Title	未知変数の存在が経済システムの計測にもたらす問題
Sub Title	Some problems in econometric measurement under the existence of unknown variables
Author	秋永, 利明
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1996
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.89, No.3 (1996. 10) ,p.486(148)- 494(156)
JaLC DOI	10.14991/001.19961001-0148
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19961001-0148

「三田学会雑誌」89巻3号（1996年10月）

研究ノート

未知変数の存在が経済システムの計測にもたらす問題*

秋　永　利　明

心理的·社会的要因のような非経済要因も，経済システムに関わっている。そのような要因が未知だからといって，それを無視して作ったモデルは，予測では成功しても政策シュミレーションには使えない。これは，パラメタ不変の下で起こる事態であり，Lucas 批判とは別の理由によるものである。

1. 序

経済活動は，人間の営みである。単なる，物品・財貨の生成流転ではない。その背後には必ず，人間の精神的営為や社会的連繫が存在する。にもかかわらず，計量経済モデルの中にこのような心理的・社会的要因を直接に表す変数が現れることはあまりない。これは，奇妙な傾向であるといわざるを得ない。だが，このような傾向が生ずるのにも，もっともな理由がある。

第一に，心理的・社会的変数の計測が事実上不可能であることが挙げられる。心理学・社会学は経済学以上に未成熟であり，計量的アプローチが十全なものになっていない。さらには，経済システムに関わる心理的・社会的要因の概念自体が確立しておらず，計るべき対象が何であるかさえ解らないことがしばしばである。たとえこれらの困難がクリアされたとしても，計測にかかる費用や時間は多くの場合，膨大なものになるだろう。しかし，この第一の理由は消極的なものであり，なんら「奇妙な傾向」を正当化するものではない。これだけの理由ならば，その困難を克服しようとする潮流が現れるはずである。経済学のメインストリームの中にこういった流れが見られないのは，「奇妙な傾向」を正当化する第二の理由があるからである。

おそらく大部分の経済学者は，経済システムにとって本質的な心理的・社会的要因は，全て経済変数とその函数上の連関の中に集約されていると考えているだろう。この考えは，ある意味では正しい。その限りにおいて，経

* 慶應義塾大学の神谷傳造教授、伊藤幹夫助教授から有益な助言を頂いた。ここに深く感謝の意を表す。

済変数のみからなる計量モデルを使って研究を進めていくことは，正当化される。しかし，その正当化はモデルの中の内生変数の振る舞いを，他においては条件一定という所謂ceteris paribus条項の下で，受動的に予測する場合に限られる。能動的にモデルの中のある変数を操作するとき，つまり政策シュミレーションを行う場合や，かつて観測されたことのなかった種類の外生的ショックの効果を知りたいのなら，モデルの中に明示的に現れない要因についての配慮が不可欠になる。

Lucasはその有名な批判［3］の中で，予測において成功を収めていた計量モデルが政策シュミレーションには使えなくなる事態があることを明確に意識し，計量経済学の手法に批判的考察を加えた。彼は，政策の発動が経済主体の意志決定に影響を与え，パラメタの変動を引き起こすと考えた。従って，過去時点で推定された計量モデルは，政策が発動されてからは経済実態から乖離してゆくことになる。前述の文脈に従って言えば，主体の意志決定方式という計量モデルの背後に潜む要因を考慮に入れる必要が出てくる。そこで，Lucas批判をかわすための常套手段として，意志決定メカニズムのモデル化が行われることになる。Lucasが問題にしているのはパラメタの変動であるから，その動学的定式化さえできれば良い。パラメタ変化と政策変数をつなぐ，行動科学的因子を導入する必要はない。ここでもやはり，未知要因は既知の経済変量のみから成るモデルの中に集約できる，という考えが支配している。

しかし，このような集約が成功したのは問題の核心がパラメタの変化にあったからである。私がこれから指摘しようとする問題は，研究対象が安定していてパラメタが一定であるときに起こる問題である。未知要因の集約が可能かどうかが問題なのではない。経済変数のみからモデルを作れば，他の要因は自動的にモデルの中に集約されてしまう。問題は，その集約により経済構造が歪められた形で姿を現すことにある。受動的予測に徹している限り，その歪みに気付くことはない。それが露呈するのは，政策変化のようなかつて起こらなかった類のショックが加えられたときである。

