慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	非線形景気循環理論の実証
Sub Title	Test of nonlinear business cycle theories
Author	伊藤, 幹夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1995
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.88, No.3 (1995. 10) ,p.385(53)- 415(83)
JaLC DOI	10.14991/001.19951001-0053
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19951001-0053

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

「三田学会雑誌」88巻3号（1995年10月）

非線形景気循環理論の実証*

伊　藤　幹　夫

1．序

景気循環を説明する理論モデルには，古今いろいろなものが考えられてきた。大別すると，変数の相互依存関係になんらかの非線形性を想定して，持続的循環を決定論的に生成するモデルと，線形の比較的単純な相互依存関係のもとで確率的な外生ショックを考慮して，持続的循環を生成するモデルである。前者は，経済体系から発する内生的なものとして景気循環を捉えるのに対して，後者は，安定的な経済体系の均衡が体系外からの絶えざるショックによって撹乱されている過程として景気循環を捉える。この論文は，STAR モデルや指数 AR モデルなどの非線形時系列モデルを日本経済のデータに適用して，変動の原因が内生的なのか外生的なものかを調べようと試みる。

上の二つの理論は，内生的非線形景気循環理論と外生的線形景気循環理論とよぶことができる。内生的ということは現状では決定論的ということだと考えてよい。また外生的ということは，現状では確率論的ということだと考えてよい。いずれにせよ内生的か外生的かは，景気循環理論の重要な分類基準である。もう一方の分類基準，非線形か線形かは複雑か単純かということを越えて，極限閉軌道をもたらし得るかどうか，カオスなどの非線形特有の現象を引き起こし得るかどうかの分水嶺である。さて，この二つの分類基準を組み合わせると，内生的線形景気循環理論と外生的非線形景気循環理論が有り得ることに気づく。しかし，前者において持続的な循環が生ずることが非常にまれなため，それを景気循環理論として取り上げたことは現在あまりない。この論文では，論理的にはもっとも一般的な外生的非線形景気循環理論を基礎に，現実のデータが内生的非線形景気循環理論を支持するのか，外生的線形循環理論を支持するのかを検証する。以下，内生的非線形景気

＊　本論文は，慶應義塾学事振興資金の助成による研究の一部である。論文の作成にあたって，神谷傳造教授，商学部の牧厚志教授に貴重なコメントをいただいた。経済学部の吉野直行教授にもさまざまな助言をいただいた。また，文部省統計数理研究所の尾崎統教授には非線形時系列解析についていろいろ教えていただいた。

循環理論を，単に非線形景気循環理論とよび，外生的線形景気循環理論を，単に線形景気循環理論とよぶ。

非線形景気循環理論には，Kaldor (1940), Goodwin (1951) などの1940-50年代に考えられた投資関数の非線形性に依拠するものから，最近の Benassy (1984), Grandmont (1985), Boldrin and Woodford (1990) までいろいろな理論が考案されている。線形景気循環理論には，古くは Frisch (1933), 最近では Lucas (1976, 1977), Barro (1976) などの貨幣的ショックの波及を考える均衡景気循環の理論，Kydland and Prescott (1982), Long and Plosser (1983) などによる実景気循環の理論などがある。もっとも，実景気循環理論は最適成長理論に基づくもので，本質的に線形とは言い切れないものである。しかし，関連した多くの研究では局所的な線形化によって得られる単純化した線形体系を考えている。

実証研究に関して，線形景気循環理論については，比較的よく行なわれているのに対して，非線形景気循環理論については，ほとんど行なわれていない。もっとも線形景気循環理論の実証研究といっても，理論から得たモデルのパラメターにそれらしい数字をあてはめてシミュレーションを行ない，現実の経済の動きにどれだけ似ているかを観察する，あるいは理論モデルを VAR（Vector Auto-Regressive）モデルのような時系列モデルに帰着させそのインパルス応答の現実妥当性を問う，という実証研究が中心的であるのも事実である。これは，動学理論の直接的実証が，データの制約などによって，本来的に難しいためであろう。よって，理論的に込み入っており，本来決定論的で既存の時系列解析との対応のつけにくい，非線形景気循環理論に対する実証研究がほとんどないのは当然といえる。

非線形景気循環理論を実証するには，非線形常微分方程式などの非線形力学系と，非線形時系列を解析するための統計手段との間の関係に関してある程度のことが明確になっている必要がある。幸い最近10年間ほど，非線形時系列の研究が発展し，また非線形力学系との関係も少しずつわかってきている。これにより，非線形動学モデルの実証の道が開かれてきた。経済学への応用はほとんどないようであるが，ある程度の実証作業が可能になっている。

非線形時系列の理論の発展にともない，経済時系列の非対称性を問題とする経済学の論文は，最近増えてきている。Falk (1986), Hamilton (1989), Brock et al. (1991), Beaudry and Koop (1993), 国友・佐藤（1994）などがこの例である。これらは，観察された時系列の非線形性・非対称性に注目してはいるが，既存の非線形景気循環理論との関係は明確でない。本論文では，現実の日本経済の時系列データが非線形なモデルを示唆するかどうかを調べることで，非線形な景気循環理論の現実妥当性を検証する。主な結論として，時系列として非線形性あるいは非対称性が観察されるものの，極限閉軌道の存在は確認できなかった。

論文の構成は以下のようになっている。まず，2節では，非線形時系列を考える意義をまとめる。ここでは，非線形性を看過して実証をすることの問題点，時系列の非線形性，非対称性の定義をめ

ぐる問題点を述べる。具体的に問題となるのは，正規線形モデルの非線形時系列に対する有効性と，正規性の仮定と線形性の定義の関係である。第3節では非線形力学系と非線形時系列の関係を簡単に述べる。ここでは，決定論的な動学モデルに基づく非線形景気循環理論を実証するための基礎的な事柄を整理する。特に極限閉軌道を持ち得る連続力学系を離散時点の観察から推定する工夫を述べる。4節では，用いたデータならびに，その定常化についての若干の準備的作業として単位根検定をおこなう。次に第5節で，時系列の線形性を比較的簡単にテストするために，Neftci (1984) の二次マルコフモデルを用いる。この節は6節以降の，本格的な非線形性のテストの準備である。次の第6節では，非線形時系列モデルのあてはめによって，経済時系列の非線形性を調べる。第7節は，極限閉軌道の存在の可能性を指数 AR モデルの推定を通じて検証する。最終の8節はまとめである。

2．非線形性の意味：実証的側面

この節では，本質的に非線形な体系を線形モデルで推定あるいは近似するとき生ずる問題，ならびに線形モデルは時系列データの非線形性・非対称性をとらえ損なうという問題を，動学経済理論の実証と純粋な時系列解析の二つの側面から整理する。

2．1　Blatt の線形モデル批判

景気循環理論の線形性の仮定は，初期の Frisch (1933) のモデルを除いて，70年代前半まで計量経済学の研究によって正当化されてきた。たとえば，有名な論文集 Hickman (1972) に掲載されている論文はどれもが，安定的な線形モデルによって循環的な経済を適切に説明できるという自信に満ちている。当時の実証経済学者にとって，非線形性を考えることはモデルによけいなものをつけ加えることだという感覚でしかなかったろう。この感覚は，最近の実景気循環理論の信奉者にも共通のものである。

