Title	貨幣と成長 : 修正Sidrauski modelと景気変動へのimplication
Sub Title	Money and growth : modified Sidrauski model and the implication for business cycle
Author	瀬下, 博之
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1997
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.89, No.4 (1997. 1) ,p.590(52)- 614(76)
JaLC DOI	10.14991/001.19970101-0052
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19970101-0052

「三田学会雑誌」89巻4号（1997年1月）

貨幣と成長

──修正 Sidrauski Model と景気変動への Implication*──

瀬　下　博　之

Abstract

この論文は経済成長と景気変動における貨幣の役割を再考することを目的としている。そのために，まず Uzawa（1968）の内生的な時間選好率関数を用いて Sidrauski Model を修正し，貨幣が実体経済に対して拡張的な影響を与え得ること（特に Tobin 効果）を理論的に示し，その調整経路を分析する。これはたとえ名目貨幣供給量のレベルの増加が実体経済に中立的であるとしても，その増加率を高めることで，実体経済の成長率に拡張的な影響を与え永続性をともなう景気変動を生み出すことを意味する。また，このような内生的な時間選好率を前提とすると，実物的景気循環理論の基本的な主張そのものが成立しなくなる可能性があることも示す。

1. はじめに

現在のマクロ経済学において，貨幣の役割に対する評価が相対的に低下したのは，80年代に登場した実物的景気循環理論（Real Business Cycle Theory）[(1)] の影響とマクロ時系列変数の非定常性に関する議論の影響を受けたことによる。Nelson and Plosser（1982）は主要なマクロ経済時系列データの変動がランダム・ウォークに従っていることを見い出した。このことは，永続性を持つショックによって経済が変動していることを意味し，長期的には全く実体経済に影響を及ぼさない「中立的な」ものとして捉えられてきた貨幣では，景気変動を説明できなくなってしまった。その一方で，

* この論文は瀬下（1994）の修士論文を整理し 加筆・修正したものである。本稿の作成に当たっては，指導教授の吉野直行教授はじめ，修士論文を審査して下さった丸山徹教授・細田衛士教授，演習の授業の中で報告の場を与えて下さった神谷傳造教授，及び大山道廣教授，川又邦雄教授，長名寛明教授，塩澤修平教授，柳川範之氏他，多数の合同演習の出席者等から有益なコメントをいただいた。また匿名のレフェリーからは本稿の構成に関わる重要な指摘をいただいた。この場を借りて改めて謝意を表したい。なお，本稿に含まれるいかなる誤謬もすべて本人に帰するものであることはいうまでもない。

（1） Real Business Cycle Theory については，Kydland and Prescott（1982），King, Plosser and Rebelo（1988），Plosser（1989）等参照

実物的景気循環理論は，ミクロ的な基礎付けを持った成長論の議論に，長期的に影響を持ち得る生産性ショックを組み込むだけで，現実の時系列の動きを明快に説明することに成功した。

このような実物的景気循環理論の中では，貨幣残高，特に内部貨幣残高の変動は，生産性ショックに伴う貨幣需要の変動によって生じると主張される。ここで，内部貨幣とは市中銀行の信用創造に伴って派生的に生じる貨幣であり，中央銀行が発行する現金通貨を含むいわゆるハイパワードマネーは外部貨幣と定義される。特に，King and Plosser (1984) は，取引コストを低下させる中間財として貨幣をとらえることで，名目貨幣残高の変動が実質的な生産水準の変動に先んじて変動するという現実の現象も整合的に説明できるとした。(2)

しかし見方を変えれば，貨幣的なショックが経済成長に影響を与えることを理論的に説明できれば，生産性ショックを持ち出さなくても，永続性を伴った経済変動を説明することはできるはずである。実際 King and Plosser (1984) は，その実証研究の中で，貨幣が成長に対して影響を与えていないという「スーパー・ニュートラリティー(3)」の議論は現実経済では成り立っていないかも知れないと述べ，貨幣が景気変動に影響を及ぼす可能性を示唆している。また，近年の実証研究は，貨幣供給量の長期的な「中立性」を確認する一方で，「スーパー・ニュートラリティー」は一般に棄却され，拡張的な影響 (Tobin 効果) が生じることを見い出している (King and Watson (1992), Weber (1994))。

さらに，景気変動に関する実証研究からも貨幣的な要因が景気変動を発生させるという証拠がしばしば報告されている。たとえば Ramey (1992) は，貨幣と企業間信用の代替と補完的な関係を実証することによって，季節変動以外の中長期的な経済変動の主要な要因は生産性ショックではなく，貨幣的なショックによるものであると結論づけている。また，Evans (1992) は Solow 残差で測定される生産性ショックは外生的なショックと見なすことができず，貨幣や政府支出などの要因のほうが重要であることを見い出している。

それにも関わらず，貨幣の景気変動への影響が理論的に軽視され続けているのは，「貨幣と成長」の分野におけるミクロ的な基礎付けを持った議論の多くが，実証結果の示す Tobin 効果に対しては否定的であったからである。(4) そのため，その調整経路も，貨幣が景気変動に対して正の影響を与

(2) また，Barro and King (1984) 参照。彼らは効用関数が時間に関して分離可能である場合に貨幣供給量などが増加するケースを考えた。彼らの議論によると，貨幣が財市場で消費を増加させる総需要への効果を認めても，レジャーが上級財である場合には，レジャーが増え総供給が減少する効果が働く。彼らは，効用関数が時間に関して分離可能である場合には，この二つの効果が互いを相殺してしまうため，貨幣的な攪乱を誤って認識してもそれが景気変動の要因になるとは言えないと主張した。

(3) 本稿では「スーパー・ニュートラリティー」を，名目貨幣供給量の増加率が，実質貨幣残高以外のすべての実質変数に影響を与えないと状況と定義する。

(4) 「貨幣と成長」に関するサーベイとしては，Wang, P. and C.K. Yip (1992) および瀬下 (1994) 第1章等参照。

えるという現実のデータと逆の結論を導くことになってしまう。たとえば最近，Gomme (1993) は内生的な成長のフレームワークの中に cash-in-advance 制約を通じて貨幣を導入することによって，貨幣の変動が実体経済の変動の特徴をかなりうまく説明することを示したが，その場合でも実体経済が示す貨幣の拡張的な影響をうまく説明することはできなかった。

したがって，貨幣と景気循環の問題を再考するという現在のマクロ経済学の重要なテーマ[(5)]を分析するためには，まず，ミクロ的な基礎付けを持った成長論のフレームワークの中で，外部貨幣の実体経済への拡張的な影響（Tobin 効果）を簡潔に説明することが強く求められている。

これまでの議論の中で Tobin 効果をうまく説明できなかったのは，基本的に時間選好率を一定として議論してきたことに依存する。特に貨幣のスーパーニュートラリティーを理論的に導いた Sidrausuki (1967) の結論は決定的にこの時間選好率の一定性に依存している。そのため本稿では Uzawa (1968) の内生的な時間選好率を利用して分析を行う。そうすることによって，名目貨幣供給量の成長率の上昇が，一般に，資本蓄積に対して正の影響をもつことを簡単に説明できる。そこで，以下では比較静学によって Tobin 効果が存在することを確かめることから始める。

まず，第 2 節で内生的な時間選好率を用いて，この Tobin 効果をミクロ的に基礎づけるモデルを構築し，第 3 節では，得られたモデルの定常均衡がその近傍で鞍点になっていることを示す。この時の収束経路は，完全予見の下で，短期的な変動を除いた長期的な経済変数の変動の姿を描写するものでもある。さらに，第 4 節ではこのような内生的な時間選好率を考えることによって，生産性ショックが定常状態に及ぼす効果を分析する。そこでは，拡張的な生産性ショックが投資と実質生産量を増加させると考えることで景気変動の特徴をうまく説明できるとする実物的景気循環の理論の主張が，時間選好率を内生化することによって，必ずしも成立しなくなる可能性があることを示す。そして最後に本稿の結論を述べる。

2. 内生的な時間選好率と修正 Sidrauski モデル

2-1. モデルの設定

この経済では，同一の選好を持ち，無限に生きる経済主体のみが存在する経済を考える。一般に知られているように，このとき代表的な個人の選好関数を考えて分析することができるので，代表的個人の目的関数を次のように定義する[(6)]。なお以下の議論において，変数は一般に一人当たりの変数（per capita）で書かれている。また下付き文字の t は時点を表している。

（5） 新古典派的な枠組みの中に情報の非対称性とそれに伴う金融市場の不完全性を取り入れることによって，景気変動の問題を論じようとするものとしては，Bernanke and Gertler (1989), Greenwald and Stiglits (1991) 等参照。

（6） 貨幣を効用関数に明示することの正当化は Feenstra (1986) や Cruoshore (1993) を参照。

$$W = \int_0^{\infty} U(c_t, m_t) e^{-\delta_t} dt \tag{1}$$

$$where \quad \dot{\delta}_t = \rho(U(c_t, m_t)) \tag{2}$$

ここで c は一人当りの実質消費水準，m は一人当りの実質貨幣残高をそれぞれ表している。また U は代表的な個人の瞬間的な効用関数であり，

$$U_c > 0, \; U_m > 0, \; U_{cc} < 0, \; U_{mm} < 0 \tag{3}$$

及び

$$U_{cm} = U_{mc} \geqq 0 \tag{4}$$

と仮定する。なお特に説明しない限り，t 以外の下付きの文字はその変数による偏微係数を表している。(4)の仮定は複数均衡の可能性を排除するものである。これは $U_{cm} = U_{mc} < 0$ の場合に複数均衡の可能性があることを Brock (1974) が示唆したことに従っている。さらに端点解を排除するため以下のような仮定をおく。

$$\lim_{c \to 0} U_c = \infty \qquad \lim_{m \to 0} U_m = \infty$$

また，(1)の δ は代表的個人の時間選好率を表し，$\rho(\cdot)$ はその時間選好率関数である。[(7)] ここで，Uzawa (1968) にならって $\rho(\cdot)$ は以下のような性質を持つと仮定する。

$$\rho > 0, \; \rho_U > 0, \; \rho_{UU} > 0, \; \rho - U\rho_U > 0 \tag{5}$$

(5)式の2番目と3番目の仮定は異時点間の効用の限界代替率が逓増する特性を示し，最後の仮定は瞬間的な効用を高めることによって，全体の効用水準も高まることを意味する。[(8)]