2. 線形動学方程式体系における説明

経済の真の構造が，次の線形式で表されると仮定する。[(1)] 但し，yは研究の対象となっている経済変数を，xは心理変数のような未知の要因を表すベクトルである。[(2)] 添字のtは期を示し，Lはそれに作用するラグオペレーターである。[(3)] 右辺のϵは，攪乱要因を表す確率変数である。[(4)] 左辺に現れる大文字のギリ

（1） お望みならばこの式を，完備線形同時方程式とかDGPと呼んでもかまわない。

（2） 1式に定数項は表れないが，y，xを平均からの偏差と解釈すれば一般性は失われない。

（3） 例えば，$Ly_t = y_{t-1}$である。

（4） 普通は，i.i.d.が仮定される。攪乱項がもつべき性質は推定手法に応じて決まってくるもので，この段階ではあまり問題でない。ここで大切なのは，1式が真の構造を表しているということだけである。

シャ文字は係数行列であり，Lに依存した形で書かれているのは，その成分がラグ多項式になっていることを示している。

$$\begin{bmatrix}\Phi(L) & \Psi(L)\\ \Theta(L) & \Xi(L)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_t\\ x_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\epsilon_{1,t}\\ \epsilon_{2,t}\end{bmatrix} \tag{1}$$

この式が真の構造を表しているというのは，その係数と撹乱項の確率的性質から，経済学者がyについて知ろうとしていることの全てが得られる，という意味である。[5] 1式の上半分，つまり次の式はyの生成メカニズムを表すものとする。

$$\Phi(L)y_t + \Psi(L)x_t = \epsilon_{1,t} \tag{2}$$

経済学者が知ろうとしているyの要素間の相互連関は，$\Phi(L)$の中に完全に表されている。下半分にあたる次の式は，xの生成に関するものである。[6]

$$\Theta(L)y_t + \Xi(L)x_t = \epsilon_{2,t} \tag{3}$$

ここでの$\Theta(L)$は，経済変数yが未知変数xの生成に与える影響を示すものであり，第一義的には経済学者の関心事にならない。これだけのことを仮定して，[7] 経済学者が一般にやっていることの意味を探っていこう。

経済学者はまず始めに，構造方程式と呼ばれる次のような形の式を組み立てる。

$$A(L)y_t = u_t \tag{4}$$

これは通常，経済理論から導出される。経済理論は$A(L)$の中のゼロ成分の位置や符号の正負を定めるだけで，具体的な数値はデータから推定する必要がある。そのためには，4式をyについて解いた形にする必要がある。これが，誘導形と呼ばれる次の式である。

$$y_t = B(L)y_t + A_0^{-1}u_t \tag{5}$$

但し，$A(L)\equiv A_0 + A_1L + A_2L^2 + \cdots$で，$B(L)\equiv A_0^{-1}(-A_1L-A_2L^2-\cdots)$である。もし$A_0^{-1}u_t$がある好ましい性質を持っていれば，それに応じて好ましい性質を持った$B(L)$の推定値が得られる。更に識別条件と呼ばれる条件が満たされれば，$B(L)$の推定値から$A(L)$の推定値が求められる。この推定値によって，経済変数yの相互依存関係を知ろうとするのが，計量経済学における一般的な手法である。[8]

このとき経済学者は，xという要因を考慮に入れていない。というよりも，彼らは変量xの存在に気づいていない（というのが，xの定義である）。それにも関わらずxがyの生成に関与しているならば，つまり$\Psi(L)\neq O$ならば，上述の一般的な手法は如何なる情況に陥るのだろうか。それを知るためには，1式からxを消去してみれば良い。1式の下半分3式を次のように変形する。

---

(5) 従って，式1が具体的にどのようなものになるかは，経済学者が何を知ろうとしているかに依存する。このような語用法によって，私は，構造とは何を意味するかとか真の姿とは何かといった問題に立ち入ることを避けているのである。

