aligned}
B_i(g, a_i) = \Big\{ & a_i^* \in S_i : \forall a_i' \in S_i, \\
& \pi(i, (a_i^*, e_{-i}^f)) \geq \pi(i, \gamma(a_i', e_{-i}^f)), f = \gamma(a_i, e_{-i}^g) \Big\}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

$B_i(g, a_i)$ を説明するために，図3をみてみよう。図3左側のネットワーク $g = \{12, 13, 24, 25, 36\}$ が形成されているとする。例えば2と6とのリンクを希望するプレーヤー1のエージェントの戦略は $a_1 = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$ で示されれる。図3中央がこのようなエージェントをあらわしている。図3右側に示されたネットワーク $\gamma(a_1, e_{-1}^g)$ はこの場合 $\{12, 24, 25, 36\}$ で示される。$B_i(g, a_i)$に従うエージェントはこの $\gamma(a_1, e_{-1}^g)$ に最適反応するように行動するのである。図を見て分かるとおり，このエイジェントは，現時点の戦略で自分がつなげる可能性のあるリンクしか考慮しない。例えば，自分が興味を抱いていない相手を無視することは $\gamma(a_1, e_{-1}^g)$ にリンク13が存在しないことで表現されている。$B_i(g, a_i)$ は，エイジェントが自分の戦略に限定された観察しか行わないことをモデル化しているのである。

ここでは，$B_i(g, a_i)$ よりも，さらに小さな集合に選択の幅を制限する。もともと戦略 a_i をとっていたエイジェントは，ネットワーク g を観察したとき，最適反応 $B_i(g, a_i)$ のなかでもとくに，現在の戦略 a_i からの変化が最小となるものの中から戦略を選ぶと仮定する。すなわち集合 $X_i(g, a_i)$ を，

図3：$B_i(g, a_i)$ の性質



$$X_i(g, a_i)=\{a_i^*\in B_i(g, a_i):\forall a_i'\in B_i(g, a_i), |a_i^*-a_i|\le|a_i'-a_i|\},$$

で定義したとき，これをサポートとする確率分布 $\chi_i(b_i;g, a_i)$ を用いて，$X_i(g, a_i)$ の中から，1個の戦略をランダムに選びだすと考えるのである。

最適反応を X_i に制限することは，2種類の慣性を表現している。第一の慣性は，自分の戦略 a_i が，現在観察されたネットワーク g に既に最適反応 $(a_i\in B_i(g, a_i))$ しているのなら，それ以上の調整は行わないということである。このタイプの慣性の仮定は，Nöldeke and Samuelson においても行われている。第二の慣性は，戦略を切り替えた方が真に高い利得を得るような場合でも，なるべくリンクごとに既存の状態を保っておこうとする力が働いているということである。リンクの状態の変更には何らかの意味でコストがかかると考えれば，このような慣性の存在は自然である。厳密には次の補題1が成立する。証明は，ここでの最適調整の意味から直観的にも明らかであろう。

補題1． 最適反応の慣性

（a） $a_i\in B_i(g, a_i)$のとき，$X_i(g, a_i)=\{a_i\}$.

（b） $a_i\notin B_i(g, a_i)$のとき，任意の $a_i^*\in X_i(g, a_i)$ について，

(b.1) $ij\notin g$ ならば，$a_i^*(j)=a_i(j)$.

(b.2) $ij\in g$ならば，$a_i^*(j)\le a_i(j)$.

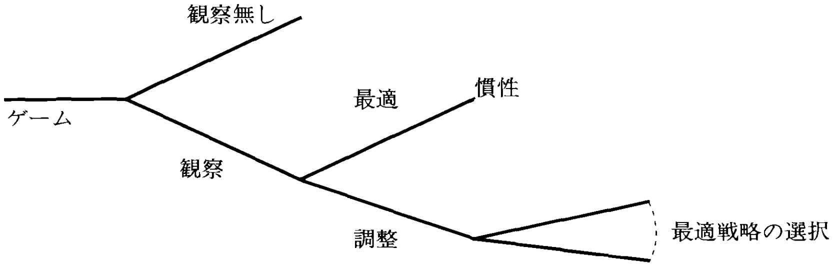
(b.3) 少なくとも一つの $ik\in g$ について，$a_i^*(k)<a_i(k)$.

（c） （a），（b）より任意の $a_i^*\in X_i(g, a_i)$ について $a_i^*\le a_i$.

ここでの調整過程は図4のように行われる。

観察による一連の調整によって状態が θ から θ' に推移する確率を $h_{\theta\theta'}$ と置く。(4)

図4：観察による調整



（4） 本稿においては，$h_{\theta\theta'}$ を直接扱うことはあまりないため，$h_{\theta\theta'}$ の具体的な形は記さない。

3.2　突然変異による状態の推移

各 t 期末において，観察が行われなかったか観察とそれによる調整が行われたかに関らず，各 $\triangle_i$ に属する任意のエイジェントは確率 $\lambda>0$ で突然変異を起こす。すなわち，確率 $1-\lambda$ で彼の戦略は変わらず，確率 λ で彼は，外生的に与えられたある確率分布 $e_i(a_i, b_i)>0(a_i, b_i \in S_i)$ に従って戦略 a_i から b_i に移行する。すると，期末において戦略 a_i をとるエイジェントが来期初に戦略 b_i をとっている確率は，$\lambda e_i(a_i, b_i)$ となる。ここで，任意の $e_i(a_i, b_i)$ が厳密に正であることに注意。これによって任意の状態 $\theta \in \Theta$ から任意の状態 θ' に突然変異を起こす確率 $q_{\theta\theta'}(\lambda)$ は厳密に正となる。

突然変異はエイジェントによる一種の実験であるとも解釈できる。重要なのは，突然変異の結果としてある状態から状態へ推移する確率それぞれについて，λ に関する次数が異なることである。(5) ここで考えている突然変異は，Nöldeke and Samuelson [1993], Samuelson [1997] と全く同じ形でモデルに組み込まれているから，次の3.3節に示すような性質をそのまま用いることができる。