いま K を実質総資本量，N を総人口とし，この経済の生産関数 $F(K, N)$ を一次同次と仮定しよう。このとき $F(K, N) = NF(K/N, 1)$ と書けて，資本集約度を $k \equiv K/N$ と定義すると，一人当たりの生産関数は $f(k)$ と書ける。ここで，$f(\cdot)$ は以下のような特性を持つとする。

$$f_k > 0, \quad f_{kk} < 0 \tag{6}$$

このとき，一人当たりの消費水準を c，一人当たりの粗貯蓄を s，政府からの一括補助金を ν とすると，一人当りの予算制約は以下のように書ける。

$$f(k_t) + \nu_t = c_t + s_t \tag{7}$$

新古典派モデルでは，一人当たりの粗投資 (i_t) と一人当たりの粗の貨幣残高の増加分 (z_t) の和は，常に一人当たりの粗貯蓄 (s_t) と一致するので次式が常に成立する。

---

(7) この内生的な時間選好率を導入した積分型の効用関数は，Strotz (1957) の意味で time consistent である。(Appendix 3 参照)。

(8) 後で述べるように，Wは定常状態で U/ρ のように書ける。これを U について微分すると

$$d[U/\rho]/dU = (\rho - U\rho_U)/\rho^2$$

したがって，この式の分子が正（すなわち(5)式の最後の条件が成り立つ）ならば瞬間的な効用関数 U の上昇によって全体的な効用水準 W が高まることが分かる。

$$s_t = i_t + z_t \tag{8}$$

ところで，M を名目貨幣残高，P を物価水準とし，資本の減耗は表記を簡単にするために無視すると，

$$\dot{k}_t = \frac{d(K_t/N_t)}{dt} \qquad \dot{m}_t = \frac{d(M_t/P_tN_t)}{dt}$$

より，n を人口の成長率（時間を通じて一定）とすると，

$$i_t = \dot{k}_t + nk_t \qquad z_t = \dot{m}_t + (\pi_t + n)m_t$$

と書けるから，(8)式を(7)式に代入したものに，これらの式を代入すると，代表的個人の予算制約は Sidrauski（1967）にならって次のように書ける。

$$\dot{a}_t = f(k_t) + \nu_t - (\pi_t^e + n)m_t - nk_t - c_t \tag{9}$$

$$where \quad a_t = k_t + m_t$$

ただし，π_t は家計の行動選択時点では実現せず，常に一定ではないので期待インフレ率 π_t^e で表している。代表的な個人の問題は，結局(1)式を(2)式と(9)式の制約の下で最大化することになる。

2-2．最大化条件

前節をまとめると，代表的個人の直面する問題は以下のように書ける。

$$\begin{aligned}
\max W &= \int_0^\infty U(c_t, m_t)e^{-\delta_t}dt \\
\text{sub.to} \quad \dot{\delta} &= \rho(U(c_t, m_t)) \\
\dot{a}_t &= f(k_t) + \nu_t - (\pi_t^e + n)m_t - nk_t - c_t \\
a_t &= k_t + m_t
\end{aligned}$$

従って，ハミルトニアン H は以下のように置くことができる。[9]

$$H = U(c_t, m_t)e^{-\delta_t} + \tilde{\sigma}_t\left[f(k_t) + \nu_t - (\pi_t^e + n)m_t - nk_t - c_t\right] + \tilde{\phi}_t\rho_t + \tilde{\gamma}_t(a_t - k_t - m_t)$$

ここで $\tilde{\sigma}$ と $\tilde{\phi}$ は共役変数（co-state valuables）で，$\tilde{\gamma}$ はラグランジェ乗数である。結局問題は，このハミルトニアンを最大化することに帰着される。この最大化のための一階条件は以下のようにまとめられる。

$$H_c = U_c e^{-\delta_t} + \tilde{\phi}_t\rho_U U_c - \tilde{\sigma}_t = 0 \tag{10-a}$$

$$H_m = U_m e^{-\delta_t} + \tilde{\phi}_t\rho_U U_m - (\pi_t^e + n)\tilde{\sigma}_t - \tilde{\gamma}_t = 0 \tag{10-b}$$

$$H_k = \tilde{\sigma}_t(f'(k_t) - n) - \tilde{\gamma}_t = 0 \tag{10-c}$$

（9） 以下の計算手順は基本的には Obstfeld(1988) に従っている。より正確に言うと Obstfeld(1988) は，Kompas and Abdel-Razeq(1987), "A note on Uzawa transformation of two state variable optimal control Problem with an endogenous rate of time Preference," mimeo.（この論文の引用文献には載せていない）を参考にしているが，入手困難なため，Obstfeld(1988)の計算方法を利用することにする。

$$\dot{\tilde{\sigma}}_t = -\tilde{\gamma}_t \tag{10-d}$$

$$\dot{\tilde{\phi}}_t = -U(c_t, m_t)e^{-\delta_t} \tag{10-e}$$

$$\dot{a}_t = f(k_t)+\nu_t-(\pi_t^e+n)m_t-nk_t-c_t \tag{10-f}$$

$$\lim_{t\to\infty} a_t\tilde{\sigma}_t = 0 \tag{10-g}$$

$$\lim_{t\to\infty} \delta_t\tilde{\phi}_t = 0 \tag{10-h}$$

いま，計算を簡単にするために，変数を次のように定義する。

$$\sigma_t \equiv e^{\delta_t}\tilde{\sigma}_t,\quad \phi_t \equiv e^{\delta_t}\tilde{\phi}_t,\quad \gamma_t \equiv e^{\delta_t}\tilde{\gamma}_t \tag{11}$$

この時 $\dot{\sigma} = e^{\delta}\tilde{\sigma}\dot{\delta}+e^{\delta}\dot{\tilde{\sigma}}$ と $\dot{\phi} = e^{\delta}\tilde{\phi}\dot{\delta}+e^{\delta}\dot{\tilde{\phi}}$ とに注意すると，以上の条件は次のように書き換えられる。[10]

$$U_c+\phi_t\rho_U U_c-\sigma_t = 0 \tag{12}$$

$$U_m+\phi_t\rho_U U_m-(\pi_t^e+n)\sigma_t-\gamma_t = 0 \tag{13}$$

$$\sigma_t(f'(k_t)-n)-\gamma_t = 0 \tag{14}$$

$$\dot{\sigma}_t = \rho_t\sigma_t-\gamma_t \tag{15}$$

$$\dot{\phi}_t = \phi_t\rho_t+U \tag{16}$$

$$\dot{a}_t = f(k_t)+\nu_t-(\pi_t^e+n)m_t-nk_t-c_t \tag{17}$$

$$\lim_{t\to\infty} a_t\sigma_t e^{-\delta_t} = 0 \tag{18}$$

$$\lim_{t\to\infty} \delta_t\phi_t e^{-\delta_t} = 0 \tag{19}$$

この(12)式から(14)は，各時点でハミルトニアン H が最大化されているための一階条件であり，(15)式と(16)式はいわゆるオイラー方程式である。そして最後の2つの式は横断面条件を示している。

なお書き換えた共益変数 ϕ には重要な意味付けができる。すなわち，(16)式を(時点 τ から∞時点まで積分すると，収束経路上で $\lim_{t\to\infty}\phi_t e^{-\delta_{t-\tau}} = 0$ であることに注意して次式を得る（Appendix 1 参照)。

$$\phi_\tau = -\int_\tau^\infty U e^{-\delta_{t-\tau}}dt \tag{20}$$

従って，収束経路上で書き換えた共役変数 ϕ は定常状態における $-W$ の値に等しくなることを示している。

ところで $r_t \equiv \gamma_t/\sigma_t$ と定義すると，(13)(14)(15)式は以下のように書き換えられる。

$$(1+\phi_t\rho_U)U_m = [r_t+(\pi_t^e+n)]\sigma_t \tag{13$'$}$$

$$f'(k_t)-n = r_t \tag{14$'$}$$

$$\dot{\sigma}_t = \sigma_t\rho_t-r_t\sigma_t \tag{15$'$}$$

(10)　これらの計算は，直接現在価値ハミルトニアンを定義して解いても得ることができるが，時間選好率が内生的であることを考慮して現在価値ハミルトニアンを用いなかった。

なお，(12)(13)′(14)′式より，任意の t について次式が成立する。

$$\mu_t = f(k_t) + \pi_t^e \tag{21-a}$$

$$\text{where} \quad \mu_t \equiv \frac{U_m(c_t, m_t)}{U_c(c_t, m_t)} \tag{21-b}$$