(6) $\Phi(L)$, $\Xi(L)$は正方行列である。

(7) 逆行列・逆変換の存在は，後の必要に応じて，暗黙に仮定する。

(8) これから指摘する，この一般的手法の問題点は，推定法や識別条件の誤りに起因するものではない。あくまでも，母概念の世界の中での問題である。

$$x_t = -\Xi(L)^{-1}\Theta(L)y_t + \Xi(L)^{-1}\epsilon_{2,t} \quad (6)$$

これを上半分の式2に代入して，整理すると次の式になる。

$$[\Phi(L)-\Psi(L)\Xi(L)^{-1}\Theta(L)]y_t$$
$$=[I \quad -\Psi(L)\Xi(L)^{-1}]\begin{bmatrix}\epsilon_{1,t}\\ \epsilon_{2,t}\end{bmatrix} \quad (7)$$

もし $[\epsilon'_{1,t},\ \epsilon'_{2,t}]$ がホワイトノイズならば，7式の右辺は純粋確率過程になるから，Woldの定理によりVMA表現が存在する。[9] それを　$M(L)e_t \equiv e_t + M_1e_{t-1} + M_2e_{t-2}\cdots$ で示す。[10] すると次のような表現が得られる。

$$[\Phi(L)-\Psi(L)\Xi(L)^{-1}\Theta(L)]y_t = M(L)e_t \quad (8)$$

興味深いのは，$M(L)$ が反転可能な場合である。このとき8式は，次のように書き換えられる。

$$M(L)^{-1}[\Phi(L)-\Psi(L)\Xi(L)^{-1}\Theta(L)]y_t$$
$$= e_t \quad (9)$$

簡単のため，$\mathscr{A}(L) \equiv M(L)^{-1}[\Phi(L) - \Psi(L)\Xi(L)^{-1}\Theta(L)]$ と置く。両辺に $\mathscr{A}(0)^{-1}$，つまりラグオペレーターのかかっていない（Lに関して定数である項から成る）係数行列の逆行列を，左からかけることで y_t について解いた形にもっていける。こうして9式から，次のVAR表現を得る。[11]

$$y_t = -\mathscr{A}(0)^{-1}[\mathscr{A}(L)-\mathscr{A}(0)]y_t + \mathscr{A}(0)^{-1}e_t \quad (10)$$

これは，5と同じ形式をもっている。つまり，$B(L)$ を推定することは $-\mathscr{A}(0)^{-1}[\mathscr{A}(L)-\mathscr{A}(0)]$ を推定することである。識別条件が満たされていれば，ここから4式の $A(L)$ が推定されるが，それは9の係数 $\mathscr{A}(L)$ を推定することと同じである。ところがこれは，本来知ろうとしていた $\Phi(L)$ とは全く別のものである。

3. 予測の成功と制御の失敗

10式は，真の構造を表す1式から数学的変形によって導かれたものだから，y_t の変動を記述するものとしては全く正しいものである。撹乱項 $\mathscr{A}(0)^{-1}e_t$ がある適当な性質[12]を満たしていれば，10式は好ましい性質をもって推定できる。そして，$\mathscr{A}(0)^{-1}e_t = o$ とおいて得られる差分方程式からは，y_t の将来にわたる動きの最適な予測がえられる。[13] e_t がホワイトノイズならば，撹乱項もホワイトノイズになる。よって，その推定値である残差からは，4・5式の定式化の誤りを示唆するものは認められない。[14] いかなる回帰診断も，変数 x の見落としを検知しないであろう。

10式の係数 $-\mathscr{A}(0)^{-1}[\mathscr{A}(L)-\mathscr{A}(0)]$ は，

(9)　7式の右辺は，係数行列が正方ではないので，VMA形式になっていない。

(10)　もちろん，e はホワイトノイズである。

(11)　この式の右辺に現れる y は，すべて $t-1$ 期以前のものになっている。

(12)　白色性で充分である。

(13)　この予測は，平均自乗誤差を最小化する。

(14)　そもそも，y が4・5の形式に従うことに誤りがあるわけではない。誤っているのはそれらの形式への解釈であり，4式の背後にある経済理論である。

$\Phi(L)$ と $\Psi(L)$, $\Theta(L)$, $\Xi(L)$ が複雑に絡み合って出来上がっている。[(15)] この絡み合いこそが，x を明示的に取り込むことなく y の振る舞いを記述することを可能にしている。確かに，非経済的要因は経済変数のみから成るモデルの中に集約しうるのである。しかし，この集約によって経済変数間の本来の相互連関の姿は，かえって歪められてしまっている。経済システムに直接働きかけることなく，その過去から将来にわたる挙動を受動的に見つめるだけなら，天変地異のような突発的な外的変化でも無い限り，問題は生じない。だが，経済変数の動きを制御しようとするなら，話は別である。