3.3　有限マルコフ連鎖の諸性質

本3.3節の内容は，Nöldeke and Samuelson [1993], Samuelson [1997] による。ここでの説明の中で用いる記号は他の節と重複しているものもあるが，とくに断りのない限り他の節とは別のものを示している。

現在の設定をもう一度見直してみよう。システムがとりうる状態は有限集合 Θ であらわされている。ここでは，便宜上 Θ に属する状態には，$1, 2, ..., n$ という整数の名前を付けておく。プレーヤーの名前と混同しないように注意されたい。いま，１回ネットワーク形成ゲームが行われたとき，システムが状態 i から j に推移する確率を p_{ij} で示す。3.1，3.2節で定義した $h_{ik}, q_{kj}(\lambda)$ を用いると，

$$p_{ij}(\lambda)=\sum_{k \in \Theta} h_{ik} q_{ki}(\lambda),$$

となる。

ここで，このようなゲームを $t=0, 1, ...$ の各期に行なうとき，システムが t 期にどの状態にあるかを示した Θ 上の分布

$$x(t)=(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)),$$

の列 $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}$を有限マルコフ連鎖とよぶ。推移行列 $P(\lambda)=[p_{ij}(\lambda)]$ に関して，

$$x(t+1)=x(t)P(\lambda),$$

(5)　$q_{\theta\theta'}(\lambda)$ も，$h_{\theta\theta'}$ 同様，本稿では具体的な形をもちいないので，それを記すことはしない。

と書くことができる。

とくに有限マルコフ連鎖の定常分布 $z=\lim_{t\to\infty}x(t)$ については，次に述べるようなよく知られた性質がある。

定理（定常分布の存在性・一意性） 推移行列 $P(\lambda)=[p_{ij}(\lambda)]$ の任意の要素について，$p_{ij}(\lambda)>0$ であるとき，有限マルコフ連鎖には，定常分布 $z(\lambda)$ が存在し，しかも $z(\lambda)$ は，初期分布 $x(0)$ に依存せず，一意に定まる。

いま考えている進化モデルにおいては，推移行列は $P(\lambda)=HQ(\lambda)$ である。$\lambda>0$ において，任意の $q_{kj}(\lambda)$ は正であり，また，h_{ik} は少なくとも一つの k について正であるから，任意の p_{ij} は正である。したがって，上で述べた定理が適用でき，任意の変異率 $\lambda>0$ に関して，一意な定常分布 $z(\lambda)$ が定義される。

変異率 λ を 0 に収束させたときの極限が存在することもよく知られている。

命題（極限分布の存在） 定理と同じ仮定のもとで,

$$z^*=\lim_{\lambda\to 0} z(\lambda),$$

が存在する。

我々が分析するのは，この極限分布の性質である。いま，変異率を完全に 0 にしたときに得られる分布 $z(0)$ と，極限分布 z^* は異なりうることに注意しよう。変異率を完全に 0 にしたときには，先の命題が使えず，一般には，定常状態の一意性などは保証されない。しかしながら，変異率が正の範囲のもとで 0 に収束させることで得られる極限分布 z^* は一意に定まるのである。z^* のサポートとなる状態を長期均衡とよぶ。

さらに本稿の文脈に有用な，用語・性質についても述べておくことにする。以下の性質 1 から 5 は，すべて，Nöldeke and Samuelson による。最も重要なものは性質 5 であり，それ以前の諸性質は性質 5 を導くための補題という性格をもっているが，それぞれが極限分布のサポートに属す状態とそれ以外を選り分けるのに有用であるため，併せて述べておく。

定義（吸引的集合・吸引域） 集合 A が吸引的（absorbing）であるとは，A に属する状態から A に属さない状態に推移するためには，必ず突然変異を要するような集合のなかで，極小であることをいう。そのような集合を吸引的集合（absorbing set）という。また，吸引的集合 A の吸引域 $B(A)$ とは，突然変異を要しないで，A に属する状態に到達出来るような状態の集合である。

性質 1（Nöldeke and Samuelson [1993] 補題 3） 極限分布のサポートは，吸引的集合に属するような要素だけからなる。もし，ある状態 θ が極限分布のサポートに属しているならば，θ の属している吸引的集合（以後これを $A(\theta)$ と記す）に属する任意の状態 $\theta' \in A(\theta)$ も極限分布のサポートに属している。

性質 1 より，「ある状態 θ が極限分布のサポートに属している」という表現に加え，「ある吸引的集合 A が極限分布のサポートを構成している」という表現も意味あるものとなる。性質 1 は状態と状態の関係を示したものであったが，次の性質 2 においては，極限集合と極限集合の関係が示されている。

定義（隣接・単変異近傍） ある状態 θ と θ' がただ一つの突然変異によって行き来できるとき，θ と θ' は隣接している（adjacent）という。また，吸引的集合 A の要素に隣接する任意の状態の集合を，$M(A)$ であらわし，これを A の単変異近傍とよぶ。すなわち，

$$M(A)=\{\theta\in\Theta: \text{ある } \theta'\in A \text{ が } \theta \text{ と隣接している}\}.$$

直観的には，隣接している状態同士は突然変異を媒介に行き来できる状態の中で，もっとも行き来しやすい組である。

性質 2（Nöldeke and Samuelson [1993] 補題 4） 吸引的集合 A が極限分布 z^* のサポートを構成するならば，A に属するある状態に隣接するような状態を吸引域に含む吸引的集合 A' も極限分布のサポートを構成している。すなわち，$A \subset \operatorname{supp} z^*$ かつ $M(A)\cap B(A')\neq\emptyset$ ならば，$A'\subset \operatorname{supp} z^*$.