こうした見方に対して Blatt (1978) は，非線形性が循環現象において本質的な役割を果たす場面で，安易に線形モデルをあてはめることには問題があると主張した。[(1)] 彼は，Hicks (1950) の天井・床モデルに基づく非線形差分方程式を特定化して，データを人為的に作りだした。このデータは上昇・下降について明らかに非対称なパターンを持つ。このデータを線形時系列モデルに当てはめ，主要なパラメターを推定すると，推定値が元の非線形差分方程式のパラメターと著しく異なることを，Blatt は指摘した。実際，彼が示した例では資本係数の推定誤差の結果，体系の安定・不安定についての結論が逆転してしまう。

（1）　線形モデルと言うとき，この論文では AR (AutoRegressive) モデル，MA (Moving Average) モデル，ARMA (Autoregressive Moving Averagae) モデルのどれかを指す。

Blattの論文は，実証モデルを構成するときに非線形性を軽視することの危険性を指摘している。さらにBlattは，データに線形モデルをあてはめた結果だけから，非線形景気循環モデルの妥当性を，判断してはならないことを示唆する。確かに，循環を示すように思える時系列データを一見しただけでは，それが線形モデルにおける確率ショックの波及過程なのか，非線形モデルの極限閉軌道の周囲をゆらぎながら推移する過程なのか，にわかには判別できない。当然，なんらかの非線形モデルをあてはめて，線形性の妥当性を調べるのが自然であると考えられる。もっともBlattは非線形モデルの現実妥当性をどのように検証するかについて，具体的な提案を示していない。この点は第3節で論ずる。

2. 2 時系列の非線形性

時系列解析において非線形性が果たす役割を検討する。これは，線形モデルと非線形モデルには本質的相違があるというBlattの指摘を，時系列解析の観点から整理することでもある。

以下では，もっぱら定常時系列を問題とする。非線形性にふれる前に定常時系列を定義しておこう。[2] ここでは強い意味の定常性を考える。つまり，任意のサブ・サンプルの確率分布が時間のずらしに対して不変であることを定常と定義する。これに対して，時系列$\{X_t\}$が弱定常であるとは，任意のサブ・サンプルの分散・共分散行列が時間のずらしに対して不変であることをいう。これは

$$E(X_t)=\mu, \quad Cov\,(X_t, X_{t-\ell})=\phi(\ell) \tag{1}$$

のように書けることだと言ってよい。これは期待値が一定かつ分散・共分散構造が時間不変であることである。定義より定常ならば弱定常であるが，逆は必ずしも成立しない。

さて，任意の連続スペクトルを持つ定常時系列$\{X_t\}$は，系列無相関な時系列$\{\varepsilon_t\}$によって，

$$X_t=\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i} \tag{2}$$

と表現できる。[3] いわゆるWoldの分解定理である。ここで注意しなくてはならないのは，$\{\varepsilon_t\}$が単に系列無相関であり，必ずしも各時点間で独立とは限らないことである。よって，上の表現にあらわれる$\{\varepsilon_t\}$は完全な白色雑音ではなく，なんらかの情報が含まれるかもしれない。ただし，弱定常過程に関心を集中させる場合には，線形モデルで十分であることを意味することに注意せよ。

一方，任意の定常時系列は，各時点間で独立な標準正規分布$N(0,1)$に従う$\{\varepsilon_t\}$を用いて

$$X_t=\mu+\sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i e_{t-i}+\sum_{i,j=-\infty}^{\infty} b_{ij} e_{t-i} e_{t-j}+\sum_{i,j,k=-\infty}^{\infty} b_{ijk} e_{t-i} e_{t-j} e_{t-k}+\cdots \tag{3}$$

---

(2) 確率変数の系列を確率過程，その標本過程を時系列というのが正確な用語法であろうが，ここでは両者を区別せず，もっぱら確率過程と同じ意味で時系列という用語を使う。また，すべて一変数時系列を指すものとする。

(3) Priestley (1981) の10章を見よ。

という多項式表現によって任意の精度で近似することができる。(Nisio (1960) の定理。)

よって，(3)において二次以上の高次の係数がすべてゼロであるような表現を持つ定常時系列として線形時系列を定義するのが自然である。(3)式で，正規性（ガウス性）と線形性が結びついた形で定義されていることに注意すべきである。線形時系列とは，各時点間で独立な同一の正規分布に従う確率過程の線形結合で表現されるものと定義する。また，線形でない定常時系列を非線形時系列と呼ぶ。

この定義に基づいて具体的に時系列の線形性を調べるには，(3)式を直接推定して高次の係数に関する検定を行なえばよい。しかし，そうすることが技術的に困難であるため，6節で行なうように，線形モデルを時系列 $\{x_t\}$ にあてはめ，その回帰残差と $x_t x_{t-k}$ や $x_t x_{t-k}^3$ のような系列との相関をみる。

さて，線形時系列を前提とするなら，射影オペレータを条件付期待値オペレータと同一視してよい。[(4)] 逆に言えば，非線形時系列を前提とすると，合理的期待モデルの厳密な解法は非常に複雑になる可能性がある。少なくとも，有限個の確率変数を条件とする条件付期待値の計算は複雑になる。実際，モデルの攪乱項の正規性の仮定をはずすと，条件付き期待値は条件を構成する変数について線形にならない場合がある。まず，MA(1)

$$X_t = \varepsilon_t - a\varepsilon_{t-1} \tag{4}$$

を考える。これは，当然線形モデルである。ただし，ε_t は各期独立に $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 上の一様分布に従うとする。このとき(4)式の $\{X_t\}$ は定常である。ここで，$E(X_t|X_{t-1})$ を具体的に知るには，$X_{t-1}=x$ が観察されたときの実数値関数としての $E(X_t|X_{t-1}=x)$ を調べればよい。これは，$a \geq 1$ のとき

$$E(X_t|X_{t-1}=x) = \begin{cases} -\dfrac{a}{2}x - \dfrac{a(a-1)\sqrt{3}}{2} & \text{if } x \leq -(a-1)\sqrt{3} \\ 0 & \text{if } -(a-1)\sqrt{3} \leq x \leq (a-1)\sqrt{3} \\ -\dfrac{a}{2}x + \dfrac{a(a-1)\sqrt{3}}{2} & \text{if } x \geq -(a-1)\sqrt{3} \end{cases} \tag{5}$$

$a<1$ のとき

$$E(X_t|X_{t-1}=x) = \begin{cases} -\dfrac{a}{2}x + \dfrac{a(1-a)\sqrt{3}}{2} & \text{if } x \leq -(1-a)\sqrt{3} \\ 0 & \text{if } -(1-a)\sqrt{3} \leq x \leq (1-a)\sqrt{3} \\ -\dfrac{a}{2}x - \dfrac{a(1-a)\sqrt{3}}{2} & \text{if } x \geq -(1-a)\sqrt{3} \end{cases} \tag{6}$$

となる。

この例は，攪乱項の正規性の仮定をはずすことによって，線形モデルにおいて非線形性が出現し

(4) 射影オペレータとそれを用いた合理的期待モデルの解法については，Sargent (1987) を見よ。

得ることを示している。[5] 各時点間で独立な正規分布に従う攪乱項の系列を基礎に線形性を定義したためにこのようなことが生ずる。

なお，定常性として二次までのモーメントのみを考慮する弱定常を考えるときは，ここでの線形性の定義の意味がはっきりしなくなることに注意せよ。結局，弱定常性を考えることは，3次以上のモーメントのもつ情報を無視することを前提としており，正規性を前提とすることにほぼ等しいといってよい。以上，線形性の定義と正規性の仮定との関連を簡単にふれた。