経済変数が二つだけの簡単な場合について考えてみよう。$y'_t = (m_t\ q_t)$ とする。[(16)] 簡単のため，同時点構造は考えない。つまり，$\Phi(0)$ と $\Xi(0)$ は単位行列だとする。$\Phi(L)-I$ の第 $(i,\ j)$ 成分を $\phi_{ij}(L)$ で，$\Theta(L)$ の第 j 列を $\theta_j(L)$ で示す。そして，$\phi_{21}(L)=0$ と $\theta_1(L)=o$ を仮定する。このとき，1式は次のようなものになる。

$$\begin{bmatrix} m_t \\ q_t \\ x_t \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \phi_{11}(L) & \phi_{12}(L) & \Psi(L) \\ 0 & \phi_{22}(L) & \\ o & \theta_2(L) & \Xi(L)-I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_t \\ q_t \\ x_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{1,t} \\ \epsilon_{2,t} \end{bmatrix} \tag{11}$$

経済学者が知ろうとしているのは，m と q の間の因果関係であり，それは11式の係数に表れていると仮定する。[(17)] つまり，q は m の原因であるが m は q の原因にはなっていないとする。[(18)] 実際，m から q へのインパルス応答を計算すると，常に0になっている。

この式を変形して，二変量VAR，つまり式10の形にもっていく。このVARは $(m_t\ q_t)$ の変動を記述するものとしては依然有効である。しかし，政策シュミレーションには使えない。なぜなら，係数 $-\mathscr{A}(0)^{-1}[\mathscr{A}(L)-\mathscr{A}(0)]$ の第二行一列目は，一般に0にはならず m から q への因果性が結論されてしまうからである。そして，その係数から導かれたインパルス応答も，m から q への影響力の存在を示すことになる。しかし，真の構造は11なのだから，m への如何なる外生ショックも q の自律的変動に影響しないのである。以上の議論はほとんど自明だが，抽象的事例による一般的議論であるが為に解りにくいかもしれない。末尾に付論として，もう少し特殊だが簡単な例を挙げたので，疑問が残る場合はそちらを参照されたい。

4. 解 決 の 糸 口

もし，予測の成功にもかかわらず政策の効果がシュミレーションどおりにならなかったなら，未知変量の存在を疑う必要がある。ただ，そういった未知要因の多くは心理学や社

(15) 更にいえば，$[\epsilon'_{1,t}\ \epsilon'_{2,t}]$ の分布にかかわる量も絡んでいる。これは，$M(L)$ の導出に必要である。

(16) m をマネーサプライ，q をGDPと考えると分かりやすいだろう。

(17) つまり，11式が真の構造を表していると仮定しているのである。というのは，第2節の始めにふれたように，知りたいことがそこに示されているという意味である。

(18) 因果関係の何たるかは，ここでの問題ではない。

会学の対象となるべきものであり，その解明は容易ではないだろう。発見の努力を怠ってはならないが，未知なるものを未知としたままで何ができるかということも，今の我々にとっては重要である。未発見の変数について何ら知識を持たない場合は手の着けようもないが，その性質について部分的にでも分かっていれば，そこから $\Phi(L)$ についての知識を引き出す，という可能性が出てくる。経済学には，その計測法には議論があるが概念としては存立しているものがいくつかある。(19) そういった概念については，計測はできなくても，情況証拠から部分的な性質を知ることができるかもしれない。

