Title	分割可能な貨幣と価格を持つサーチの基本モデル
Sub Title	A rudimentary model of search with divisible money and prices
Author	Green, Edward J. Zhou, Ruilin 大橋, 和彦
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1997
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.90, No.3 (1997. 10) ,p.514(46)- 522(54)
JaLC DOI	10.14991/001.19971001-0046
Abstract	
Notes	小特集 : 貨幣の機能とその役割
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19971001-0046

「三田学会雑誌」90巻3号（1997年10月）

分割可能な貨幣と価格を持つサーチの基本モデル

エドワード・J・グリーン[(1)]
ルイリン・ジョウ[(2)]
訳 大 橋 和 彦[(3)]

1 序

Kiyotaki and Wright（1989）は，欲求の二重一致という問題を緩和する貨幣の役割を内生的に分析するサーチ均衡モデルを分析したが，解析を可能にするため，すべての消費財および不換紙幣が分割不可能であることを仮定し，さらに経済主体は一時点に1種類の財もしくは貨幣を1単位しか保有できないというという強い仮定を置いた。

本論文は，Kiyotaki-Wright モデルを一般化し，貨幣が分割可能で経済主体の貨幣保有量に制限の無い場合を分析する。この一般化は分割可能な財と分割不可能な貨幣の場合を考察した Shi（1995）や Trejos and Wright（1995）による一般化と対称をなす。Diamond and Yellin（1990）は貨幣も財も分割可能なサーチモデルを考察したが，そこではキャッシュ-イン-アドバンスが外生的に仮定され，取引の金融的性質を均衡の性質として内生的に決定することは行われていない。

Kiyotaki-Wright モデルの仮定を緩めることで，以下の点の分析が可能になる。

(1) 実質・名目貨幣残高の区別，サーチモデルにおける「一物一価の法則」の成立の如何など，貨幣と財の交換比率に関してより詳細な分析が可能になる。（貨幣の代わりに財が分割可能な Shi や Trejos-Wright によっても同様の問題が考察されている。）

(1) Research Department, Federal Reserve Bank of Minneapolis. 今回 TCER・慶應義塾経済学会共催のコンファレンスで発表する機会を与えられたことに関して，TCER・慶應義塾経済学会および日本での滞在先である日本銀行金融研究所に深く感謝する。なお，本稿の内容は筆者の個人的見解であり，ミネアポリス連邦準備銀行，連邦準備制度，日本銀行および日本銀行金融研究所の見解とは必ずしも一致するものではない。

(2) University of Pennsylvania.

(3) 一橋大学商学部講師

(2) 貨幣残高への利子支払いの効果や「ヘリコプターマネー」の効果など，名目貨幣のストックやフローの変化の経済効果を分析する枠組みを提供する。

(3) 貨幣が分割不可能で貨幣保有量に上限があると仮定すると，Kiyotaki-Wright モデルや，Trejos and Wright (1995) を基礎とするモデルの文脈で Aiyagari, Wallace, and Wright (1995) が論じたように，名目貨幣の増加が生産活動に従事する主体を減らすことで厚生水準をパレートの意味で押し下げる可能性があるという逆説的な結果が導かれるが，このモデルではこのような問題を引き起こす仮定がそもそも置かれない。

Kiyotaki-Wright モデルの設定から貨幣を分割可能にし貨幣保有量の制限をなくすため，多くの均衡が出現することが予想される。そこで本論文では，単一価格が成り立つ定常均衡に注目することとする。

2 モデルの環境

各経済主体は，全体で測度1の集合のウエイトを持たない1点で表される。$k \geq 3$ タイプの経済主体が存在し，各 $i \in \{1, \ldots, k\}$ タイプの人口は $1/k$ である。時間は連続的であり，経済主体は無限期間生存する。$k+1$ 種類の財が存在し，そのうち k 種類（第1財から第 k 財）は経済主体によって生産される分割不可能かつ保存不可能な財，残りの第 $k+1$ 財は分割可能で完全に保存可能な不換貨幣である。不換貨幣の名目残高は定数 M である。

任意の時点において，タイプ i の経済主体は第 $i+1$ 財を1単位（*mod* k，つまりタイプ k の経済主体は第1財を1単位），即時に費用をかけず生産できる。タイプ i の主体は第 i 財のみ消費し，その消費から $u>0$ の即時的効用を得る。各経済主体は，割引率 β として消費流列からの割引期待効用を最大化する。