再び，Wold の定理と Nisio の定理に立ちかえって，これまでの議論をまとめてみよう。一般の定常時系列に対して MA モデルなどの正規線形モデルをあてはめると，残差の正規性が保証されないばかりか，時点間の独立性も保証されない。換言すると，正規線形モデルを非線形性を持つと予想される時系列に対して安易にあてはめることは問題があるということになる。このことは，われわれが一般的な時系列に対して何らかの解析を行なうとき，攪乱項の正規性の仮定を置かず，さらに時点に関する独立性の仮定も取りはずして線形時系列モデルを推定するか，あるいは正規白色雑音を仮定して非線形時系列モデルを推定するかの選択があることを示唆している。どちらの接近法がよいかは即断できない。非線形理論を実証するという立場に立つなら，非線形時系列モデルを考えるべきだし，予測や事実発見を目的とするなら非正規線形モデルのほうが扱いやすいかもしれない。この論文では，非線形景気循環理論を主題とするため，非線形時系列モデルを主に考える。

2. 3 非可逆性

時系列の非線形性を定義したが，やや直感的にわかりにくい。そこで，非線形性に関係する定常時系列の特性の中で，直感的にわかりやすい非可逆性を考えることにする。定常時系列には上昇と下降で明らかに異なるパターンを示すものがある。[6] こうした時系列を非対称あるいは非可逆とよんでもよいだろう。これは，定常時系列 $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ が与えられたとき，$y_t=x_{T-t+1}$ として $\{y_t\}_{t=1}^{T}$ を定義するとき，これら二つの時系列が異なるパターンをとることだと考えられる。

まず，上のことを確率論的に定式化すると以下のようになる。

定義 1 定常時系列 $\{X_t\}$ は，任意の $t_1, t_2, \cdots, t_m$ に対して，$(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_m})$ の結合確率分布が，$(X_{-t_1}, X_{-t_2}, \cdots, X_{-t_m})$ の結合確率分布に等しいとき可逆であるという。また可逆でない定常時系列を非可逆時系列とよぶ。

この定義はゼロ時点での反転を基礎にしているように見えるが，実は反転の基準点は任意でよい。実際，定常確率過程 $\{X_t\}$ が可逆であるとき，任意の $t_1, t_2, \cdots, t_m$ に対して，$(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_m})$ の

(5) ここは，非正規 MA モデルの条件付期待値の構造を詳しく調べた Shepp et al. (1980) を参考にした。

(6) 例えば，1821年から1934年にかけてカナダのマッケンジー川周辺で捕獲された，カナダ山猫のデータは有名な例である。また，Neftci (1984) が指摘するように，アメリカの戦後失業率のデータにも上昇・下降についてある程度の非対称性が見られる。

結合確率分布が，$(X_{-t_1}, X_{-t_2}, \cdots, X_{-t_m})$ の結合確率分布に等しいが，定常性からこの分布は任意の ℓ に対して $(X_{\ell-t_1}, X_{\ell-t_2}, \cdots, X_{\ell-t_m})$ の結合確率分布に等しくなる。

また，この非可逆性は，もとの時系列 $\{X_t\}$ の1対1関数による変換

$$Y_t = g(X_t)$$

に関して不変な性質である。これは，可逆性の定義に当てはめてみれば明らかである。命題の形で書くと以下のようになる。

命題 1 定常時系列 $\{X_t\}$ が非可逆であるとき，またそのときに限りそれを1対1関数で変換した系列 $\{Y_t\}$ は定常かつ非可逆である。

この命題は，対数変換や Box-Cox 変換などによって，非可逆性が失われたり，可逆なデータを非可逆とすることはないことを保証する。

また，線形モデルの自己共分散関数が対称になること，正規なモデルは平均と分散で完全に特徴づけられることから，次の命題が成立することが分かる。(7)

命題 2 正規な線形モデルに従う定常確率過程は，可逆である。

実は上の命題の逆も成立する。実際，線形モデル（ARMA モデル）に従う可逆な過程の攪乱項は正規分布に従うことが示される。(8) 以上より，非可逆な時系列データに正規な線形モデルをあてはめることが適切でないことが明らかになった。また，正規な線形モデルは非対称なパターンの時系列を生成しないことも明らかになった。

また，ここでも正規性の仮定と可逆性が密接に結びつくことに注意せよ。このことを利用して，時系列データに ARMA モデルをあてはめて，その残差の正規性を調べることで非対称性を発見できることが期待される。ただし，この論文では二次マルコフモデルよって非可逆性を調べる。

3．非線形理論モデルと非線形時系列

第2節で，非線形時系列に正規線形モデルをあてはめることには問題があることが明確になった。つまり，非線形システムによって生成されているかもしれない経済時系列に対して，正規線形モデルはシステム推定の適切なモデルではない。そこで次の問題は，非線形景気循環モデルの現実妥当性をどのように検証するかである。これには前の節で述べたように，二つの方法が考えられる。一つは，正規かつ線形なモデルからは非線形あるいは非可逆な時系列が生成され得ないことを用いて，6節でおこなうように時系列の線形性を検証する方法。もう一つは，極限閉軌道の存在などの性質に着目して，非線形モデルを直接検証する方法である。理論の直接的な検証という観点からは，非

（7） 以下において，線形モデルに従うというとき，攪乱項の時点間の独立性は保証されているものとする。

（8） 例えば，Tong (1983) の1章の定理3を見よ。証明は相当めんどうである。

線形モデルが望ましいことは明らかである。

しかし非線形モデルの推定による検証は，厄介なことを含む。非線形景気循環モデルは大抵の場合，確率的なショックを含まない非線形微分方程式で定式化されている。そうしたモデルの検証は，撹乱項を含む非線形な自己回帰モデルに基づくことになるが，極限閉軌道をもつような微分方程式に対応する，撹乱項と安定な閉軌道を同時に持ちうる差分方程式を考えなければならない。この対応をつけるのがこの節の目的である。

3. 1　確率微分方程式と離散確率過程

まず最初に線形確率微分方程式と，ARMA のような確率差分方程式の対応関係を簡単にまとめる。具体的には，線形確率微分方程式に従う確率過程を可算個の時点の観察から推定するとき，どのようなモデルで表現できるかという問題を考える。この問題は，Pandit and Wu (1975) によって解かれている。彼らは，

$$\ddot{X}(t)+\alpha_1\dot{X}(t)+\alpha_0 X(t)=Z(t) \tag{7}$$

という確率微分方程式を考える。ここで，$Z(t)$ は正規白色雑音であり，

$$E(Z(t))=0,\quad E(Z(t)Z(t+u))=\delta(u)\sigma_z^2 \tag{8}$$

とする。ただし，$\delta(u)$ は Dirac のデルタ関数である。

Pandit and Wu はこの確率過程から一定期間ごとの離散サンプリングをした場合の確率過程が，

$$X_t-\phi_1 X_{t-1}-\phi_0 X_{t-2}=a_t-\theta a_{t-1} \tag{9}$$

という ARMA (2, 1) 過程に従うことを，(7) の自己共分散関数の離散サンプリングと (9) の自己共分散関数の比較を通じて示した。ここで，a_t は

$$E(a_t)=0,\quad E(a_t a_{t+k})=\delta_{0k}\sigma_a^2 \tag{10}$$

を満たす白色雑音，δ_{0k} は Kronecker のデルタである。なお，(7) の二つのパラメター α_1 と α_0 から，(9) の三つのパラメター ϕ_1 と ϕ_0, θ は完全に定まる。ただし，これら変数の関係はかなり複雑である。また σ_a^2 も一意に定まる。[9]

定常な ARMA (2, 1) モデルは，ある条件の下で無限次元の AR モデルに展開できるから，線形確率微分方程式に従う過程は，高次の AR モデルで近似することが可能である。以上から，線形連続力学系と線形時系列モデルが関係づけられた。