関心の対象である変数 y と未知変数 x が1のような線形関係で結ばれていて，攪乱項 ϵ がホワイトノイズであることが判れば，y は8式に従うということがいえる。そしてもし，$\Psi(L)\Xi(L)^{-1}\Theta(L)=O$ であることを支持する証拠が間接的にでも得られれば，次の式が成り立っているであろうと推察できる。(20)

$$\Phi(L)y_t = M(L)e_t \tag{12}$$

だとすれば，y は次のVARMA形式に従っているだろう。(21)

$$y_t = -\Phi(0)^{-1}[\Phi(L)-\Phi(0)]y_t + \Phi(0)^{-1}M(L)e_t \tag{13}$$

このVARMAモデルの推定に成功し，なおかつ識別条件がクリアされれば，$\Phi(L)$ が推定できる。もちろん，如何なる情況証拠からもラグの階数までは特定できないだろうから，様々な階数について推定を行う必要がある。(22) もし，それら全ての推定から得られる共通の性質があれば，それを暫定的な結論とすることができる。たとえ，そのような性質が得られなくても，$\Phi(L)$ の様々な推定値の中で制御において最も成功を収めるものを選べばよい。不完全な知識のもとでは，このような試行錯誤が不可欠である。

5. 方法論的結論

経済システムは，膨大な数の要因が複雑に絡み合いながら動いている。それらの要因のなかには，未だ我々に知られていないものが数多くあるだろう。そういった未知要因の全てが，非系統的要因として攪乱項の中にまとめ得るとは限らない。現実には，1式のような形で，未知変量が系統的要因として経済システムに入り込んでいる場合が，決して少なくないはずである。第一に注意すべきことは，**そのような情況の下でも，受動的な予測はしばしば可能である**，ということである。1式のような巨大で包括的な体系を，9・10式のような少数の既知変数のみからなる体系に変

(19) 効用，期待，技術進歩などが挙げられる。

(20) 最も簡単なのは，$\Theta(L)=0$ の場合である。x がKoopmans [2] の意味での外生変数ならば，これが言える。計測により外生性をテストするというのが普通のやり方であるが，ここでは逆に，外生性の判断に基づき計測を有意義なものにするという方法論をとっている。

(21) VARMAはその特殊例として，VARを含む。

(22) 従来の階数決定法は予測を良くする為のものであり，未知変数の存在下において構造的知識を得るという目的にはそぐわない。

換することは，未知変数の効果を y の係数と攪乱項 e の中に押し込むことを意味する。この詰め込み作業は，正当な数学上の変形を通じてなされるものだから，その結果得られた式はやはり妥当なものである。だからこそ，経済変数の変動を予測できるのである。しかし，**ある変数の動学的経路が予測できるということはその変数の生成メカニズムの本質が理解できているということを意味しない**。例えば太陽黒点の発生は，その物理的生成メカニズムが未解明であるにもかかわらず，簡単な時系列モデルによって予測できるのである。**予測の成功によって科学の目的がすべて達成されたと考えるのは，予測という言葉が受動的な意味で使われている限り誤りである**。受動的というのは，計測対象に一切影響を与えないという意味である。政策シュミレーションは，経済システムへの意図的働きかけの結果を予測する行為であり，能動的な予測である。**未知要因を無視することは能動的予測の失敗につながる**。これが第二の注意点である。

この論文で指摘した問題は，パラメタの不変性が満たされているときに起こるものであるから，Lucas [3] の指摘とは異なった理由に基づくものである。よって，パラメタ変化の法則を定式化しても，問題は解決しない。根本的な解決は，未知変量の発見によって成される。未知要因は既知変数の体系の中に満足できる形で集約されているだろうという期待に身を委ねたり，受動的予測の成功で満足したりしていてはいけない。しかし，未知要因の発見には多くの困難が伴うだろうから，根本的解決は遠い将来になるだろう。だからといって，今の我々に全く為すすべが無いわけではない。未知要因について部分的に分かっている場合，例えばその計測法は判らないが概念として確立している場合には，情況証拠からその定性的性質を知ることが可能だろう。Koopmans の外生性は，そのような性質として期待し得るものの一つである。**情況証拠や非数量的概念を軽視してはならない**。Darwin の進化論も Wegener の大陸移動説も，そういったものから織り成されているのである。

付　　論

A　インパルス応答

多変量動学システムの一変数に 1 単位のショックが外から加えられたとき，その影響が時間を通じて変数全体に波及していく過程を定量的に表したものが，インパルス応答である。次の二変量モデルを例にとって考えよう。

$$\begin{bmatrix} m_t \\ q_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{t-1} \\ q_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{m,t} \\ \epsilon_{q,t} \end{bmatrix}$$