性質 2 が述べていることは，次のような直観を支持している。一般に，変異率が 0 に近づいたときでも状態がある吸引的集合 A から飛び出すことがある。最も飛び出しやすい場所が，A の単変異近傍である $M(A)$ に属する状態である。この飛び出し先の状態が別の吸引的集合 A' の吸引域にも属しているなら，以後，状態は A' へと正の確率で推移していく。そして，A' から A に同様のプロセスが起こりうるかは，いま保証されていない。よって，変異率を十分小さくした極限においても，吸引的集合 A' は A と少なくとも同程度には起こりやすい。したがって，A が極限分布のサポートを構成するなら，A' についても同様である。

ここまで，状態と状態についての性質・吸引的集合と吸引的集合についての性質と一段階ずつ上についての性質を見てきたが，次にさらに，もう一段階上となる，吸引的集合の族同士に関する性

質を述べることにする。

定義（サイクル・コンポーネント・局所安定性） 吸引的集合の族 $\mathscr{A}$ がサイクルであるとは，その中の任意の要素 A, A' について，ある $\mathscr{A}$ 上の列 $\{A_1, A_2, ..., A_\gamma\}$ が存在し，$A=A_1, A'=A_\gamma, M(A_i)\cap B(A_{i+1})\neq\emptyset (i=1, 2, ..., \gamma-1)$ が成り立つことである。（１つの吸引集合だけからなる族も，自明にサイクルであることに注意。）極大のサイクルをコンポーネント(6)とよぶ。

コンポーネントは，それに属する吸引集合 A と，それに属さない任意の吸引集合 A' について，$M(A)\cap B(A')=\emptyset$ であるならば，局所安定的（locally stable）であるいわれる(7)。

コンポーネントは吸引集合全体の族の分割となっている。すなわち，吸引集合はかならず何らかのコンポーネントに属しており，それ以外のコンポーネントには属していない。また，一般にどのようなシステムにおいても，少なくとも一つ以上の局所安定的コンポーネントが存在する。

性質３（性質２の系） コンポーネント C に属するある吸引的集合が極限分布のサポートを構成しているなら，そのコンポーネントに属する他の任意の吸引集合も極限分布のサポートを構成する。

上記の性質３より，「コンポーネント C が極限分布のサポートを構成する。」という表現は，意味あることとなる。また，用語の簡単化のため，状態 θ があるコンポーネント C に属する吸引的集合 A に属しているとき，単に「θ は C に属している」ということがある。あるコンポーネントに属する任意の状態は，性質２のもとで述べた直観の意味において，同程度に起こりやすい。よって，ある状態の起こりやすさの類別は，コンポーネント単位で行なうことが可能である。この類別を行なったのが，以下の性質４および５である。

性質４（Nöldeke and Samuelson [1993] 補題５） コンポーネント C のある要素 A について，ある局所安定的コンポーネント $C'(\not\ni A)$ に属する要素 A' で，$M(A)\cap B(A')\neq\emptyset$ を満たすものが存在するならば，コンポーネント C は極限分布のサポートを構成しない。

性質５（Nöldeke and Samuelson [1993] 命題１） 状態 θ が極限分布のサポートに属しているならば，θ は局所安定的なコンポーネントに属している。

（6） 通常 component は「成分」と訳される。しかし，ここでは，分析対象であるネットワークの「成分」との混乱を避けるためにコンポーネントとよぶことにする。

（7） 局所安定的コンポーネントは，Samuelson［1997］では recurrent set とよばれている。

性質5より，もし局所安定コンポーネントがただ一つしかないなら，極限分布のサポートは，そのコンポーネントに属する状態 θ の集合と一致する。

4　ネットワーク形成ゲームにおける局所安定コンポーネントの性質

本節では，前節で与えられた局所安定コンポーネントの諸性質を用いて，ネットワーク形成ゲーム $(\mathcal{N}, S, \pi, \{X_i\}_{i\in\mathcal{N}})$ のもつ特性について考察を行なう。主要な結果は，命題3から命題7に要約されている。

定義2. ある状態 $\theta\in\Theta$ において正の確率で起こりうる（それを構成するエイジェントが1人以上存在する）ネットワークの集合を $G(\theta)$ とあらわす。すなわち，

$$G(\theta)=\{g\in\mathcal{G} : \exists\, a\in S \text{ s.t. } g=\gamma(a) \text{ and } \theta(i, a_i)\geq 1 \text{ for all } i\in\mathcal{N}\}.$$

ここで，$\gamma(a)$ は (1) で定義された，戦略 a によって形成されるネットワークであり，$\theta(i,a_i)$ は3.1節で述べられた，状態 θ において戦略 a_i をとっている $\triangle_i$ のエイジェントの人数である。$G(\theta)$ に属するネットワークを，今後単に θ のネットワークよぶ。誤解の恐れが無い限り，意識的に用語を混用し $G(\theta)$ 自身も θ のネットワークとよぶことがある。

いま，ある状態 θ で起こりえるすべてのネットワークについて，そのリンクの数 $|\gamma(\cdot)|$ を人数分の重複も考慮して足しあわせたものを $\nu(\theta)$ とおく。すなわち，

$$\nu(\theta)=\sum_{a_1\in S_1}\sum_{a_2\in S_2}\cdots\sum_{a_N\in S_N}\left[\left\{\prod_{i=1}^{N}\theta(i, a_i)\right\}\cdot|\gamma(a_1,a_2, \ldots, a_N)|\right]$$

リンクの総数について，次の命題が成立する。

命題3. ネットワーク形成ゲーム $(\mathcal{N}, S, \pi, \{X_i\}_{i\in\mathcal{N}})$ において，

(a) 状態 $\theta\in\Theta$ は，ある吸引的集合に属するとする。すると，θ の任意のネットワークは，ナッシュ均衡ネットワークである。

(b) 任意の吸引的集合は，1点集合である。

(c) $\theta\in\Theta$ のネットワークの中で，ナッシュ均衡ネットワークでないものが，少なくとも一つ存在するならば，θ は，

$$\nu(\theta)>\nu(\theta'),$$

が成立するようなある別の状態 $\theta'\in\Theta$ の吸引的集合に属している。

証明　補論 A. 3 参照。

この命題 3 は我々の分析を意味あるものとするために重要である。われわれは，ナッシュ均衡の精緻化を目的としているが，何の保証もないままでは，極限分布のサポートに属する状態 θ について，おこりうるネットワーク $G(\theta)$ は非常に多くのネットワークを含み，それはナッシュ均衡ネットワークとは限らないかもしれず，それゆえ有用な帰結を導けないかもしれない。しかしながら，この命題 3 によって極限分布はナッシュ均衡ネットワークをサポートするものに限られることがわかる。