3. 2　非線形微分方程式と離散確率過程

線形性が仮定されるときには，確率微分方程式を線形の時系列モデル（AR モデル）で推定することが許されることがわかった。しかし，Goodwin (1951) モデルのような非線形景気循環理論のいくつかは

（9）　詳しくは，Pandit and Wu (1975) の (8) 式と (11) 式を見よ。

$$\ddot{X}(t)+h(\dot{X}(t))+k(X(t))=0 \tag{11}$$

のような二階非線形微分方程式に帰着される。そこで(7)を一般化して

$$\ddot{X}(t)+f(\dot{X}(t))+g(X(t))=Z(t) \tag{12}$$

という非線形確率微分方程式を考えるとき，非線形性を考慮したARモデルによって(12)の離散的表現が可能だと予想がつく。

(12)は(11)が微小な揺らぎにさらされるものと考えてよい。われわれは，この確率微分方程式に従う確率過程から離散サンプリングをした確率過程を表現するために，適当な確率差分方程式を見つけたい。それは，以下で見るような可変係数のARモデルになる。

まず，一般形(12)をTaylor展開したものを考えて，X_{t-1}とX_{t-2}の二次以上の項を含む多項式$Q(X_{t-1}, X_{t-2})$を用いて，

$$X_t=\phi_1 X_{t-1}+\phi_0 X_{t-2}+Q(X_{t-1}, X_{t-2})+\varepsilon_t \tag{13}$$

のように表現できると想定してみる。これは以下にみるように非定常性を引き起こす。

例えば，(13)が

$$X_t=\phi_1 X_{t-1}+\phi_0 X_{t-2}+\varepsilon_t \tag{14}$$

のように二次以上の項を含むものを考えると，これは

$$X_t=(\phi_1+\pi X_{t-1}^2) X_{t-1}+\phi_0 X_{t-2}+\varepsilon_t \tag{15}$$

という可変係数ARモデルに変形できる。一方，このモデルの定常性の必要条件は，

$$\lambda^2-(\phi_1+\pi X_t^2)\lambda-\phi_0=0 \tag{16}$$

という各時点ごとの特性方程式の根が，単位円の内部に存在することである。具体的には特性方程式の一次の係数をa，ゼロ次の係数をbとすると，ARモデルが定常であるためには

$$\{(a, b)|\ b<1,\ b>a-1,\ b>-a-1\} \tag{17}$$

という三角形領域に係数の対が入っていなくてはならない。しかし，正規分布のように裾が広がった分布を考えるとき，攪乱項の実現値によってはある時点のX_t^2が大きくなることがあり，この条件は満たされなくなる可能性がある。一度，この条件を満たさなくなると，多項式ARに従う体系は発散していくことが知られている。この事実は，定常である場合の(12)を，(13)のような多項式ARモデルで表現するのは適切でないことを示唆する。[10]

以上のことから確率微分方程式(12)を，可変係数ARモデルに帰着させる場合には，X_tの実現値の変動に対して，可変係数がそれほど変動しないモデルを考える必要がある。これは，つぎのようなOzaki (1985) による指数型ARモデルを考えるとよいことがわかる。

$$X_t=(\phi_1+\pi_1 e^{-X_{t-1}^2}) X_{t-1}+(\phi_2+\pi_2 e^{-X_{t-1}^2}) X_{t-2}+\varepsilon_t \tag{18}$$

(10) なお，尾崎統教授からの私信によって，一様分布のようにとる値が有界な場合にも多項式ARモデルが発散する可能性を指摘された。

これは特性方程式の一次およびゼロ次の係数がそれぞれ，ϕ_1 と $\phi_1+\pi_1$ の間および ϕ_2 と $\phi_2+\pi_2$ の間にとどまることを意味する。

この指数型 AR モデルは，非定常性を引き起こすことがないばかりでなく，極限閉軌道を持つ非線形微分方程式との対応を考えるときに便利である。極限閉軌道をもつ大抵の二階の非線形微分方程式は，定常点の近傍で不安定，定常点から大きく離れたところでは，定常点を含むコンパクトな領域を吸引域（attractor）とする。例えば，

$$\ddot{x}-a(1-x^2)\dot{x}+bx=0,\quad a>0 \tag{19}$$

という van der Pol 方程式は，$x^2<1$ で発散的挙動を示し，$x^2>1$ で減衰的挙動を示す変系数微分方程式である。この型の微分方程式が極限閉軌道を持つとき，白色雑音 $Z(t)$ を加えて

$$\ddot{x}-a(1-x^2)\dot{x}+bx=Z(t),\quad a>0 \tag{20}$$

という確率微分方程式を考えても，極限閉軌道の構造に根本的変化がなく，標本経路は極限閉軌道がゆらいだものになることがアナログ・シミュレーションによって知られている。一方(18)は攪乱項をなくしても，その変系数が適当な条件を満たせば，van der Pol 方程式と同様に，定常点 0 の近傍で発散的な挙動を示し，かつ十分大きな X_t については大きな復元力をもつ可能性がある。つまり，自律的かつ構造安定な閉軌道が，離散体系の(18)に存在しうる。X_t が十分大きいときには，(18)は近似的に

$$X_t=\phi_1 X_{t-1}+\phi_2 X_{t-2}+\varepsilon_t \tag{21}$$

に従い，X_t がゼロの近傍にあるとき

$$X_t=(\phi_1+\pi_1)X_{t-1}+(\phi_2+\pi_2)X_{t-2}+\varepsilon_t \tag{22}$$

に近似的に従うと考えてよいから，(21)が安定で，(22)が不安定なとき，こうした条件が満たされそうである。実際(18)において，パラメターを適当に特定化すると極限閉軌道のような構造安定な閉軌道をもつことが示される。これを図1-2に示す。

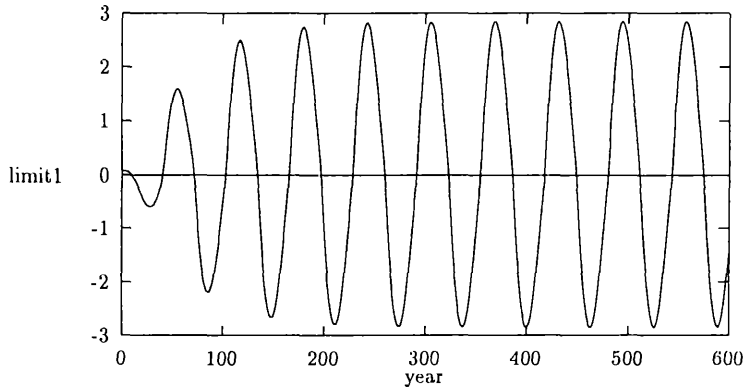
もっとも，非線形差分方程式の挙動を解析的に調べるのは実際には困難なので，極限閉軌道の存在を確かめるためには，攪乱項を無視した体系に対してシミュレーションを行なわなくてはならない。[11]

以上をまとめると，極限閉軌道を持つかもしれない非線形微分方程式体系を表現する時系列モデルとして，指数 AR モデルがよい候補になりうる。よって，極限閉軌道を持つ景気循環モデルの妥当性を調べるには，指数 AR モデルの推定を行ない，そのモデルが極限閉軌道のような自律的振動要素を持つか否かを調べれば，目的は達せられる。