第一期において，m に一単位のショックが加えられたとする。この事を，次の式で表す。但し，係数行列を K と置く。

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} m_0 \\ q_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{m,1} \\ \epsilon_{q,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

第二期，第三期の値は次式によって求められる。

$$\begin{bmatrix} m_2 \\ q_2 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} m_1 \\ q_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{m,2} \\ \epsilon_{q,2} \end{bmatrix}$$

$$= K^2 \begin{bmatrix} m_0 \\ q_0 \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} \epsilon_{m,1} \\ \epsilon_{q,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{m,2} \\ \epsilon_{q,2} \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_3 \\ q_3 \end{bmatrix} = K^3 \begin{bmatrix} m_0 \\ q_0 \end{bmatrix} + K^2 \begin{bmatrix} \epsilon_{m,1} \\ \epsilon_{q,1} \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} \epsilon_{m,2} \\ \epsilon_{q,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{m,3} \\ \epsilon_{q,3} \end{bmatrix} + K^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ショックの効果は最後の項に表れている。純粋にこの効果だけを取り出すためには，$(m_0\ q_0) = (0\ 0)$ かつ全ての t について $(\epsilon_{m,t}\ \epsilon_{q,t}) = (0\ 0)$ として，上述のような逐次代入を行えばよい。すると次のような，インパルス応答函数が得られる。

$$\begin{bmatrix} m_t \\ q_t \end{bmatrix} = K^{t-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$k_{21} = 0$ なら，

$$\begin{bmatrix} m_t \\ q_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{t-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

となり，m へのショックは q へは波及しないことが判る。三変量以上や高階ラグの場合も，同様である。

第3節の議論に当てはめると，11式において m から q へのインパルス応答は常に0であることが分かる。しかし，11式から x を消去して得られた二変量VARから同様のインパルス応答を求めても，それが0になるとは限らない。[23] あるVARから変数の一部を消去してより低い次元のVARを作ったとき，その二つのVARは一般に異なったインパルス応答を示す。従って，相互依存している変数を全て特定しない限り，インパルス応答から政策の効果を知ろうとするのは危険である。

B　見せかけの因果関係

11式から x を消去して作った $y_t = (m_t\ q_t)'$ の二変量VARモデルにおいて，係数行列の第 (2,1) 成分は一般には0に成らない。これを証明するには，反例を一つ挙げればよい。そこで，11式をより単純化する。まず，x と y は同じ次元のベクトルだとする。次に，$(\epsilon_{1,t}'\ \epsilon_{2,t}') = (o'\ \epsilon_{2,t}')$ とする。つまり，y の生成メカニズムは確定的なものであり，確率的変動は x を通じて間接的に生じるものとする。さらに，$\Phi(L) = I + \Phi_1 L$, $\Psi(L) = -I$, $\Xi(L) = I + \Xi_1 L$, $\Theta(L) = -\Theta_0$ と置く。すると，11式は次の様になる。

$$\begin{cases} y_t = -\Phi_1 y_{t-1} + x_t \\ x_t = -\Xi_1 x_{t-1} + \Theta_0 y_t + \epsilon_{2,t} \end{cases}$$

但し，

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ 0 & \phi_{22} \end{pmatrix},\ \Theta_0 = \begin{pmatrix} 0 & \theta_{12} \\ 0 & \theta_{22} \end{pmatrix},\ \Xi_1 = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix},$$

である。これから x を消去すると，7式に対応する次の式を得る。

$$[\Phi(L) - \Xi(L)^{-1}\Theta_0]\, y_t = \Xi(L)^{-1}\, \epsilon_{2,t}$$

この式の右辺は，既にVMA形式になっている。[24] 両辺に $\Xi(L)$ をかけると，9式に相当する式が得られる。

---

(23)　具体例については，付論Bを見よ。

(24)　x と y の次元を等しくしたことと，$\epsilon_{1,t} = 0$ と置いたことが，ここで効いてきている。

$$[\Xi(L)\Phi(L)-\Theta_0]\,y_t=\epsilon_{2,t}$$

この係数を展開して，L について整理する。

$$[(I-\Theta_0)+(\Xi_1+\Phi_1)L+\Xi_1\Phi_1L^2]\,y_t=\epsilon_{2,t}$$

これから10式にあたる，次の二変量 VAR が求められる。

$$y_t=-(I-\Theta_0)^{-1}[(\Xi_1+\Phi_1)L+\Xi_1\Phi_1L^2]y_t+(I-\Theta_0)^{-1}\epsilon_{2,t}$$