この (21-b)式の右辺は消費と貨幣保有に関する無差別曲線の傾きを表しているから，(21-a)式は消費と貨幣保有についての無差別曲線の傾きが任意の時点 t で，資本の限界生産量と期待インフレ率の和，すなわち名目利子率に等しくなることを表している。また(14)′と(15)′より，次式を得る。

$$\dot{\sigma}_t = \{\rho_t - (f_k - n)\}\sigma_t \tag{22}$$

以下では，Calvo (1979) や Obstfeld (1981,1988) などと同様に，完全予見を前提として議論を進めよう。ここでいう完全予見とは，経済主体が将来の価格水準や政府の名目移転支出（トランスファー）を知っていて，この時実現する実際のインフレ率と期待インフレ率が常に一致するように期待を形成することを意味すると仮定する。

$$\pi_t^e = \pi_t$$

ところで，このことはまた，(一人当りの) 最適な実質貨幣残高の経路が，実際の (一人当りの) 実質貨幣残高の経路と等しくなることを要求する。なぜならば，両者が等しくなければ，予想される価格水準の経路と実際の価格水準の経路が一致していないことを意味するからである。したがって

$$\dot{m}_t = \frac{d(M_t/N_tP_t)}{dt} = (\psi_t - \pi_t - n)m_t \tag{23}$$

ここで ψ は名目貨幣供給量の成長率である。すなわち，

$$\psi_t \equiv \frac{\dot{M}_t}{M_t}$$

いま，政府は税収を得ておらず，その収支は常に均衡していると仮定すると

$$\nu_t = \psi_t m_t \tag{24}$$

一方(17)より(23)(24)と $\pi_t^e = \pi_t$ を使うと

$$\dot{k}_t = f(k_t) - nk_t - c_t \tag{25}$$

が成り立つ。

ところで，(12)式を c に関して解いて

$$c = C(\sigma, m, \phi) \tag{26-a}$$

where

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma} = \frac{1}{(1+\phi\rho_U)U_{cc} + \phi\rho_{UU}U_c^2} \equiv C_\sigma \tag{26-b}$$

$$\frac{\partial c}{\partial m} = -\frac{(1+\phi\rho_U)U_{cm}+\phi\rho_{UU}U_cU_m}{(1+\phi\rho_U)U_{cc}+\phi\rho_{UU}U_c^2}$$
$$= -[(1+\phi\rho_U)U_{cm}+\phi\rho_{UU}U_cU_m]\cdot C_\sigma \equiv C_m \tag{26-c}$$

$$\frac{\partial c}{\partial \phi} = \frac{-\rho_U U_c}{(1+\phi\rho_U)U_{cc}+\phi\rho_{UU}U_c^2} = -\rho_U U_c\cdot C_\sigma \equiv C_\phi \tag{26-d}$$

これらと任意の時点 t で (21-a)式が成立していることに注意すると，このモデルの微分方程式の体系は以下のように与えられる。なお以下では，誤解のおそれがない限り，下付の t は省略して記述する。

$$\dot{c} = C_\sigma\dot{\sigma}+C_m\dot{m}+C_\phi\dot{\phi}$$
$$= C_\sigma(\rho-f_k-n)\sigma+C_m(\psi+f_k-\mu)m+C_\phi(\phi\rho+U) \tag{27}$$
$$\dot{m} = (\psi+f_k-\mu)m \tag{28}$$
$$\dot{k} = f(k)-nk-c \tag{29}$$
$$\dot{\phi} = \phi\rho+U(c, m) \tag{30}$$

従って定常状態では $\dot{k}=0$, $\dot{m}=0$, $\dot{c}=0$ および $\dot{\phi}=0$ が成立することから，以下の条件が成立していることが分かる。

$$f_k-n = \rho(U) \tag{31-a}$$
$$f_k = \mu-\psi \tag{31-b}$$
$$f(k) = c+nk \tag{31-c}$$
$$\phi = -U/\rho \tag{31-d}$$

命題 1

定常状態で，一人当たりの資本水準 (k)，実質貨幣残高 (m)，実質消費水準 (c)，及び共益変数 ϕ は(31-a)～(31-d)を満たすように決定される。

証明：(27)から(30)式より，$\dot{k}=0$, $\dot{m}=0$, $\dot{c}=0$, $\dot{\phi}=0$ と置くと得られる。Q.E.D.

ここで(31-a)と(31-b)の二つの等式は利子率の均等化条件を示している。すなわち(31-a)式は，定常状態で一人当り資本の限界生産性から人口の成長率を差し引いたものが代表的家計の主観的割引率に等しくなり，(31-b)式は一人当りの資本の限界生産性に一人当たりの名目貨幣成長率を加えたものが，消費と貨幣保有の限界代替率と等しくなるという条件を表している。

(31-c)式は一人当たりの資本の増加がゼロとなる場合の財市場の均衡条件になっており，定常状態で，一人当りの生産量が，一人当りの消費とその期の人口増加によって生じる資本集約度の低下を回復するための投資の和に等しいという条件を表している。(31-d)式で示される ϕ の値は，(20)式を思い出すと，定常状態で成立する $-W$ の値，すなわち「定常状態における U の流列の

割引現在価値の和にマイナスを掛けたもの」を表していることがわかる。

2-3. 比較静学と Tobin 効果

この節では，(27)から(30)式の動学方程式の体系を用いて定常状態の近傍で比較静学を行う。これによって Tobin (1965) が主張した「名目貨幣供給量の増加率の上昇が資本蓄積に及ぼす正の効果」を証明することができる。$\dot{k}=0$，$\dot{m}=0$，$\dot{c}=0$ および $\dot{\phi}=0$ の近傍で(27)から(30)式を全微分して行列にまとめると，(12)式の関係から次のように書ける。なお，以下では上付の＊で定常状態における変数の値を示す。

$$\begin{bmatrix} -C_m\mu_c m^* & -C_m\mu_m m^* & f_{kk}[-C_\sigma\sigma^*+C_m m^*] & \rho^* C_\phi \\ -\mu_c m^* & -\mu_m m^* & m^* f_{kk} & 0 \\ -1 & 0 & f_k-n & 0 \\ (1+\phi^*\rho_U)U_c & (1+\phi^*\rho_U)U_m & 0 & \rho^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dc \\ dm \\ dk \\ d\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_m m^* d\psi \\ m^* d\psi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{33}$$

ここで，

$$\mu_c = \frac{U_cU_{mc}-U_mU_{cc}}{U_c^2}>0, \qquad \mu_m = \frac{U_cU_{mm}-U_mU_{cm}}{U_c^2}<0$$

また定常状態の近傍で評価すると $\rho=f_k-n>0$，$\phi=-U/\rho<0$ で，(5)式の仮定から $1+\phi\rho_U=(\rho-\rho_u U)/\rho>0$ であるから。

$$C_\sigma = \frac{1}{(1+\phi\rho_U)U_{cc}+\phi\rho_{UU}U_c^2}<0 \tag{34-a}$$

$$C_m = -[(1+\phi\rho_U)U_{cm}+\phi\rho_{UU}U_cU_m]\cdot C_\sigma \tag{34-b}$$

$$C_\phi = -\rho_U U_c\cdot C_\sigma<0 \tag{34-c}$$

である。

上の行列の行列式は，(26-b)式と(26-d)式の関係と(12)式に注意して，

$$\begin{aligned} \det &= \rho^* m^*\{-\mu_m[-C_\sigma\sigma^*+C_m m^*]f_{kk}+C_m\mu_m m^* f_{kk}\} \\ &\quad -\rho^* m^*(1+\phi^*\rho_U)C_\phi\{\mu_c(f_k-n)U_m-U_mf_{kk}-\mu_mU_c(f_k-n)\} \\ &= \sigma^* m^* C_\sigma\Delta<0 \end{aligned} \tag{35}$$

ここで，

$$\Delta \equiv \rho^*\{\mu_m f_{kk}+\rho_U\mu_c(f_k-n)U_m-\mu_m\rho_U(f_k-n)U_c-\rho_U f_{kk}U_m\}>0 \tag{36}$$

さらにクラーメルの公式を使って，dc，dm，dk，$d\phi$ を $d\psi$ に関して解き，定常状態の近傍で，$\rho=f_k-n>0$，$\phi=-U/\rho<0$ が成り立つことを使うと，(5)式の仮定から $1+\phi\rho_U=(\rho-\rho_u U)/\rho>0$ が導けるから次式が成立する。

$$\frac{dc}{d\psi}=\frac{\rho^*\rho_U U_m(f_k-n)}{\Delta}>0 \tag{37-a}$$

$$\frac{dm}{d\psi}=\frac{\rho^*[f_{kk}-\rho_U U_c(f_k-n)]}{\Delta}<0 \tag{37-b}$$

$$\frac{dk}{d\psi}=\frac{\rho\rho_U U_m}{\Delta}>0 \tag{37-c}$$

$$\frac{d\phi}{d\psi}=-\frac{(1+\phi\rho_U)U_m f_{kk}}{\Delta}>0 \tag{37-d}$$

従って，名目貨幣供給量の増加率(ψ)の上昇は一人当りの実質消費支出を増加させ，その一方で一人当りの保有する実質貨幣残高は減少することがわかる。また，一人当りの資本も増加させることがわかるから，たとえ家計の合理的な行動を前提とした場合でも，Tobin効果，すなわち，名目貨幣供給量の増加率(ψ)の上昇が資本集約度を高めることが，ミクロ的に基礎づけられた理論の中で証明されたことになる。以上から，一人当り産出量$f(k)$も増加する。したがって，名目貨幣供給量の増加率の上昇は，定常状態でなお実体経済に拡張的な影響を及ぼすことが明らかとなる。

ところで，(37-a)～(37-d)式で$\rho_U=0$とすると時間選好率が一定のSidrauski (1967) のmodelになることに注意して欲しい。このときψが上昇するとmが減少し，ϕが上昇（Wが減少）するだけで，cやkは全く変化しないというスーパー・ニュートラリティーの結論を得ることがわかる。このモデルでは時間選好率を固定していないという意味で，Sidrauski (1967) のモデルよりも，より一般的なモデルであると言うことができるだろう。

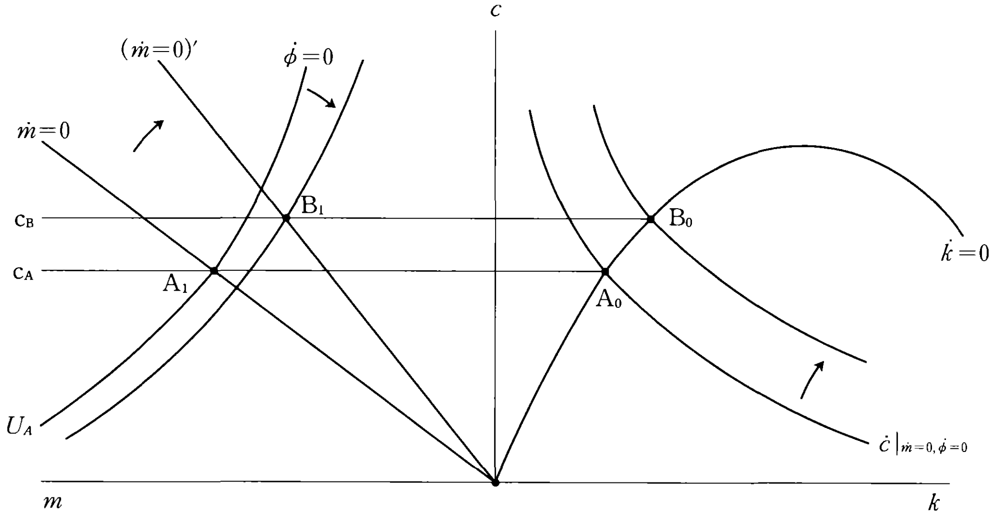
命題2

代表的な個人の目的関数が(1)(2)式のように与えられ，時間選好率について(5)式のように仮定する。この時名目貨幣供給量の増加率(ψ)を高めると，一人当たりの実質消費水準(c)と一人当たりの実質資本(k)を増加させるが，一人当たりが保有する実質貨幣残高(m)は減少し，各個人の厚生水準は低下する。

証明：(37-a)から(37-d)より明らか　Q.E.D.

