Title	非線形性のテスト : 多変量の場合
Sub Title	Testing nonlinearity : multivariate case
Author	伊藤, 幹夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1997
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.89, No.4 (1997. 1) ,p.582(44)- 589(51)
JaLC DOI	10.14991/001.19970101-0044
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19970101-0044

「三田学会雑誌」89巻4号（1997年1月）

非線形性のテスト：多変量の場合

伊　藤　幹　夫*

1　序

最近10年間，経済時系列に関して，単位根や共和分を中心に多くの研究がなされてきた。こうした研究は，経済時系列データの特性に関する情報を獲得するのに役立つのにとどまらず，既存の同時方程式で表現される計量経済モデルの推定理論についても大きな進歩をもたらした。これらの研究は，基本的に線形モデルを想定した場合の非定常時系列を扱っている。しかし，経済理論において純粋な線形の理論をさがすことは難しいし，多くの経済学者は経済システムに，非線形性はつきものであると考えている。

といっても，非線形モデルを用いる前に，データに非線形があるかどうかを確かめるのは，自然であろう。扱いやすい線形モデルで現実を十分に分析ができるとき，非線形モデルに固執するのは得策ではない。そこで，扱うデータを説明するモデルとして線形モデルが適当か，あるいは非線形モデルが適当かを判定する，手続きが必要となる。

これまで，1変数時系列に対して，多くの非線形性のテストが考案され，マクロ経済データに対して適用された。例えば，Ashley and Patterson (1989)，Teräsvirta and Anderson (1992) は，マクロ経済データのかなりの部分に非線形が見出されるとしている。

これまで発表された非線形性のテストは，Granger and Teräsvirta (1993) がまとめたように，とくに非線形モデルを特定化することなく，検定統計量を構成するRESETタイプの検定や周波数領域でのbispectrumにもとづく検定と，非線形モデルを特定した上で，検定を構成するタイプの検定がある。前者のいくつか検定は，ある非線形モデルを対立モデルとしたときのscore検定あるいはLagrange乗数検定とみなせる。

Pagan (1978) が指摘するように，後者のタイプの検定にしても，基礎となる非線形モデルを直

*　神谷傳造教授から有益なコメントをいただいた。

接推定することなく，score 検定あるいは Lagrange 乗数検定を構成して，十分な検出力をもたせることができる場合がある。実際，1変量の時系列に関する既存の非線形性のテストをモンテカルロ実験で比較した Lee-White-Granger (1993) によれば，さまざまな非線形 data generation process (以下 DGP) に対して，非線形モデルを基礎とする検定も含めて，どの検定も十分な検出力を持つ。

この論文では，Lagrange 乗数検定により十分な検出力をもった非線形性のテストを多変量時系列データに対して構成する。この論文で扱うテストは Ozaki (1985) の ESTAR (exponential smooth transition autoregression) モデルを多変量に拡張して，検定統計量を構成するものである。なお，ESTAR モデルは，非線形構造に線形モデルが入れ子になっており，帰無仮説（線形性）の下で，対立仮説（非線形性）に関するパラメターが識別されない。よって，通常の漸近的方法にもとづく尤度比検定や $C(\alpha)$ 検定などが直接適用できない。このために，Davies (1977) による検定統計量の構成法を1変数の線形性テストに応用した Tsay (1986) の方法を，この論文でも直接踏襲する。

第2節では，ベクトル非線形性の定義をのべ，非線形の DGP が生成したデータに対して線形モデルをあてはめたときの問題を，2変数の場合についてシミュレーションによって明らかにする。第3節では，ベクトル ESTAR モデルを用いた検定を提示する。第4節は，まとめである。

2　多変量時系列における非線形性の意味

この論文で，線形性というとき，Lee-White-Granger (1993) のいう条件付き期待値に関する線形性を考える。これは，$\{y_t\}$ をベクトル確率過程，$\{X_t\}$ を y_t のラグつきの値や定数なども含むかもしれないベクトル過程という設定で次のように定義される。

定義1　y_t は X_t の条件のもと期待値に関して線形とは，

$$(\exists\,\theta^* \in \mathbf{R}^K)\ P[E(y_t|X_t) = X_t'\theta^*] = 1 \qquad (1)$$