命題 3 (a) より次の系 2 は自明である。

系 2． 進化的ネットワーク形成ゲームの極限分布のサポートとなる状態 θ において観察されるネットワークは，ナッシュ均衡ネットワークである。

命題 3 (b) より，吸引的集合とそれに属する状態は同一視できることが分かる。本稿では，以降誤解の恐れのない限り，吸引的集合 $\{\theta\}$ をそれに属する状態 θ と意識的に混同して記述する。

命題 3 (c) は，ネットワーク形成ゲーム独自の性質である。ナッシュ均衡以外のネットワークをもつような状態 θ は，リンク数を真に減らすような推移を突然変異のなしの最適反応だけで正の確率で起こすのである。

次に示す補題 2 及び命題 4 は，各エイジェントのドリフトとネットワークの関係を示している。記号 $\mathscr{A}$ は吸引的集合の和とする。

補題 2． $G(\theta)=G(\theta')=\{g\}$ を満たす任意の状態 $\theta, \theta' \in \mathscr{A}$ は同一のコンポーネントに属する。

証明　補論 A. 4 参照。

補題 2 より，共通のネットワーク g のみをもつ任意の状態は，長期均衡においてその全てが観察されるか，その全てが観察されないかのどちらか一方である。これは，我々が，長期均衡を状態 θ に則して選別することと，観察されるネットワーク g に則して選別することは整合的であることを保証するものである。

命題 4． ネットワーク形成ゲーム $(\mathcal{N}, S, \pi, \{X_i\}_{i\in\mathcal{N}})$ において，$G(\theta)\cap G(\theta')\neq\emptyset$ を満たす任意の状態 $\theta, \theta' \in \mathscr{A}$ は同一のコンポーネントに属する。

証明　補論 A. 5 参照。

命題4は，補題2を一般化したものであり，状態 θ,θ' は，少なくとも一つのネットワークのみを共通してもてば同一のコンポーネントに属することを述べている。

次の命題5によって局所安定コンポーネントの一意性が保証される。

命題5． ネットワーク形成ゲーム $(\mathcal{N}, S, \pi, \{X_i\}_{i\in\mathcal{N}})$ において，

(a) ただ一つの局所安定的コンポーネント R が存在する。

(b) $G(\theta)$ に属するネットワークがすべて空グラフ $(g=\emptyset)$ であるような状態 θ は R に属する。

証明 補論 A.6 参照。

この命題5と性質5より長期均衡（極限分布のサポート）において観察されるネットワークは，空グラフをその状態としてもつコンポーネント R に属するような状態 θ によって作られるものだけであることが分かった。このように，空グラフが必ず長期均衡としてあらわれるのは，3.1節で考察した最適反応 B_i がエイジェントの観察力を全く期待しないものであることに依存している。したがって，本稿では詳しく論じないが，エイジェントがより強い観察力をもつような場合での最適反応を考えたときには，命題5で確認されるようなような空グラフの普遍性は失われる可能性がある。

次に調べるべきことは R に属するネットワークの性質を特定することである。まず最初に興味が湧くのは，コンポーネント R で実現されうるネットワークに空グラフ以外のものが存在するかということである。これについては，次の命題6が成立する。

ここで，あるネットワーク g が星型（star）であるとは，それが非空グラフであり，かつ，リンクはすべてある一つの節点（中心点とよぶ）のみと結ばれていることである。リンクを持つ中心点以外の節点の集合を周とよぶ。（すなわち，$g\in\mathcal{G}$ が星であるとは，ある一つの $i\in\mathcal{N}$ について，$g=\cup_{j\in N(g)\setminus\{i\}}\{ij\}$ が成立することである。このとき，i を星の中心点，$N(g)\setminus\{i\}$ を周とよぶ。）また，R のネットワーク $G(R)$ とは，$G(R)=\cup_{A\in R}\cup_{\theta\in A}G(\theta)$ である。$G(R)$ は，長期均衡で観察されうるネットワークの集合そのものである。

命題6． ネットワーク形成ゲーム $(\mathcal{N}, S, \pi, \{X_i\}_{i\in\mathcal{N}})$ において，

(a) ナッシュ均衡ネットワークであるような任意の星型は，$G(R)$ に属する。

(b) ナッシュ均衡ネットワークとなるような星型が存在しないとき，$G(R)=\{\emptyset\}$ である。

証明 補論 A.7 参照。

この，命題6から，長期均衡で生じうるネットワークが非空でありうるかどうかを調べるには，星型ネットワークについてのみ調べればよいことがわかる。星型より大きな任意のネットワークは，例えそれがナッシュ均衡ネットワークであり，しかも非常に大きな利得を構成員にもたらそうとも，星型でナッシュ均衡ネットワークであるものが存在しなければ，長期的には達成されないのである。

空グラフ以外のネットワークが長期的に形成されるとき，そのネットワークはどれだけ大きなものとなりうるだろうか。これについては，次の命題7によって，必要条件が与えられる。

命題7． ネットワーク形成ゲーム$(\mathcal{N}, S, \pi, \{X_i\}_{i\in\mathcal{N}})$において，ナッシュ均衡ネットワーク$g$が$G(R)$に属する極大な非空ネットワークとなるためには，あるナッシュ均衡ネットワークfと，ある$\bar{i}\in\mathcal{N}$が存在して，次の(a)，(b)が成立することが必要である。

(a) $g\not\subset f$

(b) $g\setminus\cup_{\bar{i}j\in g}\{\bar{i}j\}\subset f\setminus\cup_{\bar{i}k\in f}\{\bar{i}k\}.$

証明　補論A.8参照。

本稿では，あるナッシュ均衡ネットワークが極限分布にサポートされるための十分条件を与えるに至ってない。しかしながら，この命題7を用いることによって，局所安定コンポーネントで実現されないような多くのネットワークを排除することが出来ることになる。