貨幣残高から効用を得ている経済主体を考えると，一人当りの名目貨幣供給量の増加がもたらす期待インフレ率の上昇によって，まず消費と貨幣の代替関係への影響が生じる。すなわち一人当り実質貨幣保有残高を低下させ，一人当りの消費を増加させようとする。このときまた同時に貨幣と資本の間の資産選択への影響も生じ，代替的な資産である資本に対する需要も増加し，資本蓄積が進み（すなわち一人当りの資本水準が増加し），結局一人当りの所得水準と消費水準を増加させて定常に達する。このように考えてみると，Sidrauski (1967) のmodelの中には本質的に経済主体の資産選択の問題に欠点が存在していたことに気付く。家計の資本に対する需要は，時間選好率が一

図 1



定であることから常に一定に決まっており，名目貨幣供給量の増加率の上昇は，結局，家計の実質貨幣保有残高を減少させることだけによって，調整せざるを得ないという特殊な設定になっていたのである。

図 1 は命題 1 の結果を図を用いて直感的に説明したものである。ここで (k, c) 平面における $\dot{c}\big|_{\dot{m}=0,\dot{\phi}=0}=0$ で表された曲線は，$\dot{m}=0$ 及び $\dot{\phi}=0$ が同時に成り立つ場合に $\dot{c}=0$ を満たすような，すなわち，$\dot{c}\big|_{\dot{m}=0,\dot{\phi}=0}=C_\sigma(\rho-f_k-n)\sigma=0$ を満たすような k と c の組み合わせを描いている。このとき，$\dfrac{dc}{dk}=\dfrac{f_{kk}}{\rho_U U_c}<0$ であるから，(k, c) 平面で $\dot{c}\big|_{\dot{m}=0,\dot{\phi}=0}=0$ 曲線の傾きは負になることが分かる。また $\dot{k}=0$ を表す曲線は(29)式より，$\dfrac{dc}{dk}=f_k-n$ であるから，$f_k-n>0$ の時右上がりで，$f_k-n<0$ の時右下がりとなるが，本稿では(5)の最初の仮定より右上がりの部分だけで議論する。一方，$\dot{m}=0$ を示す曲線は (m, c) 平面で見るとき，$\dfrac{dc}{dm}=-\dfrac{\mu_m}{\mu_c}>0$ より，正の傾きをもつような曲線で描くことができる。なお，この曲線は k を所与として，無差別曲線の傾きが $f_k+\psi$ に等しくなるような点の軌跡である。また $\dot{\phi}=0$ を表す曲線は書き換えると，$\phi^*=\dfrac{U^*}{\rho(U^*)}$ であるから，(m, c) 平面で，定常状態で達成される m と c についての無差別曲線によって表される。

いま命題 2 の結果を見るために，名目貨幣供給量の成長率 ψ が上昇する場合を調べる。このとき，まず $\dfrac{dm}{d\psi}=\dfrac{1}{\mu_m}<0$ より，$\dot{m}=0$ を示す曲線は，ψ が上昇すると (m, c) 平面で上方にシフトする。このシフトは m の減少をもたらすため，任意の c について k が増加して $\dot{c}\big|_{\dot{m}=0,\dot{\phi}=0}=0$ を回復する。このことは $\dot{c}\big|_{\dot{m}=0,\dot{\phi}=0}=0$ 曲線が，右側にシフトすることを意味している。この時 (k, c) 平面で定常点は点 A_0 から B_0 に移動する。従って $\dot{c}\big|_{\dot{m}=0,\dot{\phi}=0}=0$ と $\dot{k}=0$ を同時に満たす c の値は図 1 の c_B に増加し，k も増加する。そして，この k の増加を受けて $\dot{m}=0$ は，やや下方に調整して，全体としてのシフトは $(\dot{m}=0)'$ のようになり，この $(\dot{m}=0)'$ と c_B を同時に満たすような無差別

曲線を達成するように $\dot{\phi}=0$ の表す曲線が下方にシフトして新しい定常状態が達成される。従って (m, c) 平面で定常点は A_1 から B_1 に移動する。ここで，厚生水準は各期に達成される効用水準の割引現在価値で表され，また割引率は，その効用水準の増加関数であるから，ϕ の値は増加することも減少することもあるようにも思われるが，仮定(5)の最後の条件から，瞬間的な効用水準が低下すると全体の厚生水準が低下すると仮定しているから，ϕ の値は増加（Wは低下）することになる。

従って，新しい定常均衡点は (k, c) 平面で，点 A_0 から点 B_0 に移り，(m, c) 平面で，点 A_1 から点 B_1 に移り，k と c がともに増加し，m が減少して，達成される無差別曲線は，当初よりも内側になる。この ψ の上昇に伴う k の増加は，いわゆる Tobin 効果である。

2.4. 内生的な時間選好率と小野（1992）のモデル

時間選好率が一定であることは，貨幣を明示した家計や代表的個人の選択問題の中でしばしば奇妙な結論を導き出す。ここではそのような例として小野（1992）の議論が，時間選好率を内生化するだけで成立しなくなることを説明しておこう。このために，まず小野（1992）の主張を簡単に整理する。小野（1992）は Sidrauski モデルの定常状態に特殊な解釈を持ち込み，貨幣経済のもつ不安定性を説明しようとした。Sidrauski モデルの定常状態では，人口の成長率を考えないと，(31-a) と (31-b) 式から得られる条件と同様に，以下の条件を得る。

$$\bar{\delta}+\pi^e=\frac{U_m(c, m)}{U_c(c, m)} \tag{38}$$

ここで $\bar{\delta}$ は家計の時間選好率（一定）である。また定常状態では π^e は名目貨幣供給量の増加率に一致するので，これも一定となる。いま簡単化のため，名目貨幣供給量の増加率をゼロとする。このとき $\pi^e=0$ となる。ただし，価格の「水準」そのものは，このとき変動し得る点に注意されたい。

小野（1992）は Sidrauski（1967）のモデルに，守銭奴的な経済主体を仮定して次のような条件を付加した。すなわち

$$\lim_{m\to\infty} U_m(c, m)=\beta>0 \tag{39}$$

ここで，Ono の主張は，財市場が均衡する消費水準を y とすると，y が十分大きい時，$U_c(y)$ が十分小さくなるので

$$\frac{\beta}{U_c(y, m)}>\delta+\pi^e \tag{40}$$

が成立し，上のような Sidrauski の定常状態が存在しなくなるというものである。

いま(40)式のような関係が成立しているとすれば，各個人は消費水準を減らし実質貨幣保有を増加させようとする。このような状態の下では，たとえいくら価格水準が低下して実質貨幣残高の水

準を増加させようとも（U_{cm} の値が極めて小さいかゼロならば），財市場を均衡させる価格水準そのものが存在しなくなるのである。これが，小野（1992）の主張の基本である。

ところで，このような小野（1992）の議論も実は時間選好率が一定であるという仮定に決定的に依存している。もし，価格水準が低下すれば実質貨幣残高が増加し，家計の効用水準そのものは必ず上昇する。Uzawa（1968）の内生的時間選好率関数は，家計の効用水準の増加関数であるから，価格水準の低下に伴う実質貨幣残高の上昇は効用水準を高めて，各個人の時間選好率を高めて必ず $\beta/U_c(y, m)$ に収束して行く。すなわち，修正された Sidrauski モデルでは小野（1992）のような議論はそもそも成立しなくなるのである。

3．調整経路と安定性

第２節では，名目貨幣供給量の増加率の変化がもたらす定常解を分析したが，この節では調整経路について分析する。当然のことであるが，この調整経路は長期的なショックに応じて経済変数が動く経路を表すものであり，次のショックが起こるまでの間の経済の諸変数の（短期的な変動を除いた）変動の姿を表すものでもある。

動学方程式を再掲すると，

$$\dot{c} = C_\sigma(\rho - f_k - n)\sigma + C_m(\psi + f_k - \mu)m + C_\phi(\phi\rho + U) \tag{27}$$

$$\dot{m} = (\psi + f_k - \mu)m \tag{28}$$

$$\dot{k} = f(k) - nk - c \tag{29}$$

$$\dot{\phi} = \phi\rho + U(c, m) \tag{30}$$

上の動学方程式を定常状態の近傍で線形近似すると，(12)式と定常状態で $f_k - n = \rho^*$ が成り立つことに注意して，

$$\begin{bmatrix} \dot{c} \\ \dot{m} \\ \dot{k} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_m\mu_c m^* & -C_m\mu_m m^* & f_{kk}[-C_\sigma\sigma^* + c_m m^*] & \rho^* C_\phi \\ -\mu_c m^* & -\mu_m m^* & m^* f_{kk} & 0 \\ -1 & 0 & \rho^* & 0 \\ (1+\phi^*\rho_U)U_c & (1+\phi^*\rho_U)U_m & 0 & \rho^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c - c^* \\ m - m^* \\ k - k^* \\ \phi - \phi^* \end{bmatrix}$$

$$= A\begin{bmatrix} c - c^* \\ m - m^* \\ k - k^* \\ \phi - \phi^* \end{bmatrix} \tag{42}$$