であることをいう。

なお，ARCH (autoregressive conditional heteroscedastic) である確率過程には，この意味で線形なものがあるかもしれない。実は，ARCH かどうかは条件付き期待値には依存しないからである。線形性が問題となるのは，どちらかというと予測に関してである。定義1からわかるように，時系列が条件付き期待値について線形でないとき，線形モデルの予測が期待値からはずれる確率がゼロでなくなる。

この論文では，ベクトル時系列を扱う。この論文で扱う非線形テストに用いられるものと類似のベクトル ESTAR が真の DGP であるとき，VAR モデルで推定するとどうなるかを示す。

用いた，ESTAR モデルは，以下のものである。

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + (1 - e^{-\alpha(x_{t-1}^2 + y_{t-1}^2)}) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{4}{5} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{t-1}^x \\ u_{t-1}^y \end{pmatrix} \tag{2}$$

ここで，$\alpha > 0$。撹乱項は，

$(u_{t-1}^x, u_{t-1}^y)' \sim NID(0, 4I)$

とする。

これは，定常 VAR モデル

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{t-1}^x \\ u_{t-1}^y \end{pmatrix} \tag{3}$$

と非定常 VAR モデル

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{t-1}^x \\ u_{t-1}^y \end{pmatrix} \tag{4}$$

を「重ね合わせた」ものである。(3)右辺の係数行列は ESTAR モデル（2）の右辺第 1 項と第 2 項の係数行列の差であり，固有値は $(25 \pm i\sqrt{95})/40$ となる。その絶対値は 1 より小さい。(4) の右辺第1項の係数行列の固有値は，$(5 \pm i\sqrt{7})/4$ であり，その絶対値は 1 より大きい。大雑把にいうと，(x_t, y_t) の原点からの距離が大きいときは主に前者の定常 VAR に従い，(x_t, y_t) の原点からの距離が十分ゼロに近いときには主に後者の非定常 VAR に従う(1)。以上のベクトル版の ESTAR モデルは Ozaki (1985) を拡張したものであり，同様のモデルは，Granger and Teräsvirta (1993) でも提示されている。

表 1　VAR (1) の係数行列の推定値と残差の共分散行列

	X	Y
X	0.0418	0.6147
	(0.244)	(0.000)
Y	−1.3604	1.5392
	(0.000)	(0.000)

	u_t^x	u_t^y
u_t^x	10.9137	10.1820
u_t^y	10.1820	12.2891

(注)　左側の表の括弧内はＦテストのｐ値である。

このモデルにおいて，初期値を $(-15, -21)$ とするとき，撹乱項を除いた場合と撹乱項を加えた場合のシミュレーションを $t=1$ から $t=50$ までおこなった結果の散布図を，それぞれ図 1 と図 2 に示す。撹乱項がないときは，連続力学系における極限閉軌道同様，一定の周期に落ち着き，撹乱項があるときには，前者の閉軌道への摂動を加えたものになっていることがわかる。