4.1　接続コストの大きな結合モデルにおける長期均衡の例

2.2で扱った結合モデルにおいて，ある自然数$m\geq 2$について，

$$\sum_{k=1}^{m-1}\delta^k < c \leq \sum_{k=1}^{m}\delta^k,$$

が成立すると考える。この条件のもとでは，例えば，図5のような十分な長さ（$2m+1$個以上のリンクをもつ）の周をもつ円状のネットワークはナッシュ均衡ネットワークとなる。（証明のためには

図5：円

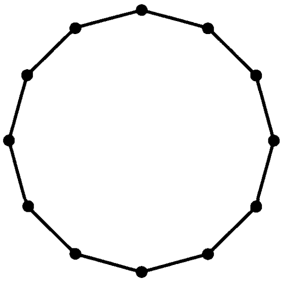
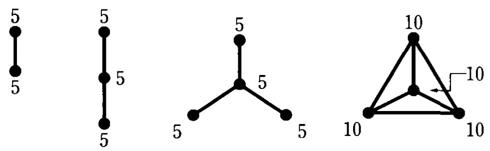


図6：極大なナッシュ均衡ネットワークの排除



命題1を用い，リンクをきることが利益をもたらさないことを確かめればよい。）しかし，このモデルにおいては，いかなる星型ネットワークも，ナッシュ均衡ネットワークとならない。なぜなら，中心点となるプレーヤーは，$\delta - c < 0$ より，必ず周とのリンクを切断したがるからである。結局，命題6より，長期均衡として支持されるのは空グラフのみである。

4.2　極大なナッシュ均衡ネットワークの排除の例

任意の星型ネットワークにおいてはその中心点のプレーヤーと周のプレーヤーにそれぞれ利得5を，完全グラフにおいては，全員に利得10を与え，他の非空ネットワークにおいては，そこでリンクをもつプレーヤーに利得－1を与えるようなプレーヤーが4人以上のネットワーク形成ゲームを考える。すると，当然，ナッシュ均衡ネットワークは，空グラフと，任意の星型と，完全グラフのみとなる。これらのなかで，完全グラフは極大であるが，命題7の条件を満たすような他のナッシュ均衡ネットワークが存在しないので，長期均衡では支持されない。空グラフと，星型のナッシュ均衡ネットワークは命題5と命題6より自明に長期均衡で支持される。

5　結論・今後の展望

本稿においては，成員個々が自律的に構成するネットワークが，均衡においていかなる性質をもつかを考察した。

まず最初に，非協力ゲームのナッシュ均衡の枠組みのみでは，均衡が多数出現し，有用な性質が上手く取り出せないことを確かめた。既存のリンクを切るインセンティヴさえなければ，いかなるネットワークもナッシュ均衡として実現される。また，接続モデルを例として用いて，複数均衡の様子を具体的にも観察した。

次に，均衡の精緻化と，明確な動学過程のモデル化を動機として，モデルを進化的ゲーム理論の枠組みに適用した。ここで得られた主な結果は，次の3つである。第1に極限分布のサポート（ここでは以後，長期均衡とよぼう）はナッシュ均衡となっていること。（これは，通常の進化的ゲーム理論では，当然期待される結果であるが，本稿では設定が特殊であるために，厳密な証明が必要であった。）第2に星型ネットワークでナッシュ均衡がナッシュ均衡ネットワークとして支持されることは，非

空なネットワークが長期均衡として支持されることと同値であること。第3に，長期均衡で支持されるネットワークのうち，極大なものについては，簡単な必要条件によっていくらかの選別が可能なことである。

さらに分析を発展させるべき点の第1は，いうまでもなく，長期均衡の必要十分条件・十分条件を，ネットワーク形成ゲームの文脈に則した直観的な意味をもつものとして，提示することである。

第2は，第1の点とも関連するが，プレーヤーの利得関数に適当な仮定をおいたときの均衡ネットワークの様子を見ることである。利得関数には，外部経済性などの，経済的な性質を要求することが自然であり，また，この特定化によって，さらに有益な帰結が得られるものと期待される。Topkis [1978], Milgrom and Roberts [1990A, B] による優モジュラ性（super modularity）などの概念を用いれば比較静学を行なうことも可能であろう。

第3は，最適反応 B_i の設定を吟味することである。本稿で考えた B_i のもとでは長期均衡において空グラフが必ず観察される。しかし，たとえば $\delta-c>\delta^2$ なる結合モデル（結合モデルについては2.2参照）においては，エイジェントの観察能力をより強く設定した最適反応を仮定したもとでは，完全グラフのみが長期均衡として観察されることが分かっている。また，ネットワーク形成ゲームの文脈上，混合戦略均衡の概念はあまり適切なものと言えないと我々は考えるが，この部分の拡張をすることで，むしろ明快なモデルと帰結を得ることができるかもしれない。また，観察が今期1回限りのことだと考えず，Young［1993］のように過去数期に渡って蓄積された記録からの無作為抽出とすることも可能であろう。

本稿は，非常に抽象的な設定のもとでネットワーク形成ゲームを扱ったが，これは経済理論でネットワークを取り扱うための基礎研究である。

A　補　　論

A. 1　命題1の証明

まず，ナッシュ均衡 a^* のネットワーク $\gamma(a^*)$ を考えよう。すると，定義より，任意のプレーヤー i と，彼のとりうる任意の戦略 $a_i \in S_i$ について，$\pi(i, \gamma(a_i^*, a_{-i}^*)) \geq \pi(i, \gamma(a_i, a_{-i}^*))$ が成立する。e^g の定義より直ちに，$\gamma(a^*)=\gamma(e^{\gamma(a^*)})$ であるから，結局，任意のプレーヤー i と彼のとる任意の戦略 $a_i \in S$ について，$\pi(i, \gamma(e^{\gamma(a^*)})) \geq \pi(i, \gamma(a_i, a_{-i}^*))$ である。したがって，

$$\hat{a}_i \leq e_i^{\gamma(a^*)}, \tag{9}$$

であるような戦略 $\hat{a}_i$ についても，

$$\pi(i, \gamma(e^{\gamma(a^*)})) \geq \pi(i, \gamma(\hat{a}_i, a_{-i}^*)) \tag{10}$$