ここで，Obstfeld（1981,1989）などと同様に，調整経路の分析を容易にするために以下のような仮定を置く。

$$U_{cm} = U_{mc} = 0$$

このとき，C_m，μ_c，μ_m はそれぞれ以下のように書き換えられる。

$$C_m = -\phi\rho_{UU}U_cU_m \cdot C_\sigma < 0, \qquad \mu_c = \frac{U_mU_{cc}}{U_c^2} > 0, \qquad \mu_m = \frac{U_cU_{mm}}{U_c^2} < 0$$

従って，これまでとの重要な違いは C_m の負号が確定することだけである。
ところで，固有方程式は以下のように与えられる。

$$|I\lambda - A| = \begin{vmatrix} \lambda + C_m\mu_c m & C_m\mu_m m & -f_{kk}[-C_\sigma\sigma + C_m m] & -\rho c_\phi \\ \mu_c m & \lambda + \mu_m m & -mf_{kk} & 0 \\ 1 & 0 & \lambda - \rho & 0 \\ -(1+\phi\rho)U_c & -(1+\phi\rho)U_m & 0 & \lambda - \rho \end{vmatrix} = 0 \tag{43}$$

ここで，上の固有方程式の定数項は A の行列式，すなわち(35)式によって与えられるから，定数項の値は負になることがわかる。従って，虚数根が共益で，その積は常に正になることから，解と係数の関係を考えると，この固有方程式は実部が負の固有根を一つまたは三つ有していることがわかる。そして，このことと Routh の定理[(11)]を使うことによって，Appendix 2 で示したように，この固有方程式は実部が負の固有根をただ一つだけ持つことがわかる。したがって，上の動学方程式は定常点の近傍で鞍点になっている。

Lemma 1

$U_{cm} = U_{mc} = 0$ のとき，(42)式の動学方程式の定常点は，その近傍で鞍点になっている。

証明：Appendix 2 参照

ところでこの時，微分方程式の解は以下のように与えられる。すなわち，

$$\begin{aligned} c - \bar{c} &= X_{11}e^{\theta_1 t} + X_{12}e^{\theta_2 t} + X_{13}e^{\theta_3 t} + X_{14}e^{\theta_4 t} \\ m - \bar{m} &= X_{21}e^{\theta_1 t} + X_{22}e^{\theta_2 t} + X_{23}e^{\theta_3 t} + X_{24}e^{\theta_4 t} \\ k - \bar{k} &= X_{31}e^{\theta_1 t} + X_{32}e^{\theta_2 t} + X_{33}e^{\theta_3 t} + X_{34}e^{\theta_4 t} \\ \phi - \bar{\phi} &= X_{41}e^{\theta_1 t} + X_{42}e^{\theta_2 t} + X_{43}e^{\theta_3 t} + X_{44}e^{\theta_4 t} \end{aligned} \tag{44}$$

ここで θ_i は固有根で，X_{1i}，X_{2i}，X_{3i}，X_{4i} は以下の条件を満たす定数である。

$$\begin{bmatrix} \theta_i + C_m\mu_c m & C_m\mu_m m & -f_{kk}[-C_\sigma\sigma + c_m m] & -\rho C_\phi \\ \mu_c m & \theta_i + \mu_m m & -mf_{kk} & 0 \\ 1 & 0 & \theta_i - \rho & 0 \\ -(1+\phi\rho)U_c & -(1+\phi\rho)U_m & 0 & \theta_i - \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1i} \\ X_{2i} \\ X_{3i} \\ X_{4i} \end{bmatrix} = 0 \tag{45}$$

(11) Routh の定理については，たとえば Gantmacher (1964) 参照。

今，$t \to \infty$ についてのみ収束する経路だけに着目して議論しよう。すなわち，Lemma 1より θ_1 を唯一の負の固有根とすると，実部が正の他の固有根 θ_i は $t \to \infty$ について発散するから，$X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{22}, X_{23}, X_{24}, X_{32}, X_{33}, X_{34}$ の各係数をそれぞれ0と仮定して議論する。

(45)式の第3行目の式から，θ_1 を負の固有根とすると，

$$X_{11} = -(\theta_1 - \rho) X_{31} \tag{46}$$

従って，$-(\theta_1 - \rho) > 0$ より，X_{11} と X_{31} の符号は，$t \to \infty$ に関する収束経路上で等しいことが分かる。また，上式を1行目の式に代入して，

$$X_{21} = \left[\frac{\mu_c m(\theta_1 - \rho) + m f_{kk}}{\theta_1 + \mu_m m} \right] X_{31} \tag{47}$$

この係数も正であるから X_{21} と X_{31} の符号は収束経路上で等しいことが分かる。

さらに(46)(47)式を，(45)式の4行目の式に代入して，

$$X_{41} = \frac{1}{\rho - \theta_1} \left[(1 + \phi \rho_U) U_c (\theta_1 - \rho) - (1 + \phi \rho_U) U_m \left\{ \frac{\mu_c m(\theta_1 - \rho) + m f_{kk}}{\theta_1 + \mu_m m} \right\} \right] X_{31} \tag{48}$$

この係数は負であるから，X_{41} と X_{31} の符号は収束経路上で異なることがわかる。

従って(44)式から，仮定の下で，収束経路は以下のように書くことができる。

$$c - c^* = \omega_1 (k - k^*) \tag{49-a}$$

$$m - m^* = \omega_2 (k - k^*) \tag{49-b}$$

$$\phi - \phi^* = \omega_4 (k - k^*) \tag{49-c}$$

where

$$\omega_1 = \frac{X_{11}}{X_{31}} > 0, \quad \omega_2 = \frac{X_{21}}{X_{31}} > 0, \quad \omega_4 = \frac{X_{41}}{X_{31}} < 0$$

命題3

$U_{cm} = U_{mc} = 0$ のとき，定常状態の近傍で，収束経路に沿って一人当たりの消費水準 c と一人当たりの貨幣残高 m は，一人当たりの資本水準が増加するに連れて増加し，共益変数 ϕ は逆に減少する。

証明：(49-a)から(49-c)式より明らか。Q.E.D.

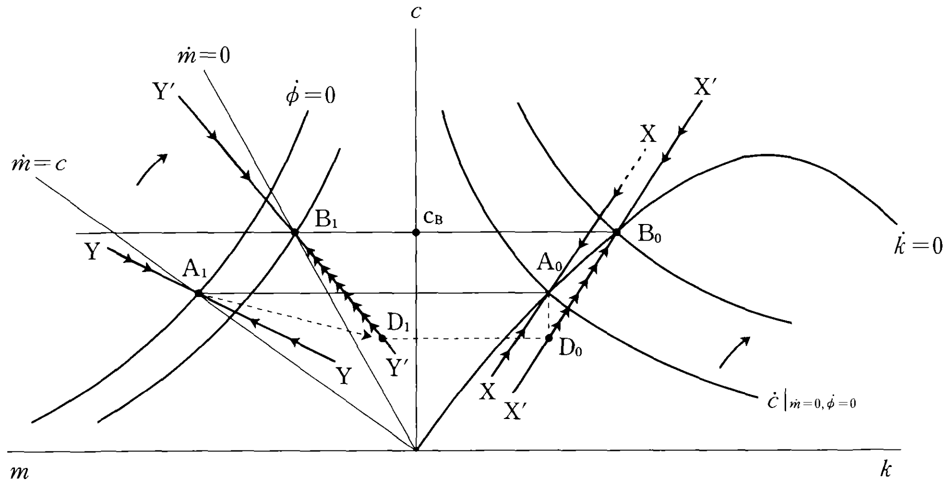
また(49-a)と(49-b)を用いると次式を得る。

$$c - c^* = \frac{\omega_1}{\omega_2} (m - m^*) \tag{50}$$

従って，収束経路は c と m の関係で見て右上がりの曲線になることがわかる。

図2は，これらの収束経路を図1の上に重ねて描いたものである。従って完全な位相図と呼べるものではないが，これまでの議論を直感的に議論する上では役に立つ。図の (k, c) 平面における

図 2



XX 曲線と (m, c) 平面の YY は，当初の定常点に対応した完全予見の下での収束経路をそれぞれ，k と c についてと，m と c について描いたもの，すなわち(49-a)式と(50)式を図示したものである。ここで，$\dot{k}=0$ を表す曲線の傾きが，定常点で $\dfrac{dc}{dk}=f_k-n=\rho$ であるから，(49-a)式の傾きは任意の定常点で傾きが $\dot{k}=0$ を表す曲線よりも急になっていることが分かる。一方(50)式の傾きは $\dot{m}=0$ よりも急になることも，緩やかになることもある。これは，k の動きの影響を調整経路が受けるからである。このような影響がない場合には，調整経路は $\dot{m}=0$ を表す曲線よりも緩やかな傾きになるので，ここでは傾きが緩やかな場合の図を描いてある。