(1)　ESTAR のような非線形時系列モデルには，VAR モデルにあるような係数行列の固有値の大きさから定常・非定常を判定する簡単な規準は存在しない。

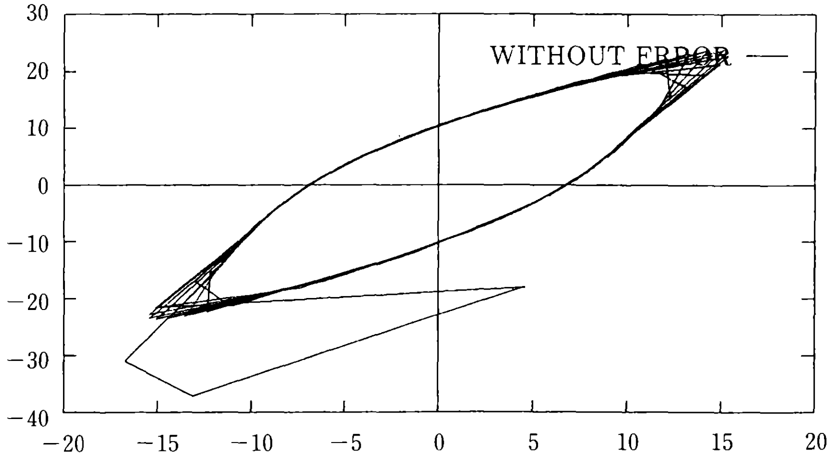

図 1　ESTER モデルの挙動（攪乱項なし）

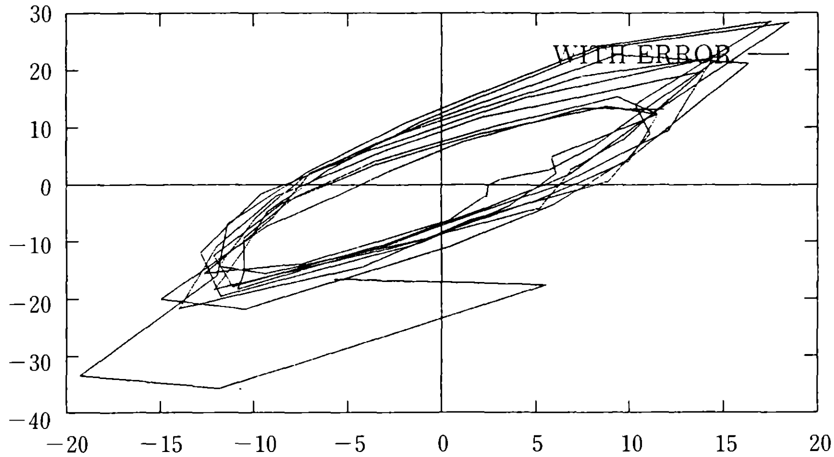

図 2　ESTER モデルの挙動（攪乱項あり）

さて，経済データとしてありそうな標本サイズを考え，上記の第 2 のシミュレーションによって得られた標本サイズ300のシミュレーションデータに対して，VAR(1)をあてはめて係数行列を推定すると，表 1 に示す結果が得られる。推定された行列は，一見して（3）や（4）の行列のどちらとも近くないしそれらの単純な線形結合とも近くない。一方係数行列の固有値は，近似的に $0.7487 \pm i\sqrt{0.4597}$ で絶対値は0.8786となり，安定行列であることを示している。また，本来の攪乱項に関してはゼロであった共分散が，かなり大きな値に推定されている。また，第 1 変数 x に関する残差のヒストグラムを図 3 に示すが，一見して正規性をもちそうもない。なお，図 3 の横軸は階級の番号で，最小値−8.42399から最大値12.75016までを，スターリングの公式に従って，9 階級に分けてある。

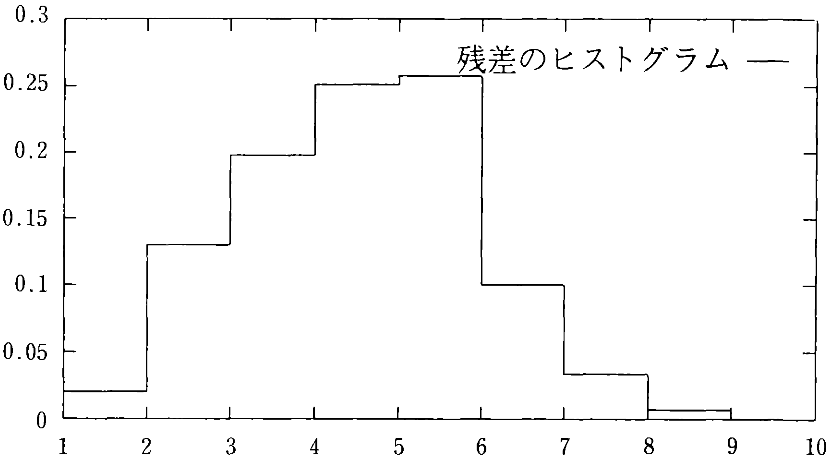

図 3　残差のヒストグラム

以上の結果は，Blatt (1978) がおこなった 1 変数の時系列に関する同種のシミュレーションを 2 変数に拡張したものともいえる。それが示唆することも同様である。つまり，非線形 DGP のデータに対して，単純な線形モデルを適用することに問題があるかもしれないことを示唆している。(2)

3　検定手続

この節では，多変量の ESTAR (exponential smooth transition autoregression) モデルを定義し，それを用いて 1 変数の場合の線形性と同様の検定手続きを示す。