である。

いま，任意の戦略 $\hat{a}_i$ について，

$$\gamma(\hat{a}_i, a^*_{-i})=\gamma(\hat{a}_i, e^{\gamma(a^*)}_{-i}) \tag{11}$$

が成立する。なぜならば，$ij\in\gamma(\hat{a}_i, a^*_{-i})$ ならば，$\hat{a}_i(j)=1$ であるから，(9)，(3) より $e^{\gamma(a^*)}_i(j)=e^{\gamma(a^*)}_j(i)=1$ が必要であり，ゆえに $ij\in\gamma(\hat{a}_i, e^{\gamma(a^*)}_{-i})$ である。逆に，$ij\in\gamma(\hat{a}_i, e^{\gamma(a^*)}_{-i})$ ならば，$\hat{a}_i(j)=1$ であり，また，$e^{\gamma(a^*)}_j(i)=1$ が成立することから $a^*_j(i)=1$ が必要（そうでなければ，$e^{\gamma(a^*)}_j(i)=0$）となり，ゆえに $ij\in\gamma(\hat{a}_i, a^*_{-i})$ である。(8)

(10)，(11)から，次の関係が導かれ，必要性が証明される。

$$\pi(i, \gamma(e^{\gamma(a^*)}))\geq\pi(i, \gamma(\hat{a}_i, a^*_{-i}))=\pi(i, \gamma(\hat{a}_i, e^{\gamma(a^*)}_{-i})).$$

次に十分性について証明する。(4)式の関係が満たされていると仮定しよう。必要性の中で証明した方法と同様にして，任意の戦略 a_i について，$\gamma(a_i\wedge e^g_i, e^g_{-i})=\gamma(a_i, e^g_{-i})$ が証明できる。したがって，$a_i\wedge e^g_i\leq e^g_i$ より，任意の a_i について，

$$\pi(i, \gamma(e^g))\geq\pi(i, \gamma(a_i\wedge e^g_i, e^g_{-i}))=\pi(i, \gamma(a_i, e^g_{-i})),$$

が成立し，e^g がナッシュ均衡であることが示される。したがって，ネットワーク $g=\gamma(e^g)$ はナッシュ均衡ネットワークである。以上で十分性も示された。

A. 2　系 1 の証明

(a) 成分独立性により $i\in N(g')$ については，$\pi(i, g)=\pi(i, g')$, である。いま，$e^{g'}_i=e^g_i$ であるから，$a_i\leq e^{g'}_i$ なる任意の $a_i\in S_i$ について，

$$\pi(i, \gamma(e^{g'}))=\pi(i, \gamma(e^g))\geq\pi(i, \gamma(a_i, e^g_{-i}))=\pi(i, \gamma(a_i, e^{g'}_{-i})).$$

不等式はナッシュ均衡の定義から，最後の等式は成分独立性から成立する。

(b) 同様に証明される。

A. 3　命題 3 の証明

(a) 背理法を用いる。$\theta_0=\theta$ とする。いま $G(\theta_0)$ にナッシュ均衡ネットワークではないような g_0 が属しているとする。g_0 がナッシュ均衡ネットワークではないことから，g_0 を構成するようなエ

---

(8)　ここでは，i を端点としてもつリンクが両方のネットワークにおいて等しいことのみを示したが，それ以外のリンクについては，自明に両方のネットワークにおいて等しい。

イジェントのうち，g_0 に最適反応していないような者 ξ_i が少なくとも一人存在する。彼は $\triangle_i$ に属しているとしよう。ネットワーク g_0 は正の確率で起こり，そのもとで，最適反応していないエイジェント ξ_i は正の確率でこれを観察し，戦略を修正する。他のエイジェントは正の確率でなんの調整も行わない。このとき，ξ_i が調整前には戦略 a_i をとっていたとすると仮定より，新たな戦略 a_i^* は，$X_i(g, a_i)$ からランダムに選ばれる。ネットワーク g を形成するすべての戦略の組の集合を $T(g)$ とおく。すなわち，

$$T(g)=\{a\in S:\gamma(a)=g\}, \tag{12}$$

である。この T をもちいれば，補題1（c）より，

$$(b_i, b_{-i})\notin T(g_0)\text{ のとき } \gamma(a_i^*, b_{-i})\subset\gamma(a_i, b_{-i}), \tag{13}$$

である。また，補題1(b.3)より，

$$(b_i, b_{-i})\in T(g_0)\text{ のとき } \gamma(a_i^*, b_{-i})\subsetneq\gamma(a_i, b_{-i}), \tag{14}$$

である。以上(13)，(14)より，調整後の状態を θ_1 とおけば，

$$\nu(\theta_0)>\nu(\theta_1),$$

が成立し，少なくとも，一本のリンクが減ったことになる。このリンクを切るようなプロセスは，切った結果がナッシュ均衡ネットワークになるまで続いていく。すなわち，θ_1 においてナッシュ均衡ネットワークではないようなネットワーク g_1 が存在していた場合，θ_1, g_1 を先程の θ_0, g_0 と同一視して，もう一度プロセスを繰り返す。ここでの結果を θ_2 とする。今度も，$\nu(\theta_0)>\nu(\theta_1)>\nu(\theta_2)$ が成立する。θ_2 においても，ナッシュ均衡ではないようなネットワーク g_2 が存在していたならば，先程のプロセスを繰り返す。このプロセスは1回行うたびに真に関数 ν を減少させる。関数 ν は非負の関数であるから，このプロセスは高々有限回で終了する。こうして，g_0 から出発してプロセスが終了したときのネットワーク g_n は，ナッシュ均衡ネットワークとなっている。（リンクが何も無い状態は自明にナッシュ均衡だから，このプロセスは必ずナッシュ均衡に到達して終了する。）