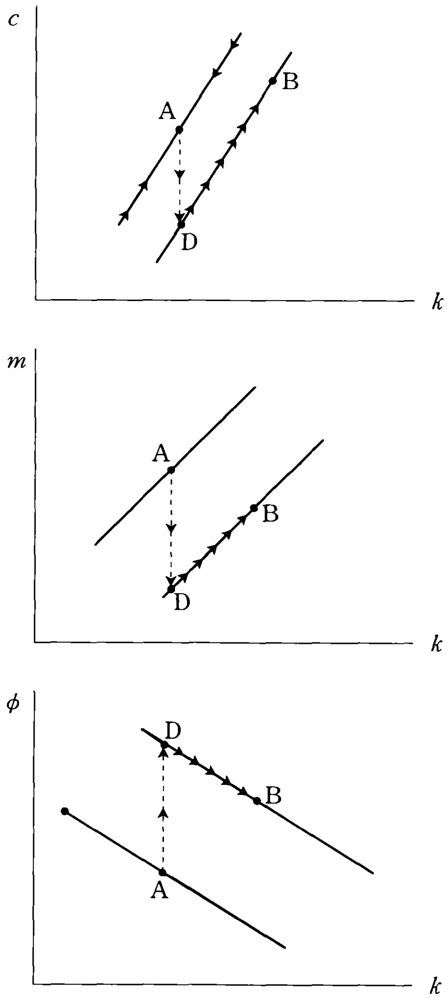
名目貨幣供給量の成長率 ψ が上昇すると，前節の比較静学の議論から (k, c) 平面で $\dot{c}=0$ の曲線が右にシフトし，定常点は点 A_0 から点 B_0 に移ることになる。この時，収束形路は新しい定常点を通るように XX から X′X′ にシフトする。また $\dot{m}=0$ も上にシフトし，$\dot{\phi}=0$ が下方にシフトして (m, c) 平面で，定常点は点 A_1 から点 B_1 に移動し，収束経路は YY から Y′Y′ にシフトする。

名目貨幣供給量の増加率 ψ が上昇すると状態変数である k はすぐに増加することはできないから，消費水準だけがすぐに，この新しい収束経路 X′X′ に乗るようにジャンプする(点 A_0→点 D_0)。このとき，同時にジャンプした c の値に応じた新しい収束経路 Y′Y′ の点 D_1 に乗るように m もジャンプする。

その後 k の増加にともなって c は収束経路 X′X′ に沿って定常状態 B_0 に収束するように増加し，m はこの c とともに収束経路 Y′Y′ に沿って B_1 に収束して行く。

この時，代表的個人の時点 t における厚生水準 W は，その時点以降の収束する間の効用水準の流列の和であるから，W の値は U が D_1 にジャンプした場合に，当初の定常状態で達成されていた厚生水準よりも大きく低下する。そしてその後定常状態に収束するに従って，しだいに高まって

図 3



くることが分かる。ここで，ϕ の値は W の値にマイナスを掛けたものであるから，ϕ は当初大きく増加し，その後しだいに低下して調整する。

図 3 は，これらの変数の動きを k との間の関係で見たもの，すなわち，(49-a)～(49-c)式と比較静学の結果を図示したものである。c と m の調整経路は k との関係から右上がりであり，ϕ は右下がりで描かれる。また当初の定常状態を表す水準は点 A で与えられており，名目貨幣供給量の増加率 ψ が上昇すると達成される新しい定常点は点 B で与えられている。名目貨幣供給量の増加率 ψ が上昇すると，c, m, ϕ は点 A から新しい収束経路上の点 D にシフトし，k が増加するとともに新しい定常状態に向かって c と m はしだいに上昇し，ϕ はしだいに低下して新しい定常状態に向かうことになる。ただし，比較静学の結論からわかるように，m は当初の水準よりも減少した水準で調整が終わり，c と ϕ は当初の水準よりも高い水準で定常状態に達することになる。

4．生産性ショックと資本蓄積

実物的景気循環理論と対比するため，この節では，生産性ショックがこの論文のモデルの中でどのような経済変動を作り出すか分析しよう。まず，生産関数に，実物的景気循環理論に倣って生産関数自体からは独立な技術変化を明示する。これは生産性ショックが生産関数そのものを変えないという仮定であり，技術変化の抽出をソロー残差によって一次近似的に抽出しようという意図を反映したものでもある。技術水準を表すパラメーターを ξ とすると，各期の産出量は $\xi f(k)$ と書くことができる。この時(27)から(30)式までの動学方程式の体系は以下のように書き換えることができる。

$$\dot{c} = C_\sigma(\rho-\xi fk-n)\sigma+C_m(\psi+\xi fk-\mu)m+C_\phi(\phi\rho+U) \tag{51-a}$$

$$\dot{m} = (\psi+\xi f_k-\mu)m \tag{51-b}$$

$$\dot{k} = \xi f(k)-nk-c \tag{51-c}$$

$$\dot{\phi} = \phi\rho+U(c,m) \tag{51-d}$$

定常状態を ξ について比較静学すると，ξ の上昇の効果は，以下の方程式を解くことによって得られる。

$$\begin{bmatrix} -C_m\mu_c m^* & -C_m\mu_m m^* & \xi f_{kk}[-C_\sigma\sigma^*+c_m m^*] & \rho^* C_\phi \\ -\mu_c m^* & -\mu_m m^* & m^*\xi f_{kk} & 0 \\ -1 & 0 & \xi f_k-n & 0 \\ (1+\phi^*\rho_U)U_c & (1+\phi^*\rho_U)U_m & 0 & \rho^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dc \\ dm \\ dk \\ d\phi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -f_k[-C_\sigma\sigma^*+C_m m^*]d\xi \\ -m^* f_k d\xi \\ -fd\xi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{52}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \det &= \rho^* m^*\{C_m\mu_m m^*\xi f_{kk}-\mu_m[-C_\sigma\sigma^*+C_m m^*]\xi f_{kk}\} \\ &\quad -\rho^* C_\phi(1+\phi^*\rho_U)m^*\{\mu_c(\xi f_k-n)U_m-\xi f_{kk}U_m-\mu_m U_c(\xi f_k-n)\} \\ &= \sigma^* m^* C_\sigma \Delta^\xi < 0 \end{aligned}$$

ここで，

$$\Delta^\xi = \rho^*\{\mu_m\xi f_{kk}+\rho_U\mu_c(\xi f_k-n)U_m-\mu_m\rho_U(\xi f_k-n)U_c-\rho_U\xi f_{kk}U_m\}>0$$

よって

$$\frac{dk}{d\xi} = -\frac{\rho^*\{\mu_m f_k+\rho_U\mu_c f U_m-\mu_m\rho_U f U_c-\rho_U f_k U_m\}}{\Delta^\xi} \tag{53}$$

従って，一人当たりの資本水準がどのようになるかは不明である。

また，その他の変数への影響は以下のようになる。

$$\frac{dc}{d\xi}=\frac{\rho^*\{-f_k\mu_m(\xi f_k-n)+f\mu_m\xi f_{kk}+\rho_U f_k(\xi f_k-n)U_m-\rho_U fU_m\xi f_{kk}\}}{\Delta^\xi}>0 \tag{54}$$

$$\frac{dm}{d\xi}=\frac{\rho^*[-\mu_c\xi f_{kk}f+\mu_c f_k(\xi f_k-n)-\rho_u U_c f_k(\xi f_k-n)+\rho_u U_c f\xi f_{kk}\}}{\xi\Delta} \tag{55}$$

$$\frac{d\phi}{d\xi}=\frac{(1+\phi\rho_U)(U_m\mu_c-U_c\mu_m)\{\xi f_{kk}f-(\xi f_k-n)f_k\}}{\Delta^\xi}<0 \tag{56}$$

この中で，消費と共益変数 ϕ だけが負号を確定することができるが，実質貨幣残高は資本蓄積同様に負号を確定することはできない。

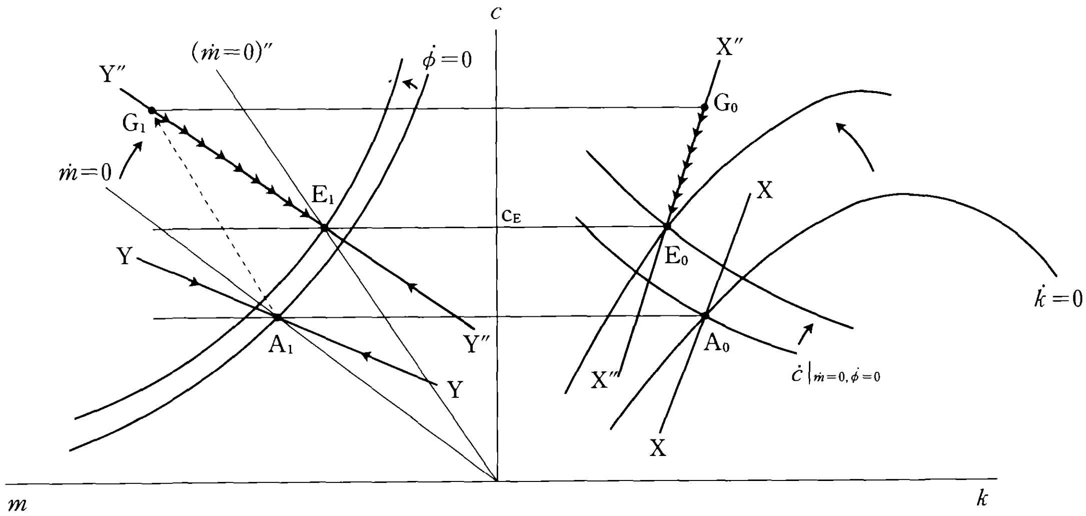
命題 4

代表的な個人の目的関数が(1)式のように与えられ，時間選好率について(5)式のように仮定する。この時，(1) $\rho_U f\{\mu_c U_m-\mu_m U_c\}>-\{\mu_m f_k-\rho_U f_k U_m\}$ の時，正の長期的な生産性ショックがあると，一人当たりの資本水準(資本集約度)は減少する。(2) $\rho_U f\{\mu_c U_m-\mu_m U_c\}<-\{\mu_m f_k-\rho_U f_k U_m\}$ の時，正の長期的な生産性ショックがあると一人当たりの資本水準は増加する。(3) 正の生産性ショックがあると，いずれの場合も一人当たりの消費水準は増加し，その厚生も上昇する。

証明：(1)と(2)は(53)式より明らか。(3)の前半は(54)式より明らか。後半は(56)式より，ϕ が低下するので，この値にマイナスをかけて得られる厚生水準は，定常状態で上昇する。　**Q.E.D**