---

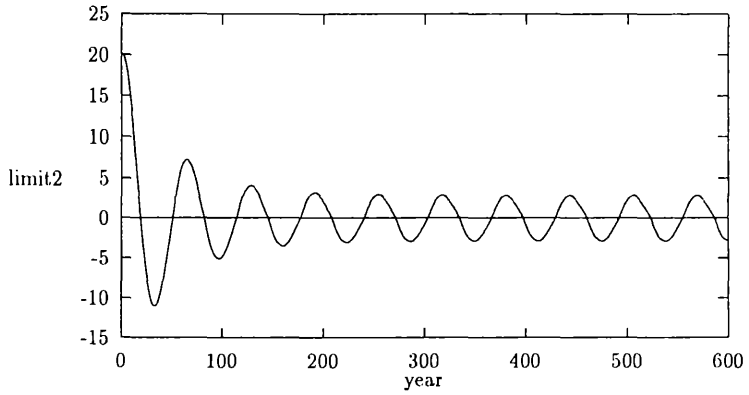
(11) 非線形差分方程式体系を解析的に調べる困難は，低次のモデルでも生ずる。カオスの存在するテント関数による体系は典型的な例である。実際，微分方程式に基づく連続型力学系の結果のアナロジーがそのまま離散型力学系に適用できる場合は限られる。例えば，Poincare and Bendixon の定理に対応するものは離散型力学系にはない。

図 1　極限閉軌道（初期点がゼロの近傍）



$\phi_1=1.95,\ \pi_1=0.23,\ \phi_2=-0.96,\ \pi_2=-0.24$ の場合

図 2　極限閉軌道（初期点がゼロから遠く）パラメターは前の図と同じ



4．実証の準備：データとトレンドの除去

この論文では，実質 GNP のような産出量データ，ならびに GNP のいくつかの支出項目，鉱工業生産指数について，非線形性の有無を調べる。また，これらのデータのうち産出量に関する非線形力学系を念頭において，非線形景気循環理論の検証を試みる。

GNP ならびにその支出項目については国民経済計算からの四半期データを使用した。これらは原系列ならびに季節調整済みの実質データである。基本的には，原系列については対数変換後に 1 階季節階差をとり，季節調整済みの系列については対数変換後に 1 階階差をとる。この操作の妥当

性は後にふれる。

IIP85　鉱工業生産指数（原系列・季調値）

I85　固定資本形成（原系列・季調値）

GNP85　国民総生産（原系列・季調値）

CH85　家計最終消費支出（原系列・季調値）

原系列の季節階差後のデータの概観を図3-6に示す。かなり明確な周期性がみてとれるのが，鉱工業生産指数である。他のデータもある程度の周期性が見られるが，微少な変動も激しい。また，全体を通じて1970年代前半の構造変化を境に振幅が小さくなっている。そのため，全体を観察するとき，体系が減衰振動の過程にあるようにも見えてしまう。このため，定常性に依拠した推定を行なうときは，後の節で行なうように，構造変化時点を境に別々に推定する必要があると考えられる。

図 3　鉱工業生産指数（季節階差）

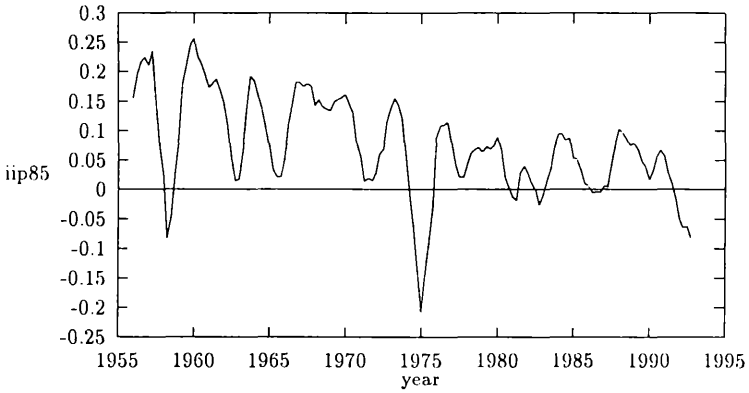


図 4　実質固定資本形成（季節階差）

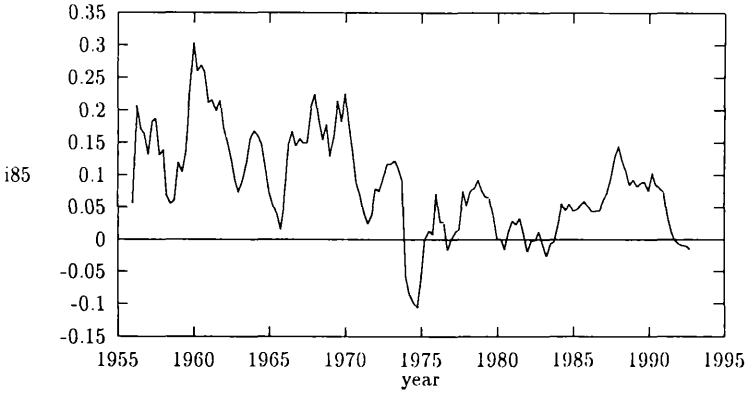


図5　実質ＧＮＰ（季節階差）

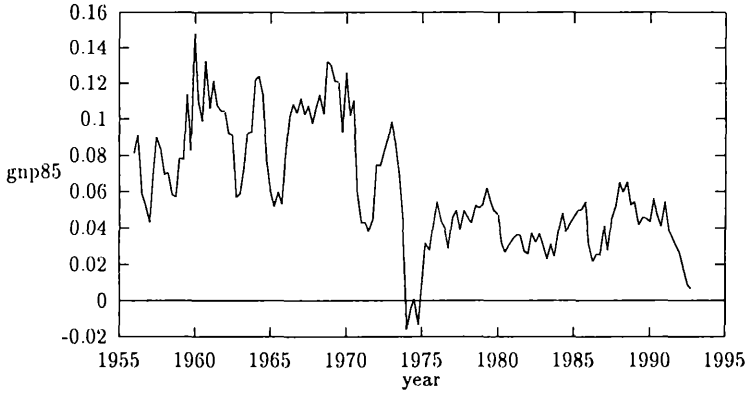
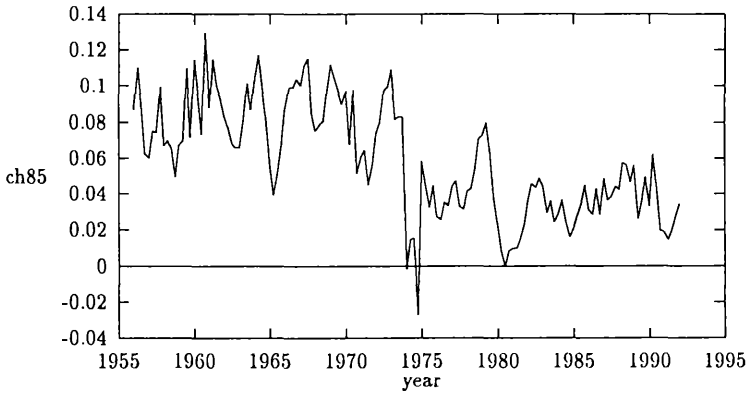


図6　実質家計消費（季節階差）



この論文で扱う非線形性の検証手続きは，すべて定常時系列を対象にしている。よって，国民総生産，消費・固定資本形成といったトレンドをもつデータは，適切な方法でトレンドを除去して定常化する必要がある。(12)