経済主体は，パラメーター μ のポアソン過程にしたがい，確率的に一対一で出会う。出会う相手の特性の分布は，経済主体全体の特性の人口分布に一致する。取引相手の特性はその主体のタイプと貨幣保有量の二点であるが，このうちタイプは観察可能だが貨幣保有量は観察不可能である。

この経済では欲求の二重の一致はありえず消費財は保存不可能であるため，不換貨幣が交換の媒体として用いられる。本稿では，売手が価格を提示する（seller-posting-price）取引メカニズムを仮定する。すなわち，不換貨幣を保有するタイプ i の経済主体が第 i 財を生産できるタイプ $i-1$ の経済主体と出会った場合，財の売手（タイプ $i-1$ の経済主体）が価格を提示し，買手（タイプ i の経済主体）はそれを受け入れるか拒否するかしなければならないとするのである。取引は買手が提示価格を受け入れた場合に成立し，提示価格が売手に支払われることとなる。本論文で得られる結果は，取引の仕組みに関するこの仮定に強く依存している。

3　定常均衡の定義

以下では，同じタイプに属する経済主体が同じ行動を取り，かつ k 種類のタイプすべてが対称的であるような定常均衡を考察する。定常均衡は，取引戦略，貨幣保有に関する定常測度，提示価格および留保価格（購入に最大限支払っても良いとする価格）の定常分布，貨幣保有のバリュー関数によって特徴付けられる。

可能な貨幣保有の領域を，非負の実数の集合 R_+ とする。タイプ i の経済主体の取引戦略は，貨幣保有量が η でタイプ $i+1$ の経済主体に出会ったときの売手としての提示価格 $\omega(\eta)$ と，貨幣保有量が η でタイプ $i-1$ の経済主体に出会ったときの買手としての留保価格 $\rho(\eta)$ を表す R_+ 上の実数値関数の組である。買手は貨幣保有以上に支払えないので，以下の制約がかかる。

$$\rho(\eta) \leq \eta \tag{1}$$

貨幣保有の定常分布は，R_+ 上の測度 H で与えられる。提示価格の定常分布を

$$\Omega(x)=H(\omega^{-1}([0, x])) \tag{2}$$

留保価格の定常分布を

$$R(x)=H(\rho^{-1}([0, x])) \tag{3}$$

で定義する。

貨幣保有のバリュー関数 $V^*: R_+ \to R_+$ は，経済主体が，現在の貨幣保有量を所与として最適な取引戦略を取った場合に得る期待割引効用を表す。

η' を次回の取引直後の貨幣保有量とし，取引が財の購入ならば $W=u$，それ以外ならば $W=0$ とする。ベルマン方程式によれば，$V^*(\eta)$ は $W+V^*(\eta')$ の割引期待値となる。タイプ i の主体の取引の相手と成り得るタイプ $i+1$ と $i-1$ の人口は合わせて $2/k$ であるので，彼らと出会う頻度のポアソンパラメーターは $2\mu/k$ である。 よって，定常均衡におけるバリュー関数は

$$V^*(\eta)=\int_0^\infty e^{-\beta t}E[W+V^*(\eta')\,|\,\eta]\frac{2\mu}{k}e^{-(2\mu/k)}dt \tag{4}$$

と与えられる。

ここで，最初に出会う潜在的な取引相手が売手であることを条件とする $W+V^*(\eta')$ の条件付き期待値と，最初に出会う潜在的な取引相手が買手であることを条件とする $W+V^*(\eta')$ の条件付き期待値を計算すれば，潜在的な取引相手が売手である確率と買手である確率は各々 1/2 であることから，次の結果を得る。

$$\begin{aligned}V^*(\eta)=\frac{\mu}{k\beta+2\mu}&[[\int_0^{\rho(\eta)}[u+V^*(\eta-x)]d\Omega(x)+(1-\Omega(\rho(\eta)))V^*(\eta)]\\&+[R(\omega(\eta))\,V^*(\eta)+(1+R(\omega(\eta)))\,V^*(\eta+\omega(\eta))]]\end{aligned} \tag{5}$$