係数の成分を計算する。

$$(I-\Theta_0)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\theta_{12}\\ 0 & 1-\theta_{22}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \frac{\theta_{12}}{1-\theta_{22}}\\ 0 & \frac{1}{1-\theta_{22}}\end{pmatrix}$$

$$\Xi_1+\Phi_1=\begin{pmatrix}\xi_{11}+\phi_{11} & \xi_{12}+\phi_{12}\\ \xi_{21} & \xi_{22}+\phi_{22}\end{pmatrix}$$

$$\Xi_1\Phi_1=\begin{pmatrix}\xi_{11} & \xi_{12}\\ \xi_{21} & \xi_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_{11} & \phi_{12}\\ 0 & \phi_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_{11}\phi_{11} & \xi_{11}\phi_{12}+\xi_{12}\phi_{22}\\ \xi_{21}\phi_{11} & \xi_{21}\phi_{12}+\xi_{22}\phi_{22}\end{pmatrix}$$

$$(I-\Theta_0)^{-1}(\Xi_1+\Phi_1)=\begin{pmatrix}1 & \frac{\theta_{12}}{1-\theta_{22}}\\ 0 & \frac{1}{1-\theta_{22}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_{11}+\phi_{11} & \xi_{12}+\phi_{12}\\ \xi_{21} & \xi_{22}+\phi_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\xi_{11}+\phi_{11}+\frac{\theta_{12}}{1-\theta_{22}}\xi_{21} & \xi_{12}+\phi_{12}+\frac{\theta_{12}(\xi_{22}+\phi_{22})}{1-\theta_{22}}\\ \frac{\xi_{21}}{1-\theta_{22}} & \frac{\xi_{22}+\phi_{22}}{1-\theta_{22}}\end{pmatrix}$$

$$(I-\Theta_0)^{-1}\Xi_1\Phi_1=\begin{pmatrix}1 & \frac{\theta_{12}}{1-\theta_{22}}\\ 0 & \frac{1}{1-\theta_{22}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_{11}\phi_{11} & \xi_{11}\phi_{12}+\xi_{12}\phi_{22}\\ \xi_{21}\phi_{11} & \xi_{21}\phi_{12}+\xi_{22}\phi_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\xi_{11}\phi_{11}+\frac{\theta_{12}\xi_{21}\phi_{11}}{1-\theta_{22}} & \xi_{11}\phi_{12}+\xi_{12}\phi_{22}+\frac{\theta_{12}(\xi_{21}\phi_{12}+\xi_{22}\phi_{22})}{1-\theta_{22}}\\ \frac{\xi_{21}\phi_{11}}{1-\theta_{22}} & \frac{\xi_{21}\phi_{12}+\xi_{22}\phi_{22}}{1-\theta_{22}}\end{pmatrix}$$

従って，$\xi_{21}\neq0$ ならば $\frac{\xi_{21}}{1-\theta_{22}}$ は 0 ではなく，$\phi_{11}\neq0$ ならば $\frac{\xi_{21}\phi_{11}}{1-\theta_{22}}$ も 0 ではない。

参 考 文 献

[1] Engle, R.F., D.F. Hendry and J.-F. Richard (1983) "Exogeneity" *Econometrica* Vol.51 No.2 pp.277-304

[2] Koopmans, T.C. (1950) "When is an equation system complete for statistical purposes?" in *Statistical Inference in Dynamic Economic Models* ed. by T.C. Koopmans, John Wiley, pp. 393-409

[3] Lucas, R.E. (1976) "Econometric policy evaluation: A critique" *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* Vol.1 (A supplementary series to the Journal of Monetary Economics) pp.19-46

（経済学部研究助手）