トレンドの除去には，階差をとるという操作のほかに，Beveridge and Nelson (1981) によって考えられた ARIMA モデルを用いて，ランダム・ウォークの確率トレンドと定常部分に分ける方法，Akaike (1980) や Prescott (1982) によるベイズ的接近法によるもの，Kitagawa and Gersch (1984) などによる状態空間推定を用いるものなどがある。なお，ベイズ的接近と状態空間推定による接近は，数学的にはレギュレータ問題とフィルタリング問題という双対問題の関係にあるため，理論的には同様の推定値をもたらす。(13)

(12)　有限な時系列データに対して検証できるのは，現状では弱定常性である。

(13)　この論文の作成段階でいくつかのトレンド除去を試したが，対数変換と階差操作によるトレン ↗

われわれは以下では，対数化したデータに対する定常化を考える。その場合，線形トレンドをとるか階差をとるかは単位根の有無によって決めるべきである。単位根検定は，トレンドを含む時系列の定常化の妥当性についての検定として考えられた。この検定には，回帰モデルを用いてt値型あるいはF値型の検定にもちこむDickey and Fuller (1979,1981)，Phillips (1987)，Phillips and Perron (1988) によるもの，標本自己相関に基づくノンパラメトリックな検定を考えるStock and Watson (1986) によるもの，ベイズ的接近に基づくSims (1988) の方法などがある。ここでは，よく用いられるDickey and Fullerの検定と，Stock and Watson (1988) の共和分検定の応用による単位根検定を用いる。具体的手続きは付録にまとめた。[14]

なお，単位根検定はよく行なわれる検定であるが，その検定力が高くないことは，いくつかのモンテカルロ実験によって示されている。また，有限標本を考える限り，単位根を持つ過程は定常過程と確定トレンドの和の過程によって幾らでも近似することができ，その逆も真であることをCochrane (1991) が理論的に示している。よって，対数変換・階差という操作によって定常化を試みるのは，ほかに代替的方法がないことによる暫定的な操作と考えるべきである。[15]

図からも明らかなように，1970年代前半にデータの様子が大きく変化する。そこで検定にあたっては，1970年代前半のいわゆる構造変化を考慮して，構造変化前 (1957：1-1970：4)，構造変化後 (1971：1-1991：4)，全期間 (1957：1-1991：4) の三つの場合に分けてトレンド項および定数項を含む回帰モデルをあてはめ，単位根検定を行なった。構造変化の時点に関しては様々な議論があるが，1970年代の早い時期，それも1970年あるいは1971年とする論者も最近は増えてきている。[16] 回帰モデルでラグをとることを考慮して，1957年の1期から計測を開始した。一階階差をとった系列に対しても単位根検定を行ない，トレンド除去後に定常化がなされたことを確認する。なお，回帰モデルの当てはめのとき，ラグ次数を1から7まで動かして計測を行ない，そのうち1次，3次，5次，7次のラグに対応する検定統計量を，表1から表4に示した。Stock and Watson検定では1%値＝−29.2, 5%値＝−21.7, 10%値＝−18.2, Dickey＝Fuller検定では1%値＝−3.96, 5%値＝−3.41, 10%値＝−3.12である。各表では三計測期間について，上から1次，3次，5次，7次のラグに対応する検定統計量を載せてある。また，表3と表4の各系列の左側には階差をとる前の，右側には階差をとった後の，検定統計量を載せてある。偶数次のラグに対するものは，は冗長になるため省略した。

↘ド除去と比較して結果が変わるものがあった。このことは別の機会にまとめる。

(14) 単位根検定のさまざまなタイプの分類ならびに，実際的手続きについては，山本 (1988) が詳しい。

(15) 単位根検定は，アメリカのデータについてNelson and Plosser (1982) 以降，盛んにおこなわれた。Stock and Watson (1986)，Rose (1986)，Wasserfallen (1986)，Banerjee et al. (1990) などを見よ。最後のものは，構造変化の探索を含む興味深い論文である。

(16) 吉川 (1992)，北坂 (1993) などを見よ。

表 1　単位根検定（Stock and Watson 検定）：原系列季節階差データ

	IIP85	I85	GNP85	CH85
構造変化	−16.302	−14.966	−18.781	−27.725
の前	−50.811	−56.616	−55.697	−56.472
	−18.196	−23.131	−26.536	−25.252
	−17.732	−21.379	−24.577	−25.741
構造変化	−22.615	−19.373	−23.232	−25.490
の後	−25.397	−20.261	−22.710	−22.665
	−18.029	−13.147	−18.880	−27.377
	−17.613	−12.699	−14.510	−26.809
全期間	−36.722	−24.686	−25.069	−38.270
	−123.313	−140.524	−140.956	−139.420
	−44.855	−55.779	−59.977	−55.698
	−45.222	−55.262	−60.374	−62.796

表 2　単位根検定（Dickey and Fuller 検定）：原系列季節階差データ

	IIP85	I85	GNP85	CH85
構造変化	−4.526	−2.827	−2.541	−2.903
の前	−4.865	−3.096	−3.559	−4.833
	−5.151	−3.359	−3.494	−4.889
	−3.461	−2.274	−2.638	−3.222
構造変化	−5.090	−3.214	−3.490	−3.285
の後	−5.748	−3.930	−4.857	−5.183
	−3.290	−2.813	−3.107	−2.847
	−3.533	−2.760	−2.778	−3.020
全期間	−6.547	−3.660	−3.585	−4.039
	−6.808	−4.191	−4.801	−5.978
	−6.807	−4.346	−4.712	−6.005
	−4.356	−2.850	−3.317	−3.389

表 3　単位根検定（Stock and Watson 検定）：季節調整ずみ階差データ

	IIP85		I85		GNP85		CH85	
構造変化	−12.807	−22.457	−7.299	−55.348	−9.916	−72.961	−18.915	−86.762
の前	−13.064	−24.427	−8.356	−56.725	−12.708	−73.808	−22.885	−83.822
	−11.109	−26.515	−8.517	−54.831	−12.196	−71.738	−22.922	−80.459
	−7.842	−24.585	−8.192	−52.784	−13.059	−68.077	−22.015	−76.938
構造変化	−17.349	−34.527	−2.849	−66.602	−13.058	−80.334	−12.430	−99.862
の後	−17.538	−33.160	−5.752	−67.869	−16.279	−75.527	−14.777	−94.944
	−14.120	−36.943	−5.173	−59.330	−16.847	−72.620	−12.525	−99.871
	−14.492	−35.474	−5.982	−63.458	−13.372	−79.244	−10.903	−98.675
全期間	−3.616	−52.083	−2.636	−111.305	−1.404	−142.571	−0.877	−180.949
	−3.091	−54.846	−3.489	−120.860	−2.719	−147.808	−2.289	−174.877
	−2.002	−59.274	−4.344	−116.213	−3.045	−146.921	−1.912	−175.507
	−1.447	−56.605	−3.749	−111.128	−2.541	−143.375	−2.161	−171.740

表4　単位根検定（Dickey and Fuller 検定）：季節調整ずみ階差データ

	IIP85		I85		GNP85		CI85	
構造変化の前	−3.567	−3.338	−1.862	−4.954	−2.045	−5.392	−2.564	−5.92
	−3.251	−4.713	−2.020	−2.764	−2.261	−3.864	−3.188	−4.361
	−2.748	−4.150	−2.143	−2.856	−2.680	−3.243	−2.902	−3.940
	−2.064	−3.833	−2.253	−3.030	−3.066	−3.069	−3.318	−3.565
構造変化の後	−3.976	−4.018	−0.971	−4.564	−2.713	−5.593	−3.374	−7.061
	−4.792	−5.233	−1.812	−3.414	−3.715	−3.653	−3.738	−4.045
	−2.891	−4.239	−1.411	−3.753	−3.480	−3.836	−3.528	−3.817
	−3.176	−4.559	−1.739	−3.520	−3.416	−3.760	−3.490	−3.311
全期間	−1.369	−5.110	−1.961	−6.283	−1.361	−6.997	−0.879	−8.657
	−1.309	−6.723	−1.813	−3.770	−1.477	−4.700	−1.117	−5.308
	−1.314	−5.517	−2.222	−3.957	−1.448	−4.355	−0.939	−4.796
	−1.056	−5.286	−1.719	−3.782	−1.247	−3.863	−0.989	−4.109