以下考察する定常均衡において，貨幣保有量は連続時間純粋ジャンプマルコフ過程にしたがい，貨幣保有量の定常分布 H の台は離散集合 $\{0, p, 2p, 3p, \ldots\}$ となる。

4　単一価格均衡

この節では，すべての取引で価格が同一となる均衡が存在するための十分条件を特徴付け，均衡における提示価格関数，留保価格関数，貨幣保有量の定常測度を求める。

4.1　貨幣保有量の定常測度

すべての取引が一つの価格 p で行われ，貨幣保有の測度 H の台が離散集合 $pN=\{0, p, 2p, 3p, \ldots\}$ で表されるとする。np 単位の不換紙幣を保有する主体の集合の測度を

$$h(n)=H(\{np\}) \tag{6}$$

と定義すれば，R_+ 上の測度 H を扱う代わりに N 上の測度 h を扱えば良い。そこで，貨幣保有量が np であるとき主体は状態 n にあると呼ぶことにする。このとき，貨幣保有量が正である経済主体の測度は

$$m\equiv\sum_{n=1}^{\infty}h(n) \tag{7}$$

で定義される。ただし，

$$h(0)=1-m \tag{8}$$

である。

ここで，均衡の定常性から，定常測度はある $m\in(0,1)$ に対し，

$$\forall n\in N\ \ h(n)=m^n(1-m) \tag{9}$$

という形式で書けなければならないことが示される。これより，p，m，M は式

$$M=p\sum_{n=1}^{\infty}nh(n)=\frac{m}{1-m}p \tag{10}$$

を満たすことが分かる。

4.2　均衡バリュー関数

単一価格均衡における最適戦略は，経済主体は常に価格 p で財を売却し，貨幣を保有していれば価格 p で購入すると仮定されていることから，$V(n)=V^*(np)$，$\phi=\frac{\mu}{k\beta}$ と定義すれば，

$$\begin{bmatrix} V(n+1) \\ V(n) \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\frac{1}{\phi m}+\frac{1}{m}+1] & \frac{-1}{m} & \frac{-1}{m} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(n) \\ V(n-1) \\ u \end{bmatrix} \tag{11}$$

が成立し，これより

$$V(n)=\lambda^n V(0)+(1-\lambda^n)\phi u \tag{12}$$

を得る。ただし，

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\phi m}+\frac{1}{m}+1-\sqrt{\left(\frac{1}{\phi m}+\frac{1}{m}+1\right)^2-\frac{4}{m}}\right)\in(0,1) \tag{13}$$

かつ,

$$V(0)=\frac{(1-\lambda)\,m}{(1/\phi)+(1-\lambda)m}\,\phi u \tag{14}$$

である。これより以下の補題を得る。

補題1． V は増加関数で，すべての $j>0$ について $V(n+j)-V(n)$ が n の減少関数であるという凹性条件を満たす。

以上では貨幣保有量が常に整数値 p の倍数となる場合を扱ったが，バリュー関数は整数値以外にも定義される。仮定された最適取引戦略のもと，バリュー関数は階段関数となり，$[x]$ で x の整数部分を表すならば

$$V^*(\eta)=V([\eta/p]) \tag{15}$$

となる。これで，バリュー関数の導出は終了した。

4.3　均衡戦略

η の貨幣を保有するタイプ i の経済主体 a が η' の貨幣を保有するタイプ $i-1$ の取引相手に出会ったとしよう。取引相手のタイプは観察できるが，貨幣保有量は観察できない。双方独立に，a は r の留保価格を選び，取引相手は o の価格を提示する。$r\geq o$ であれば取引相手は o と引き換えに1単位の財を a に渡し，そうでなければ取引は成立しない。主体 a は r に関する最適化問題を解いて最適留保価格を選択するが，その解が一意でないこともありうる。そこで，買手は無差別ならば常に提示を受け入れると仮定し，

$$\rho(\eta)=max\{r\in[0,\eta]\,|\,u+V^*(\eta-r)\geq V^*(\eta)\} \tag{16}$$

とする。以下の補題は，留保価格関数 ρ に関するより詳細な情報を与える。

補題2． (16) 式で定められる留保価格関数 ρ は，$\rho(p)=p$, p のすべての整数倍 np に関し $\rho(np)$ は p の整数倍である，$[\rho(\eta)/p]$ は η の非減少関数であるという諸条件を満たす。