このように生産性のショックが資本集約度に対して及ぼす影響が不明確であるのは，二つのことを反映している。一つは現在の消費を将来の消費で代替させようとする効果であり，これは，生産性の上昇とそれに対する所得の上昇に直面した経済主体が，そのような所得の上昇の大部分を貯蓄し，将来もより高い消費水準を享受しようとする動きを反映している。これは実物的景気循環理論が重視している異時点間の代替の効果である。もう一つの効果は，そのような生産性の上昇に伴う実質金利の上昇が与える効果であり，これに伴う効果は，時間選好率が内生的で各期の効用の増加関数であるから，その効用を高めるため消費を増加させ，貯蓄を抑制する方向に働く。これは，実物的景気循環の理論にはない議論である。なぜなら，一定の時間選好率の下では，生産性が上昇すれば，一定の時間選好率に収束するまで，一人当りの資本水準が増加し生産性ショックの実質利子率への影響を消滅させてしまうように調整するからである。後者の効果が前者の効果より大きくなれば，生産性の長期的な上昇は家計の貯蓄水準をむしろ低下させるように働き，このことは実物的景気循環理論の主張と全く逆の結論をもたらすことになる。特に，通常経済学で仮定するように，各経済変数の直接的な効果が他の変数の変化からの影響よりも大きいと仮定できるなら，すなわち，

図 4



上の比較静学に用いられた行列の対角要素が他に比較して十分に大きいと仮定できるなら，実物的景気循環理論の主張と逆の結論が導ける。

少なくとも内生的な時間選好率が正当化されるならば，正の生産性ショックは実物的景気循環理論が主張するほどに大きな投資の増加をともなわない。このことは，生産性ショックを景気循環の主要因と見ることによって，GNP の変動を投資の変動が上回っているという現象を容易に説明できるとした実物的景気循環理論の主張の頑健性を危ういものとする。

図 4 は命題 3 -(1)の資本集約度が減少するケースを図で示したものである。いま正の生産性ショックが起こり ξ が増加すると，$\dot{c}|_{\dot{m}=0,\dot{\phi}=0}=0$ と $\dot{k}=0$ を表す曲線は (k, c) 平面で上方にシフトし，$\dot{m}=0$ を示す曲線を (m, c) 平面でみて内側にシフトさせる。この調整によって $\dot{c}|_{\dot{m}=0,\dot{\phi}=0}=0$ と $\dot{k}=0$ を同時に満たす消費水準は c_E に増加して，k は減少する。この k の減少を受け $\dot{m}=0$ を表す曲線は，さらに上方の $(\dot{m}=0)''$ にシフトする。この $(\dot{m}=0)''$ と c_E を同時に満たすような無差別曲線を達成するように ϕ が低下して，$\dot{\phi}=0$ を表す曲線が上方にシフトして新しい定常状態が達成される。このような調整の結果，定常均衡点は (k, c) 平面で見て点 A_0 から点 E_0 に移動し，(m, c) 平面で定常点は A_1 から E_1 に移動する。この図では k と m がそれぞれ減少するケースを描いている。

このような，新しい定常状態を達成するための完全予見の収束経路は (k, c) 平面で見て X″X″ に移動し，(m, c) 平面で Y″Y″ に移動し，図で示されたような調整をする。この時消費水準 c と実質貨幣残高 m は当初大きく増加し，その後資本水準が低下するに従って，c と m がともに減少しながら定常状態に向かう。そしてこの間代表的個人の厚生水準は，各時点以降の効用水準の流列の和であるから，当初の c と m の増加によって，大きく増加するが，その後次第に低下しながら

定常に向かうことが分かる。

5. 終わりに

本稿では，貨幣と成長及び景気変動との関係を理論的に再考した。主な本稿の結論は，

(1) これまでの「貨幣と成長」の分野の中でほとんど明確にミクロ的な基礎付けを与えられてこなかった「Tobin効果」の存在を証明し，さらにその定常の近傍での調整経路を分析することを通じて，名目貨幣供給量の増加率の変更が，実体経済の変数をどのように変動させるか分析した。名目貨幣供給量の増加率が上昇すると，消費と実質貨幣残高は低下し，投資が増加する。そしてその投資の結果，資本が形成され所得が増加してくるに従って消費や実質貨幣残高も増加してくるような調整をとる。これは，名目貨幣供給量(特に外部貨幣)の増加率が，永続性をともなったショックとなり得ることを意味するものでもある。

(2) モデルの中で時間選好率を内生化すると，実物的景気循環理論の議論が成り立たなくなる可能性があることを証明した。この理由は，異時点間の代替の効果の他に，生産性の増加が実質金利を上昇させ，これが家計の定常消費水準を増加させる効果が働くからである。

なお，完全予見に基づく本稿の結論は，貨幣はスーパーニュートラルではなく，名目貨幣供給量の増加率（すなわち ψ）を変更する政策は実体経済に対して変動を与え得ることを意味する。従って，たとえ名目貨幣供給量のレベルの変更が中立的であっても，名目貨幣供給量の増加率を変更することによって，有効な金融政策を行うことができるといえる。逆に金融政策の目的が景気変動を押さえることにあるならば，金融当局は名目貨幣供給量の増加率に十分な注意を払う必要がある。その意味で，本稿はマネタリストのk%ルールを再評価するものでもある。

Appendix 1：(20)式の導出

(16)式の両辺に $e^{-\delta_{t-\tau}}$ を掛けて，整理すると

$$(\dot{\phi}_t - \phi_t\rho_t)e^{-\delta_{t-\tau}} = U(c_t, m_t)e^{-\delta_{t-\tau}} \tag{A-1}$$

ここで

$$\frac{d}{dt}(\phi e^{-\delta_{t-\tau}}) = \dot{\phi}e^{-\delta_{t-\tau}} - \phi\dot{\delta}e^{-\delta_{t-\tau}} = (\dot{\phi} - \phi\rho)e^{-\delta_{t-\tau}}$$

に注意して，(A-1)式の両辺を τ 時点から ∞ 時点まで積分すると，

$$\int_\tau^\infty \left\{\frac{d}{dt}[\phi e^{-\delta_{t-\tau}}]\right\}dt = \phi e^{-\delta_{t-\tau}}\Big|_\tau^\infty = \int_\tau^\infty U e^{-\delta_{t-\tau}}dt$$

よって

$$\lim_{t\to\infty}\phi_t e^{-\delta_{t-\tau}} - \phi = \int_t^\infty U e^{-\delta_{t-\tau}}dt$$

結局，収束経路上で $\lim_{t\to\infty}\phi_t e^{-\delta_{t-\tau}}=0$ であることを考えると(30)式の微分方程式の解は以下のように与えられる。

$$\phi_\tau = -\int_\tau^\infty U e^{-\delta_{t-\tau}}dt$$

この式の右辺は τ 時点における代表的な個人の厚生水準にマイナスを掛けたものに他ならない。

Appendix 2：Lemma 1 の証明

固有方程式は，書き換えると

$$\begin{vmatrix} \lambda + C_m\mu_c m^* & C_m\mu_m m^* & -f_{kk}[-C_\sigma\sigma^* + c_m m^*] & -\rho c_\phi \\ \mu_c m^* & \lambda + \mu_m m^* & -m^* f_{kk} & 0 \\ 1 & 0 & \lambda - \rho & 0 \\ -(1+\phi\rho)U_c & -(1+\phi\rho)U_m & 0 & \lambda - \rho \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (\lambda-\rho)[(\lambda + C_m\mu_c m)(\lambda+\mu_m m)(\lambda-\rho) \\
&\qquad -\mu_c m C_m\cdot\mu_m m(\lambda-\rho)+(\lambda+\mu_m m)f_{kk}\{-C_\sigma\sigma + C_m m\} - C_m\mu_m m\cdot m f_{kk}] \\
&\quad +\rho C_\phi[(\lambda-\rho)\mu_c m(1+\phi\rho)U_m + (1+\phi\rho)U_m m f_{kk} - (1+\phi\rho)U_c(\lambda+\mu_m m)(\lambda-\rho)] \\
&= \lambda^4 + (X-2\rho)\lambda^3 + (\rho^2 - 2X\rho + [Yf_{kk} + \{\rho C_\phi\sigma\}])\lambda^2 \\
&\qquad +([\rho C_\phi\sigma Z - (\mu_m m f_{kk} C_\sigma\sigma)] - \rho[Yf_{kk} + \{\rho C_\phi\sigma\}] + X\rho^2)\lambda \\
&\qquad -\rho[\rho C_\phi\sigma Z - (\mu_m m f_{kk} C_\sigma\sigma)] + \rho C_\phi\sigma\mu f_{kk} \\
&= \lambda^4 + (X-2\rho)\lambda^3 + (\rho^2 - 2X\rho + [Yf_{kk} + \{\rho c_\phi\sigma\}])\lambda^2 \\
&\quad +\lambda([\rho c_\phi\sigma Z - (\mu_m m f_{kk} c_\sigma\sigma)] - \rho[Yf_{kk} + \{\rho c_\phi\sigma\}] + X\rho^2) \\
&\quad -\rho[\rho c_\phi\sigma Z - (\mu_m m f c_\sigma\sigma)] + \rho c_\phi\sigma\mu f_{kk}
\end{aligned}$$

ここで

$$X = (C_m\mu_c m^* + \mu_m m^*) < 0$$
$$Y = [-C_\sigma\sigma^* + C_m m^*]$$
$$Z = \sigma[\mu_c m^* - \mu_m m^*] > 0$$

この固有方程式について，Routh's scheme (Gantmacher(1964), vol.2, p177-p181 参照) は，以下のように書くことができる。

$$\begin{array}{lll}
1 & (\rho^2 - 2X\rho + [Yf_{kk} + \{\rho c_\phi\sigma\}]) & -\rho[\rho c_\phi\sigma Z - (\mu_m m f_{kk} c_\sigma\sigma)] + \rho c_\phi\sigma\mu f_{kk} \\
X-2\rho & [\rho c_\phi\sigma Z - (\mu_m m f_{kk} c_\sigma\sigma)] - \rho[Yf_{kk} + \{\rho c_\phi\sigma\}] + X\rho^2 & 0 \\
b_1 & b_2 & \\
c_1 & & \\
d_1 & &
\end{array}$$