三計測期間とも，対数変換後の原系列に対して季節階差をとったものに単位根の存在は認められない。多くの系列に関してすべてのラグ次数に対して，またいくつかの系列についてはある次数に対して，階差をとる前に単位根の存在を棄却することができず，階差をとった後に単位根の存在が棄却される。このことは，各系列とも一個の単位根が存在することを示唆する。ただし，階差をとる前のデータの検定統計量が次数によってかなり変動する，構造変化後の鉱工業生産指数の例もあり，結果は慎重に扱うべきである。以後，日本経済に関して，対数変換後のデータに対して，一階階差をとることで定常化できると考える。次節以降のデータはすべて対数変換した後に階差あるいは季節階差をとることにする。

5．Neftci の方法による時系列の非線形性の検定

Neftci (1984) は直接時系列モデルを用いず，定常時系列の非線形性を検定する方法を考えた。それをアメリカの失業率データに応用し，非対称であるという帰無仮説を棄却できないという結果を得ている。Falk (1986) はアメリカのトレンド除去済み GNP データに Neftci の検定法を適用し，非対称性はないと結論している。ここで Neftci のいう非対称性は 3 節での非可逆性のことである。

Neftci の方法は，二次マルコフモデルによる。具体的には，対象となる定常時系列 x_t から，

$$I_t = \begin{cases} +1 & \text{if } \Delta x_t > 0 \\ 0 & \text{if } \Delta x_t \leq 0 \end{cases} \tag{23}$$

によって，系列 $\{I_t\}$ を得る。これは，系列の上昇・下降にのみ関心を集中するためである。実際，原系列に任意の単調変換を施しても $\{I_t\}$ は不変である。

この系列が二次のマルコフ過程に従うと想定する。つまり，ある状態が生起する確率は，前期と前々期の状態に依存すると仮定する。具体的には，今期上昇するか下降するかは前期と前々期の上

昇・下降の履歴に依存すると考える。

このとき，$\{I_t\}$ のデータ $S_T=\{i_1, i_2, i_3, \cdots, i_T\}$ を用いて，尤度関数を書くと，

$$L(S_T)=P(I_T=i_T \mid I_{T-1}=i_{T-1}, I_{T-2}=i_{T-2}) \cdots$$
$$P(I_T=i_3 \mid I_2=i_2, I_1=i_1)\, P(I_2=i_2, I_1=i_1)$$

である。ここで，

$$\lambda_{ij}=P(I_t \mid I_{t-1}=i, I_{t-2}=j)$$

と定義する。ただし，$i=1, 0$ ならびに $j=1, 0$ である。さらに，

$$\pi_0=P(I_2=i_2, I_1=i_1)$$

と定義する。尤度関数の形からわかるように，尤度における初期値部分の貢献は標本のサイズの増大によって低まることはないので，これを正確に求めることが肝要である。(17)

また，n_{ij}, T_{ij} を状態 i, j ($i=1, 0$ または $j=1, 0$) が生起した度数とする。これらの記法を用いて尤度関数を書き直すと，

$$L(S_T, \lambda_{ij}, \pi_0)=\pi_0(\lambda_{11})^{n11}(1-\lambda_{11})^{T11}(\lambda_{00})^{n00}(1-\lambda_{00})^{T00}(\lambda_{01})^{n01}(1-\lambda_{01})^{T01}(\lambda_{10})^{n10}(1-\lambda_{10})^{T10}$$

となる。

Neftci は，遷移確率に関して $\lambda_{11} \neq \lambda_{00}$ を帰無仮説として，非線形性の検定を考える。実際には，まず最尤法によって λ_{ij}^* を推定し，有意水準 α にもとづく信頼楕円半径を自由度 2 のカイ 2 乗分布の α 値，$\chi_\alpha^2(2)$ にとり，これを $\lambda_{11}-\lambda_{00}$ 平面に描いて，これが直線 $\lambda_{11}=\lambda_{00}$ と交わるかどうかを調べる。具体的には，対数尤度の Hesse 行列（の部分行列）**H** を用いて信頼楕円が

$$(\lambda-\lambda^*)'(-\mathbf{H})(\lambda-\lambda^*)=\chi_\alpha^2(2)$$

と書けることを使う。

以下では，対数階差によってトレンドを除去した GNP とその支出項目，鉱工業生産指数の系列に対して，Neftci の方法による非線形性の検定を適用する。（結果は表 5）さらに，Neftci の検定に加えて，$\lambda_{11}=\lambda_{00}, \lambda_{10}=\lambda_{01}$ を対称性と考え，同様の検定を行なった。（結果は表 6）さらに，すでに述べた $\lambda_{11}=\lambda_{00}$ ならびに $\lambda_{11}=\lambda_{00}, \lambda_{10}=\lambda_{01}$ という二つの型の制約に対して，尤度比検定も行なった。（結果は表 7 と表 8）計測は構造変化前 (1956：1-1970：4)，構造変化後 (1976：1-1991：4)，全期間 (1956：1-1991：4) の三つの場合に分けて行なった。1974年前後の数期間は，極端な構造変化を示すため，除いた。表 5 と表 6 の●印は非対称性を80パーセント支持するという結果，⊙印は非対称性を90パーセント支持するという結果である。表 7 と表 8 の丸印は 5 パーセント有意水準で帰無仮説が棄却されたことを意味する。各表の上段は原系列の季節階差データに対応し，下段は季節調

(17) Neftci は π_0 を定常性の仮定を用いて，

$$\pi_0=\lim_{N\to-\infty} P(I_2=i, I_1=j \mid I_N=k)$$

から厳密に求めようとしているが，4 個ある初期値のケースのうち 2 つについて計算ミスをしているので注意が必要である。π_0 の正しい導出は付録に載せる。

整済み系列の階差データに対応する。

表 5　Neftci 検定

	IIP85	I85	GNP85	CI85
構造変化の前	⊙			
		●		⊙
構造変化の後	●			
	●		⊙	⊙
全期間	⊙			
		●	⊙	⊙

表 6　Neftci の検定（改良版）

	IIP85	I85	GNP85	CI85
構造変化の前	⊙			
		⊙	●	⊙
構造変化の後				
	⊙	●	⊙	⊙
全期間	⊙			
	⊙	⊙	⊙	⊙

表 7　尤度比検定（$L_{00}=L_{11}$ が制約）の結果

	IIP85	I85	GNP85	CI85
構造変化の前	●			
		●		●
構造変化の後	●			
			●	●
全期間	●			
		●	●	●

表 8　尤度比検定（$L_{00}=L_{11}, L_{01}=L_{10}$ が制約）の結果

	IIP85	I85	GNP85	CI85
構造変化の前	●			
		●	●	●
構造変化の後				
	●		●	
全期間	●			
	●	●	●	●

すべての系列とも，構造変化前か構造変化後の少なくともどちらかで，非対称性が認められる。また，Neftci の検定方法と尤度比検定の結果にわずかな違いしかない。実際表 5 と表 7，表 6 と表 8 の結果はよく似ている。一方原系列の季節階差データでは非線形はあまり現われない。Nefti の検定の結果が季節性の処理方法に依存することを意味する。