補題3． 少なくとも p の貨幣を保有する経済主体にとって，すべての売手がほとんど確実に価格

p を提示するのであれば，提示価格 p を受け入れることが最適である。

補題3は，バリュー関数の導出に用いた二つの仮定の一方が成り立つことを示す。もう一方の仮定は提示価格がすべて p となることだが，以下の補題はこれが均衡における経済主体の最適行動となるための十分条件を与える。

補題4． すべての主体の留保価格が p の整数倍であるならば，最適提示価格もすべての η に対し p の整数倍となる。(9) の形式の定常測度において正の貨幣量を保有する経済主体の比率が $m \leq 1/2$ で，正の貨幣量を保有するすべての主体が少なくとも p の留保価格を持つならば，経済主体にとって常に売却価格 p を提示することが最適である。

4.4 均衡の存在と非決定性

以上の結果から，$p \geq M$ であれば $m \leq 1/2$ となる。これより以下の定理が証明された。

定理1． 第2節で描写されるあらゆる取引環境のもと，すべての $p \geq M$ について，すべての取引が価格 p で行われすべての取引者の貨幣保有量が p の整数倍である定常均衡が存在する。正の貨幣量を保有する経済主体の比率は M/p の増加関数であるので，異なる定常均衡配分の連続体が存在する。

さらに，任意の ϕ について均衡と斉合的な実質貨幣残高の最大値が存在することが，以下の補題から示される。

補題5．

$$m^{a(2)} > \frac{1}{1+\lambda} \tag{17}$$

成立するならば，$\omega(np) \geq 2p$ を満たす n が存在する。

補題6． 任意の ϕ について，ある $J \in N$ が存在し，すべての m について，$a(2) \leq J$ となる。

定理2． 任意の ϕ について，ある $m^* < 1$ が存在し，任意の $m \geq m^*$ については単一価格均衡が存在しない。

5　極限的ケース

定理2は任意の ϕ について m が十分大きければ（同様に M/p が十分大きければ）定常単一価格均衡が存在しないことを示すが，取引者が出会う頻度が高かったり割引率が小さいことを反映して ϕ の値が大きい経済では，定常単一価格均衡が存在する限界となる最低価格水準は任意に低くなる。これは，直観的には，市場最低価格に非常に近い価格を提示する他の売手にすぐに会えると確信できる場合，買手は多量の貨幣を保有していない限り高い提示価格を受け入れようとしないからであり，正式には

$$\rho(\eta)=max\{r\in[0,\ \eta]\,|\,u+V^*(\eta-r)\geq V^*(\eta)\}$$

で特徴付けられる最適留保価格から導かれる。μ，k，β が（11）を満たし比率 m の経済主体が正の量の貨幣を保有している経済の最適留保価格関数 ρ について，

$$\rho(np)=r(n,\phi)p \tag{18}$$

と定義し，ϕ を無限大とした極限においてどのようなことが起きるか調べる。

補題7． 提示価格がすべて p であるならば，$n\geq 3$ なるすべての自然数について $\phi_n\in R$ が存在し，

$$\forall\phi\geq\phi_n\ \ \forall j\in\{1,\dots,n-1\}\ \ r(j,\phi)\leq 1 \tag{19}$$

補題7から，十分大きい ϕ についてすべての売手の最適提示価格が p となることを示す。$W(\eta,o)$ を

$$W(\eta,o)=H(A(o))V^*(\eta+o)+(1-H(A(o)))V^*(\eta) \tag{20}$$

で定義する。$W(\eta,o)$ は，η の貨幣を保有するタイプ i の売手がタイプ $(i+1)$ の買手に o の価格を提示した場合の期待バリューである。

定理3． すべての $m\in(0,1)$ に対し，$\phi^*_m\in R$ が存在し，

$$\forall\phi\geq\phi^*_m\ \ \forall\eta\in R_+\ \ W(\eta,p)=max_{o\in R_+}W(\eta,o) \tag{21}$$