ナッシュ均衡ネットワークしか残っていない状態では，補題1（a）より各エイジェントはそれ以上，突然変異以外での調整を行わない。従って，θ_n はそれのみで吸引的集合 $\{\theta_n\}$ を構成する。ところが，θ_0 から θ_n への調整は一切突然変異無しで行われたのだから，θ_0 が吸引的集合に属しているならば，θ_0 と θ_n は，同じ吸引的集合に属さねばならない。これは矛盾である。

（b），（c）については，（a）の証明中に既に示されている。

A. 4　補題 2 の証明

$\theta^g \in \Theta$ を，任意のプレーヤー $i \in \mathcal{N}$ に属する任意のエイジェントが戦略 e_i^g をとっている状態だとする。そして，$G(\theta)=G(\theta')=\{g\}$ を満たす任意の状態 $\theta, \theta' \in \mathcal{A}$ は θ^g と同じコンポーネントに属することを示す。θ と θ^g は相異なる状態であると仮定する。

θ と θ^g が相異なる状態であることから，ある i と $a_i(\neq e_i^g)$ が存在して，$\theta(i, a_i)>0$ である。したがって，θ において $\triangle_i$ に属し戦略が a_i であるようなただ 1 人のエイジェントが e_i^g に突然変異したような θ の単変異近傍の状態 θ_1 を考えよう。この θ_1 は $G(\theta_1)=\{g\}$ であるから，$\theta_1 \in \mathcal{A}$ である。この逆の突然変異も考えることができるから，結局 θ と θ_1 は隣接している。いま，θ_a と θ_b の間のユークリッド距離の二乗を，

$$\delta(\theta_a, \theta_b)=\sum_{i \in N} \sum_{a_i \in S_i} [\theta_a(i, a_i)-\theta_b(i, a_i)]^2, \tag{15}$$

とおけば，$\delta(\theta, \theta^g)>\delta(\theta_1, \theta^g)$ である。

θ_1 がもし θ^g と一致すればここでプロセスを終える。一致しなければ，新たに θ_1 に隣接する状態を最初と同じ方法で作る，これを θ_2 とする。明らかに，

$$\delta(\theta, \theta^g)>\delta(\theta_1, \theta^g)>\delta(\theta_2, \theta^g),$$

である。

このようなプロセスは，δ が非負であることから高々有限回で終了し，θ^g に到達する。これによって，$\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta^g$ という隣接する状態の列が存在することが分かり，θ と θ^g が同じコンポーネントに属することが保証される。

θ' についても θ^g と同じコンポーネントに属することが全く同様にして示される。従って，θ と θ' は同じコンポーネントに属している。

A. 5　命題 4 の証明

$g \in G(\theta) \cap G(\theta')$ なる g を任意に固定する。また，θ において g を正の確率で作る戦略のある組合せを $(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_N^*)$ とおく。また θ^* は任意の $\triangle_i$ に属するエイジェントがすべて戦略 a_i^* をとっている状態とする。θ と θ^* は相異なる状態であると仮定する。

θ と θ^* が相異なる状態であることから，ある i と $a_i(\neq a_i^*)$ が存在して，$\theta(i, a_i)>0$ である。したがって，θ において $\triangle_i$ に属し戦略が a_i であるようなエイジェントがただ 1 人 a_i^* に突然変異したような θ の単変異近傍の状態 θ_1 を考えよう。この θ_1 については $G(\theta_1) \subset G(\theta)$ であるから，$\theta_1 \in \mathcal{A}$ である。（なぜなら，θ で正の確率でとられる戦略は，$G(\theta)$ という，より種類の多いネットワークの族に最適反応していたのだから，その部分集合である $G(\theta_1)$ にも最適反応している。θ_1 でとられる戦略は，すべて θ でもとられる戦略なのだから結局 $G(\theta_1)$ に最適反応している。）この逆の突然変異も考え

ることができるから，結局 θ と θ_1 は同じコンポーネントに属している。また，補論 A. 4 の (15) で定義した δ について，$\delta(\theta, \theta^*) > \delta(\theta_1, \theta^*)$ が成立する。

結局，補題 2 の証明と同様にして θ と θ^* は同じコンポーネントに属することがわかる。また，θ' と θ'^* についても同様である。

補題 2 より，θ^* と θ'^* は同じコンポーネントに属することが分かっているから，結局 θ と θ' は同じコンポーネントに属している。

A. 6　命題 5 の証明

$G(\theta)$ に属するネットワークがすべて空グラフ ($g=\emptyset$) であるような状態 θ が属するコンポーネントは補題 2 よりただ一つに定まる。これを R とおこう。

R ではない局所安定コンポーネントが存在すると仮定しよう。このコンポーネントに属する状態 θ_0 において，何らかの既存のリンクを切るような単変異が生じうる。この単変異が起こった後の状態は命題 3 (c) より，$\nu(\theta_0) > \nu(\theta_1)$ なる状態 θ_1 の吸引域に属している。ここで，コンポーネントが局所安定的であることから θ_0 と θ_1 は同じコンポーネントに属していることに注意。θ_1 についてもまた同様に既存のリンクを切るような単変異を考えることができるが，これによって，さらに同じコンポーネントに属し，

$$\nu(\theta_0) > \nu(\theta_1) > \nu(\theta_2),$$

となるような，状態 θ_2 が存在することがわかる。このプロセスは，$\nu(\theta_n)=0$ となるまで続けることができるから，結局空グラフしかもたない状態 θ_n が同じコンポーネントに属することになり，仮定と矛盾する。従って，R ではない局所安定的コンポーネントは存在しない。

局所安定コンポーネントは少なくとも一つは存在するから，R がただ一つの局所安定コンポーネントである。

A. 7　命題 6 の証明

(a) ナッシュ均衡ネットワークであるような星 g 中心点以外のプレーヤーに対応する任意のエイジェント j 全員が戦略 e_i^g をとり，中心点のプレーヤー i に対応するエイジェントは全員 $e_i^g(=0)$ をとっているような状態を θ_0 とおく。この状態では $G(\theta_0)=\{\emptyset\}$ であるから，θ_0 は R に属している。