$\{y_t\}$ を K 次元として次の式の確率過程にしたがうとする。

$$y_t = Ay_{t-1}+F(y_{t-1}, \gamma, \alpha, c)By_{t-1}+u_t \tag{5}$$

ここで，A, B は $K\times K$ 行列。撹乱項 u_t は $NID(0, \Sigma)$ に従うとする。また，F は

$$F(y_{t-1}, \gamma, \alpha, c) = 1-e^{-\gamma(\alpha' y_{t-1}-c)^2} \tag{6}$$

なる実数値関数である。なお以下，y_t の第 i 要素を $y_{i,t}$ と記す。

α は $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ であるように要素のうち，ただ一つの要素が 1 でそれ以外がゼロとなる K 次元ベクトルである。ただし，後に推定に際してどの要素が 1 になっているかは未知であると考える。つまり，前節における ESTAR モデルで，定常の phase と非定常の phase を切り替えるのが，y_{t-1} の原点からの距離であったのが，y_{t-1} のある単一の要素がその切り替えを司ると考え，

(2)　ただし，線形 DGP によるデータを非線形 DGP から生成されていると判断してしまう可能性を，Granger, C.W. J and T. Terävista (1993) が指摘している。

さらにそれが推定の際未知であると考える。なお観察期間を T とする。[3]

このESTARは非線形時系列モデルであるが，入れ子の形で線形モデルとしてのVAR(1)が含まれている。よって，$\gamma=0$ の場合は普通のVAR(1)モデルとみなされる。このことを使って線形性のテストをおこなうわけである。問題は，帰無仮説を

$$H_0: \gamma = 0 \tag{7}$$

とおいたとき，この帰無仮説のもとで B, α, c が識別されないという点にある。よって，通常の漸近理論による尤度比検定などを直接用いることはできない。そこでDavies (1977) による手続きを，Granger and Teräsvirta (1993) にならって，ここでも踏襲する。

まず，t 時点における条件つき対数尤度をもとめると，

$$\ell_t = -\frac{K}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln|\Sigma| - \frac{1}{2}u'_t\Sigma^{-1}u_t \tag{8}$$

となる。B, α, c を固定して考えて，

$$\left.\frac{\partial \ell_t}{\partial A}\right|_{\gamma=0} = \Sigma\tilde{u}_t y'_{t-1} \tag{9}$$

を求める。右辺は $K\times K$ 行列である。ここで

$$\tilde{u}_t = y_t - Ay_{t-1}$$

つぎに，繁雑な計算であるが

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \ell_t}{\partial \gamma}\right|_{\gamma=0} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\gamma}u'_t\Sigma^{-1}u_t\Big|_{\gamma=0} \\ &= u'_t\Sigma Z_t\end{aligned} \tag{10}$$

をもとめる。

ただし，Z_t は K 次元ベクトルで，その第 k 要素 z_{kt} が

$$z_{kt} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\phi_{ij}^{k}y_{i,t-1}y_{j,t-1}^{2} + \sum_{i\geq j}^{K}\varphi_{ij}^{k}y_{i,t-1}y_{j,t-1} + \sum_{j=1}^{K}\varphi_{j}^{k}y_{j,t-1} \tag{11}$$

と表現される。これは，Luukkonen, Saikkonen and Teräsvirta (1988) とほとんど同様で，

$$\phi_{ij}^{k} = \alpha_i a_{kj},\ i, j, k = 1, \ldots, K, \tag{12}$$

$$\varphi_{ij}^{k} = -2c(\alpha_i a_{kj} + \alpha_j a_{kj}),\ i, j, k = 1, \ldots, K, \tag{13}$$

$$\varphi_{j}^{k} = c(ca_{kj} - 2\alpha_j),\ j=1, \ldots, K \tag{14}$$

なお，a_{ij} は係数行列 A の ij 要素である。これにより，補助回帰式の独立変数のリストが定まる。

(3) 一般化はもちろん可能であるが，最終的な残差を使った検定統計量の構成の段階でVolterra展開に帰着させる限り，それほど結果に変更はないと思われる。ただし検定の際の χ^2 分布の自由度に関係があるかもしれない。

われわれは H_0 のかわりに

$$H_0': \phi_{ij}^k = 0, \quad i, j, k = 1, ..., K; \quad \varphi_{ij}{}^k = 0, \ j, k = 1, ..., K, \quad i = j, ..., K \tag{15}$$

を用いて検定を行う。

再び，Luukkonen, R., Saikkonen, P. and Teräsvirta (1988) 同様次の手続きを求めることにより Lagrange 乗数検定を行うことができる。