ここで，

$$b_1 = \{-2X\rho(X-2\rho)+(X-\rho)Q-2\rho^3-\Omega\}/(X-2\rho)$$
$$b_2 = -\rho\Omega+\rho c_\phi\sigma\mu f_{kk}<0$$
$$c_1 = \{b_1(\Omega-\rho[Yf_{kk}+\{\rho c_\phi\rho\}]+X\rho^2)-[X-2\rho]b_2\}/b_1$$
$$d_1 = -\rho\Omega+\rho c_\phi\sigma\mu f_{kk}<0$$
$$\Omega \equiv [\rho c_\phi\sigma Z-(\mu_m m f_{kk}c_\sigma\sigma)]>0$$
$$Q \equiv [Yf_{kk}+\{\rho c_\phi\sigma\}]$$

Routh Theorem（Gantmacher(1964),vol.2, p180 参照）より，この左端の多項式の流列の負号が変化した回数だけ，多項式は正の実部の根を持つ。

ここで固有方程式の定数項はマイナスであるから，この多項式は１つもしくは３つの実部が負の固有根をもつ。

ここで，実部が負の固有根の数が３であると仮定しよう。このとき正の実部を持つ固有根は１つである。ここで $X-2\rho<0$ であるから，Routh Theorem から，これ以上第一列の数列の負号が変化することはない。従って $b_1<0$ で，$c_1<0$ でなければならない。

(i) $Q>0$ の時，b_1 の分子が負であることがわかるから，$b_1>0$ であることがわかる。これは，仮定の下での Routh Theorem の結果に矛盾する。

(ii) $Q<0$ の時，この条件だけでは $b_1<0$ はいえない。従って，これを満たすためには，$(X-\rho)Q>\Omega+2X\rho(X-2\rho)+2\rho^3$ の条件を満たさなければならない。

すなわち，

$$-Q>\{\Omega+2X\rho(X-2\rho)+2\rho^3\}/(\rho-X) \tag{A-2}$$

が成り立っている。

ところでこの時 $c_1=(\Omega-\rho Q+X\rho^2)-[X-2\rho](b_2/b_1)$ について，(A-2)を使うと c_1 の第１項は

$$\begin{aligned}
\Omega-\rho Q+X\rho^2 &> \Omega+\rho\frac{\Omega+2X\rho(X-2\rho)+2\rho^3\}}{(\rho-X)}X\rho^2 \\
&= \Omega+\rho\frac{\{\Omega+2X^2\rho-2X\rho^2-2X\rho^2+2\rho^3\}}{(\rho-X)}+X\rho^2 \\
&= \Omega+\rho\frac{\{\Omega-2X\rho(\rho-X)+2\rho^2(\rho-X)\}}{(\rho-X)}+X\rho^2 \\
&= \Omega+\rho\frac{\{\Omega+2\rho^2(\rho-X)\}}{(\rho-X)}-\rho\frac{2X\rho(\rho-X)}{(\rho-X)}+X\rho^2 \\
&= \Omega+\rho\frac{\Omega}{(\rho-X)}+2\rho^3-X\rho^2>0
\end{aligned}$$

となるから，$b_1<0$ が満たされるとしても，

$$c_1=(\Omega-\rho Q+X\rho^2)-[X-2\rho](b_2/b_1)>0$$

これは，Routh の Theorem の結果に矛盾する。

よって，実部が負の単位根はただ一つであることがわかる。 **Q.E.D**

Appendix 3

Strotz（1957）が提案した time consistency の概念は，「0時点から見て，t 時点より以前の異なる複数時点（たとえば$0 \leqq s, s' < t$，ここで $s' \neq s$）から見た t 時点の最適計画は一致していなければならない」というものである。Strotz（1957）は，$\lambda(t)$ を割引因子関数として，time consistent であるための必要十分条件を次のように書いている。

$$\frac{d}{dt}\ln\lambda(t) = constant \quad 0 \leq t \leq T \tag{A-3}$$

しかし，この記述のため，time consistency の条件は誤解を受けやすい。time consistent であるための条件は割引因子 $\lambda(t)$ が任意の時点 t について常に一定であることではなく，t 時点の割引因子の時間変化率が t 以前の任意の時点で見て一定であることにすぎない。従って連続時間で考える場合，関数が指数関数の形で書かれれば time consistent であるといえる。念のため，このことを確認しておこう

（A-3）式の条件を導いたもともとの条件は Strotz（1957）の中では以下のように書かれている。

$$\frac{\dfrac{d\lambda(t-s)}{dt}}{\lambda(t-s)} = \frac{\dfrac{d\lambda(t-s')}{dt}}{\lambda(t-s')} \tag{A-4}$$

それぞれの λ に Uzawa（1968）の内生的な時間選好率を取り入れた割引因子関数を代入すると，任意の $0 \leqq s, s' < t$，$s' \neq s$ に関して

$$\text{上式左辺} = \frac{de^{-\delta_{t-s}}/dt}{e^{-\delta_{t-s}}} = -\rho(U(c_t, m_t)), \qquad \text{右辺} = \frac{de^{-\delta_{t-s'}}/dt}{e^{-\delta_{t-s'}}} = -\rho(U(c_t, m_t))$$

よって，左辺＝右辺で，（A-4）式の条件を満たす。従って Uzawa（1968）の内生的時間選好率関数は Strotz（1957）の意味で time consistent であるといえるのである。

Uzawa 自身も「時間に関して整合的」である条件を満たすものとして，この内生的な時間選好率関数を提案している（参考文献，日本語版99ページ参照）。

参 考 文 献

Barro, R.J. and R.G. King, 1984, "Time-Separable Preference and Intertemporal Substitution Model of Business Cycle," *Quarterly Journal of Economics* 99, pp.827-839.

Brock, W.A., 1974, "Money and Growth: The Case of Long Run Perfect Foresight," International Economic Review, 15, pp.750-77.

Bernanke, B. and M. Gertler, 1989, "Agency Costs, Net Worth, and Business Fluctuations," *American Economic Review* 79, pp.14-31.

Calvo, G.A., 1979, "On Model od Money and Perfect Foresight," International Economic Review 20, pp.83-103.

Croushore, D., 1993, "Money in the Utility Function; Functional Equivalence to a Shopping-time

Model," *Journal of Macroeconomics* 15, pp.175-182.
Evans, C.L., 1992, "Productivity Shocks and Real Business Cycle," *Journal of Monetary Economics* 29, pp.191-208.
Feenstra, R.C., 1986, "Functional Equivalence between Liquidity Cost and the Utility of the Money," *Journal of Monetary economics* 17, pp.271-291.
Gantmacher, F.R., The Theory of Matrices, vol.2 New York: Chelsea Publishing Company.
Gomme, P., 1993, "money and Growth revisited;measuring the cost inflation in an endogenous growth model," *Journal of Monetary Economics* 32, pp.51-77.
Greenwald, B.C. and J.E. Stiglitz., 1991, "Financial Market Imperfections and Business Cycles," mimeo.
King, R. and C. Plosser, 1984, "Money, Credit, and Prices in a Real Business Cycle," *American Economic Review* 74, pp363-380.
King, R., C. Plosser and S. Rebelo, 1988, "Production, Growth and Business Cycle I. The basic Neoclassical Model," *Journal of Monetary Economics* 21, pp195-232.
King, R. and Watson, M.W., 1992, "Testing Long Run Neutrality", *National Bureau of Economic Research, working Paper* No. 4156
Kydland, F. and E. Prescott, 1982, "Time to Build and Aggregate Fluctuations," *Econometrica* 50, 1345-1370.
Nelson, C. and C. Plosser,1982, "Trend and Random Walks in Macroeconomic Time Series: Some Evidence and Implications," *Journal of Monetary Economics* 10, 139-62.
Obstfeld, M., 1981 "Macro Economic Policy, Exchange-Rate Dynamics, and Optimal Asset Accumulation" *Journal of Political Economy*, 89, pp.1142-1161.
Obstfeld, M., 1988, "Exchange-Rate Dynamics, and Optimal Asset Accumulation Revisited," *NBER Technical Paper* #64.
Ono, y., 1992, "Who's Afraid of the General Theory ?," mimeo（日本語版，『貨幣経済の動学理論 ケインズの復権』東京大学出版会1992.）
Plosser, C., 1989, "Understanding Real Business Cycle," *Journal of Economic Perspective* 3, pp51-77
Ramey, V.A., 1992, "The source of Fluctuations in Money: Evidence from trade credit," *Journal of Monetary Economics* 30, pp171-193.
瀬下博之，1994，「貨幣と成長――修正 Sidrauski Model と景気変動への Implication」慶應義塾大学1993年度修士学位論文
Sidrauski, M., 1967, "Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy," *American Economic Review* 57, pp.534-44.
Strotz, R.H., 1957, "Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization," *Review of Economic Studies*, 23, pp165-180.
Tobin, J., 1965, "Money and Economic Growth," *Journal of Political Economy* 75, pp671-84.
Uzawa, H., 1968, "Time Preference, the Consumption Function, and Optimum Asset Holdings," *In Value, Capital, and Growth: Papers in Honor of Sir John Hicks*, edited By J.N.Wolfe. Chicago: Aldine（日本語版『経済解析 基礎篇』岩波書店，1990.）
Wang, P. and C.K. Yip, 1992, "Alternative Approaches to Money and Growth," *Journal of Money, credit, and Banking* 24, 553-562.
Weber, A.A.,1994, "Testing Long-run Neutrality: Empirical evidence for G7-countries with Special Emphasis on Germany", Carnegie-Rochester *Conference Series on Public Policy*, 41, pp.67-117.

（経済学部研究助手）