いま，ここでプレーヤー i に対応するエイジェント 1 人が突然変異を起こし，戦略を e_i^g に変更したとしよう。すると，星型 g と空グラフのみが正の確率で観察されることとなる。

星を構成するプレーヤーに対応するエイジェントは，星型 g と空グラフの両方に最適な反応をしているから補題 1 (a) から（突然変異無しには）戦略を変更しない。また，星型に関係無い

$\mathcal{N}\backslash N(g)$ に属するプレーヤーに対応するエイジェントにとっては，成分独立的な利得の仮定から，空グラフも星型グラフも利得に影響を与えない。よって彼らも戦略を変更しない。したがって，ここで得られた状態は吸引的集合に属している。

結局，空グラフに対応する状態 θ_0 から星型 g をもつ状態 θ_1 単一の突然変異のみで推移したから θ_1 は R に属する。よって，$g\in G(R)$ である。

(b) 空グラフの状態から単一の突然変異によって発生した状態 θ で形成されるグラフ g は，必ず星型である。突然変異の後に，最適反応のみによって生じるネットワークは（補題1(c)より）すべて g の部分グラフか空グラフである。これらのネットワークのうち，ナッシュ均衡状態 θ によって形成されうるのは空グラフのみであるから，結局 θ は空グラフのみを形成するような状態の吸引域にしか属していない。したがって，局所安定コンポーネントに属する任意の状態は，空グラフしか形成しない。

A. 8　命題7の証明

ナッシュ均衡ネットワーク g が $G(R)$ に属する極大な非空ネットワークであるとしよう。局所安定コンポーネント R は空グラフ（もちろん g とは異なる）だけをもつ状態も属しているから，非空なネットワーク g をもつような状態 θ は，R に属するある他の状態 θ_0 から，単一の突然変異とそれに続く最適反応のみによる調整によって達成されるような状態であることが必要である。

g が非空であることにより，条件(a)を成立させるようなナッシュ均衡ネットワーク f が少なくとも一つは存在する。(空グラフ $f=\emptyset$ は条件(a)を満たす)

いま，条件(a)を満たすような任意のネットワーク f について条件(b)が成立しないと仮定しよう。すなわち，任意の $\bar{i}\in\mathcal{N}$ について，

$$g\backslash\bigcup_{\bar{i}j\in g}\{\bar{i}j\}\not\subset f\backslash\bigcup_{\bar{i}k\in f}\{\bar{i}k\}, \tag{16}$$

と仮定しよう。

最適反応のみによる（突然変異を考慮しない）調整過程では，$g'\supset g$ となるような g' をそのネットワークとしてもたない状態 θ_0（すなわち，$g'\notin G(\theta_0)$ なる θ_0）は，g をそのネットワークとしてもつような状態 θ の吸引域には属さない。なぜなら，補題1(c)より，$G(\theta_0)$ に属する g_0 の何れにも存在しないリンクは，最適反応によっては付け加えられないからである。

背理の仮定(16)より，(a)を満たすような f しかそのネットワークとしてもたない任意の状態 θ_1（すなわち，$G(\theta_1)\subset\{f\in\mathcal{G}:g\not\subset f\}$ なる θ_1）においていかなる単一の突然変異が起ころうともそれは，g をそのネットワークとしてもつような状態 θ の吸引域には属さない事が分かる。

したがって，g は，g を真部分集合として含むようなネットワーク h をもち R に属するような状態 θ_2（すなわち，$g\subset h, g\neq h, h\in G(\theta_2)$ なる θ_2）から推移してきたものに他ならない。h が $G(R)$

のネットワークとして存在するのだから，g が $G(R)$ で極大なネットワークであることに矛盾する。

（経済学部研究助手）

参考文献

[1] Bolton, Patrick, and Mathias Dewatripont, 1994, "The Firm as a Communication Network," *Quarterly Journal of Economics*, 109, 809-839.

[2] Forster, Dean and Peyton Young, 1990, "Stochastic Evolutionary Game Theory," *Theoretical Population Biology,* 38, 219-232.

[3] Fudenberg, Drew and Jean Tirole, 1991, *Game Theory,* MIT Press.

[4] Jackson, Matthew and Asher Wolinsky, 1996, "A Strategic Model of Social and Economic Networks," *Journal of Economic Theory,* 71, 44-74.

[5] Kandori, Michihiro, George J. Mailath, and Rafael Rob, 1993, "Learning, Mutation and Long Run Equilibria in Games," *Econometrica, 61, 29-56.*

[6] Maynard Smith, J. and G. R. Price, 1973, "The Logic of Animal Conflicts," *Nature,* 246,15-18.

[7] Milgrom, Paul and John Roberts, 1990A, "Rationalizability, Learning, and Equilibrium in Games with Strategic Complemementarities," *Econometrica,* 58, 1255-1277.

[8] Milgrom, Paul and John Roberts, 1990B, "The Economics of Modern Manufacturing: Technology, Strategy, and Organization," *American Economic Review,* 80, 511-528.

[9] Myerson R. B., 1977, "Graphs and Cooperation in Games," *Mathematics of Operations Research,* 2, 225-229.

[10] Nöldeke, Georg and Larry Samuelson, 1993, "An Evolutionary Analysis of Backward and Forward Induction," *Games and Economic Behavior,* 5, 425-454.

[11] Radner, Roy, 1992, "Hierarchy: The Economics of Managing," *Journal of Economic Literature,* 30, 1382-1415.

[12] Radner, Roy, 1993, "The Organization of Decentralized Information Processing," *Econometrica,* 61, 1109-1146.

[13] Samuelson, Larry, 1997, *Evolutionary Games and Equilibrium Selection,* MIT Press.

[14] Topkis, Donald M., 1978, "Minimizing a Submodular Function on a Lattice," *Operations Research,* 26, 305-321.

[15] Young, H. P., 1993, "An Evolutionary Model of Bargaining," *Journal of Economic Theory,* 59, 145-168.