6　厚　　生

貨幣が分割可能で貨幣保有に関する制約のないこのモデルは，厚生分析により自然な環境を与える。特に Kiyotaki-Wright モデルとは対称的に，ここでは貨幣残高が多ければ必ず定常均衡のもとの厚生水準も上昇する。より多くの人が貨幣を持てばそれだけ取引の機会が増え，その結果厚生水準も高くなるのである。これを正式に示すため，厚生測度として経済主体の効用和

$$U(m, \phi, u)=\sum_{n=0}^{\infty} h(n) V(n)=(1-m) \sum_{n=0}^{\infty} m^n V(n) \tag{22}$$

を考えるならば，

$$U(m, \phi, u)=m\phi u \tag{23}$$

を得る。ϕ と u はモデルに外生的に与えられるため，均衡の存在と整合的な範囲で最も大きい m を選ぶことで最大化される。

より高い貨幣残高がより高い定常均衡厚生水準に対応するというこの強い結論は，生産費用を考慮していないことによる。生産コストを含めたモデルでは，実質貨幣保有の多い経済主体が生産を行わない場合が生じる得る。経済全体の実質貨幣残高の上昇は多くの貨幣を保有する主体の人数の増加を意味するので，貨幣残高の上昇が総生産の減少を引き起こす可能性があるのである。しかしながら，Kiyotaki-Wright の制約にしたがって貨幣保有と生産が同時には行えないとするモデルとは異なり，このような実質貨幣残高が生産に均衡で与える誘因は ϕ が無限大に近づくにしたがって消え去るはずである。

7　結　　語

本稿では，分割可能な貨幣を持つサーチモデルを分析し，すべての取引が同一の価格で行われる定常貨幣均衡の連続体が存在することを示した。このモデルでは，ワルラスのモデルとは異なり経済主体は戦略的に価格を設定し，単一価格は経済主体の自己実現的信念の結果として生じる。

これはサーチ経済における一物一価の法則に肯定的な結果であり，この観点からすれば，貨幣と財の交換単位が外生的に与えられる Kiyotaki-Wright の分析に支持を与えるものである。

モデルには，単一価格均衡以外にも分散した価格を持つ定常均衡の存在や，非定常均衡の存在が予想されるが，その分析のためには理論の発展が待たれる。すでに直面した均衡の非決定性をふまえると，均衡の選択に関する理論無くしては多くは語れないかも知れない。

生産コストのかからないすべてのサーチ均衡モデルにそうであるように，このモデルにも，経済主体が必要としない財を出会った他の主体にただで与えてしまうという非貨幣的均衡が存在する。しかしながら，非貨幣的均衡は生産コストが少しでもかかれば均衡とはなりず，また貨幣均衡よりも高い取引と高い厚生水準を達成するなど，ある意味で病理的な均衡である。

非貨幣的均衡を取り除くため生産に「効用上のコスト」を導入することも可能であるが，この修正だけをほどこすと定常単一価格均衡が存在しなくなってしまう。しかしながら，ϕ を無限大に生産コストをゼロに近づけた極限が定常単一価格均衡に対応すると予想される。

すでに指摘した通り，単一価格均衡の存在は仮定された売手が価格を提示する取引メカニズムに依存する。他のメカニズムの下では，均衡で価格が分散する可能性があることは明らかに見える。しかしながら，ϕ が無限大に近づくにつれ，そのような価格の散らばりは消えると予想される。

参 考 文 献

[1] Aiyagari, S. Rao, Neil Wallace, and Randell Wright, The Discount on Discount Securities in a Matching Model, (1995) Manuscript. Federal Reserve Bank of Minneapolis.

[2] Diamond, Peter A, and Joel Yellin, Inventories and Money Holdings in a Search Economy, (1990) Econometrica 58, 929-950.

[3] Kiyotaki, Nobuhiro, and Randell Wright, On Money as a Medium of Exchange, (1989) J.P.E. 97, 927-954.

[4] Lefschetz, Solomon, "Differential Equations: Geometric Theory," (1977) Dover Publications, Inc.

[5] Shi, Shouyoung, A Simple Divisible Search Model of Fiat Money, (1994) Manuscript, Queen's University.

[6] Shi, Shouyoung, Money and Prices: A model of Search and Bargainig, J. Econ. Theory (in press).

[7] Trejos, Alberto, and Randell Wright, Search, Bargaining, Money, and Prices, (1995) J.P.E. 103, 118-141.

[8] Vickrey, M. A. W., Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders, (1961) J. of Finance 16, 8-37.