（i） まず，VAR(1) を $\{y_t\}$ にあてはめた残差

$$\hat{u}_t = y_t - \hat{A}y_{t-1} \tag{16}$$

について，

$$SSR_0 = \sum_t \hat{u}'_t \hat{u}_t \tag{17}$$

を計算する。

（ii） 次に，前のステップで得たベクトルデータ $\{\hat{u}_t\}$ に対して，以下の式に基づいてパラメター推定を行う。

$$u_{k,t} = \beta'_k y_{t-1} + \sum_i \sum_j \phi_{ij}^k y_{i,t-1} y_{j,t-1}^2 + \sum_{i \geq j}^K \varphi_{ij}^k y_{i,t-1} y_{j,t-1} + v_{k,t}, \qquad k = 1, ..., K \tag{18}$$

その残差 $\hat{v}_{k,t}$ の二乗和を

$$SSR = \sum_k \sum_t \hat{v}_{k,t}^2 \tag{19}$$

とおく。

（iii） 検定統計量を

$$LM^* = \frac{T(SSR_0 - SSR)}{SSR_0} \tag{20}$$

を計算する。

上の検定統計量が，H_0' の下で Lagrange 乗数検定統計量として漸近的に，自由度 $K^3 + K^2(K+1)/2$ の χ^2 分布に従うことがわかっている。実際，ここで構成した検定は，Tsay (1986) が Volterra 展開を基礎にして考えた線形性のテストを，多変量に拡張した形になっている。

ま と め

この論文では，まず極限閉軌道を持つ連続系の力学系に類似する動きをする離散モデル，ベクトル ESTAR モデルを用いて，多変量の場合でも線形性のテストが重要であろうことを，簡単なシミュレーションで示した。その後，既存の 1 変数時系列データに対する線形性のテストを，多変数時系列のそれに拡張する試みをおこなった。その検定の構成は，基本的に Volterra 展開を用いたものとなってしまうが，ESTAR モデルを基礎とした Lagrange 乗数検定と解釈出来るものである。その意味では，既存の線形性のテストの直接的拡張である。

残された問題として，経済時系列データの多くは非定常であるのに，ここではデータの定常性を

仮定していることである。１変量の場合は，単位根検定を行なった上で，適当な回数だけ残差をとって定常化すればそれほど問題はないかもしれない。しかし，多変数の場合，変数間に共和分の関係があると話はやっかいである。その場合，定常化の手続きには共和分の関係を調べなくてはならない。つまり，線形性をテストするために，予備的な共和分検定が必要になる。経済時系列のように主要経済変数同士が共通トレンドをもつ場合，単純なベクトル版のESTARではなく，入れ子になる線形モデルがECM（error correction model）を考慮したsmooth transitionモデルを基礎に線形性のテストを考えるべきかもしれない。その意味で，ここで提示された線形性のテストは，かなり限られた意味しかないと考えるべきであろう。

参考文献

Ashley, R.A. and D.M. Patterson (1989) Linear versus Nonlinear Macroeconomics: a statistical test, *International Economic Review*, **30**, p.685-704.

Blatt, J.M. (1978) On the Econometric Approach to Business Cylcle Modeling, *Oxford Economic Papers*, **20**, p.292-300.

Davies, R.H. (1977) Hypothesis Testing when a Nuisance Parameter is present only under the Alternative, *Biometrika*, **80**, p.220-7.

Granger, C.W.J and T. Terävista (1993) *Modeling Nonlinear Economic Relationships*, Oxford University Press, Oxford.

Lee Tae-Hwy, H.White and C.W.J. Granger (1993) Testing for Neglected Nonlinearity in Time Series Models: A comparison of neural network methods and alternative tests, *Journal of Econometrics*, **56**, p.269-90.

Luukkonen, R., Saikkonen, P. and Teräsvirta (1988) Testing Linearity against Smooth Transition Autoregressive Models, *Biometrika*, **75**, p.491-99.

Ozaki, T. (1985) Non-linear Time Series Models and Dynamical Systems, in *Handbook of Statistics*, **5**, *(ed. E.J. Hannan, P.R. Krishnaiah, and M.M. Rao)*, North-Holland.

Pagan, A.R. (1978) Some Simple Tests for Non-linear Time Series Models, *CORE Discussion Paper*, **No. 7812**,.

Terävista, T. and H.M. Anderson (1992) Characterizing Nonlinearities in Business Cycles using Smooth Transion Autoregressive Models, *Journal of Applied Econometrics*, **7**, S119-S139.

Tsay, R.S. (1986) Nonlinearity Tests for Time Series, *Biometrika*, **73**, p.461-6.

（経済学部助教授）