これまで，日本経済の時系列データの非線形性（非対称性）がある程度確認されたが，ここでいう非対称性は上昇と下降のパターンに関するかなり素朴な発想に基づいて測られた。次の 6 節は時系列解析の立場で定義される非線形性を調べる。

6．Luukkonen 等による非線形時系列モデルのあてはめによるテスト

ここでは，2 節でのべた時系列の線形性の定義に従って，経済時系列が線形か非線形かを調べる。

Luukkonen et al.(1988) は，threshold モデルの一種 STAR (Smooth Transition AutoRegressive) モデルを基礎に，時系列の非線形性の検定を考える。検定統計量は，漸近的に χ^2 に従い，検出力も十分である。[18] STAR モデルを用いるのは，2 節で述べたように，多項式モデル(3)を直接推定す

(18)　この種の STAR モデルによる線形性の検定は複数存在する。Petruccelli (1990) がそれらの比較をしている。この節で用いる検定は優れているとしている。

ることが技術的に困難なことによる。実際，多項式モデル(3)の簡単な場合である bilinear モデルですらその推定はかなり厄介である。そのため，Luukkonen et al. (1988) は STAR モデルを基礎にして，線形モデルの回帰残差の特性を調べることで非線形性の検定を試みた。

6. 1 非線形性テストの準備

p 次の STAR モデルとは

$$y_t+\pi_0+\pi' w_t+(\theta_0+\theta' w_t)F(z_t)=\varepsilon_t, \tag{24}$$

で，ε_t は各期独立に，$N(0, \sigma^2)$ に従う。また，各記号は，

$$w_t=(y_{t-1}, \cdots, y_{t-p})', \pi=(\pi_1, \cdots, \pi_p)',$$

$$\theta=(\theta_1, \cdots, \theta_p)', z_t=\gamma(a' w_t-c)$$

で，$\gamma>0$, $a=(a_1, \cdots, a_p)'$。また，

$$a_i=\begin{cases} 1\ (i=d) \\ 0\ (i\neq d) \end{cases} \tag{25}$$

ここで d は一般的に未知のパラメターであり，$1\leq d\leq p$ である。(24)のパラメターが推定されると，d が固定されるので，y_{t-d} を $a' w_t$ に置き換えて考えてよい。[19]

未知数 d を含む，STAR モデルの線形性のテストをつぎのように考える。すなわち，(24)と(25)が

$$y_t+\pi_0+\pi' w_t=\varepsilon_t$$

に帰着されるかを調べる。ただし，$1+\sum_{j=1}^{p}\pi_j z^j=0$ の根は単位円の外にある。

このテストを F に関して適当なクラスを考えると，扱いやすい形でテストが実現できる。具体的には，以下の条件を考える。

条件 1

(i) 関数 F は，奇関数，単調増加，ある正数 a に対して区間 $(-a, a)$ 上で適当な整数 $s\geq 0$ に対して，$2s+1$ 階までの微分が存在して，$2s+1$ 階においてゼロでない。

(ii) $F(0)=0$, $1\leq k\leq 2s+1$ である奇数の k について，

$$\left[\frac{d^k F(z)}{dz^k}\right]_{z=0}\neq 0$$

$F(0)=0$ はそれほど制限的ではない。なんとなれば，$\tilde{F}(z)=F(z)-F(0)$ と定義しなおせばよい。また，$\{\varepsilon_t\}$ の正規性の仮定は弱めることができる。しかし，検定に高次のモーメントを考慮する必

(19) Φ を正規分布の累積分布として，$F(z_t)=\Phi(\gamma(y_{t-d}-c))$ とおくと，(24)は Chang and Tong (1988a) の STAR モデルになる。なお，SETAR (Self-Exciting Threshold AutoRegressive) モデルは，正規 STAR モデルにおいて $\gamma\to\infty$ とし，Φ をヘビサイド関数にした特殊なものとみることもできる。

要がでてくる。

6. 2　一次の検定

観察された時系列 $y_{-p+1}, \cdots, y_0, y_1, y_2, \cdots, y_T$ を考える。ただし，固定された p に対して $y_{-p+1}, \cdots, y_0$ は，事前観測データと考え，確定値として取り扱う。われわれは，(24)において，

$$H_0: \theta_0=0, \theta=0 \tag{26}$$

を帰無仮説とし，少なくともひとつの $\theta_j \neq 0\,(j=0, 1, \cdots, p)$ が成立することを対立仮説とする。

(26)の検定をするために(24)を直接推定したいが，F を特定化しない限り，通常の最尤法は適用できない。そこで，$F(\cdot)$ を線形近似することを考える。

最初に条件1の(i)について $s=0$ として満たされると仮定する。$F(\cdot)$ を

$$T_1(z)=g_1 z \tag{27}$$

で近似する。ここで，$g_1=F'(0)$ である。$z=\gamma(a'w_t-c)$ と定義し，(27)を(24)の $F(\gamma(a'w_t-c))$ に代入すると，

$$y_t+\pi_0+\pi' w_t+\phi_0(a'w_t-c)+\phi' w_t(a'w_t-c)=\eta_t \tag{28}$$

を得る。ただし，$\phi_0=\gamma g_1 \theta_0$, $\phi=\gamma g_1 \theta$ である。ここで，(28)は純粋に(26)の検定を行なうための補助モデルにすぎない。実際，(28)は一般的には，発散してしまうような，意味のない時系列モデルである。

(26)の下，(28)において $\phi_j=0, (j=0, \cdots, p)$ と $\eta_t=\varepsilon_t$ が成り立つ。thresholdパラメター c は識別できないので，われわれは(28)の枠組みを直接検定することはできない。そこで，(28)のパラメターを変換して

$$y_t+\alpha_0+\alpha' w_t+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\phi_{ij} y_{t-1} y_{t-j}=\eta_t \tag{29}$$

を得る。帰無仮説は，$H_0'': \phi_{ij}=0, (i=1, \cdots, p, i=1, \cdots, p)$ である。検定は，通常の最小自乗法に基づく。問題は，ϕ_0 が π_0 や π から分離できないため，$\theta_j, (j=1, \cdots, p)$ が「小さく」，θ_0 が「大きい」とき十分な検出力をもたない可能性があることである。

実際の検定は次のように行なう。

(i)　y_t を $\{1, y_{t-j}; j=1, \cdots, p\}$ の上に回帰し，残差 $\hat{\varepsilon}_t, (t=1, \cdots, T)$ を作る。また，$\mathrm{SSE}_0=\Sigma\,\hat{\varepsilon}_t^2$ と定義する。

(ii)　$\hat{\varepsilon}_t$ を $\{1, y_{t-i}, y_{t-i} y_{t-j}; i=1, \cdots, p; j=1, \cdots, p\}$ に回帰して，残差 $\hat{\eta}_t, (t=1, \cdots, T)$ を作る。また，$\mathrm{SSE}_1=\Sigma\,\hat{\eta}_t^2$ と定義する。

(iii)　検定統計量

$$S_1=\frac{T(\mathrm{SSE}_0-\mathrm{SSE}_1)}{\mathrm{SSE}_0} \tag{30}$$

を計算する。

帰無仮説 H_0 の下で，S_1 は漸近的に $\chi^2_{tp(p+1)}$ に従う。(30) の値が大きければ値が棄却される。[20]

このテストを考える妥当性は，つぎのように正当化できる。別の帰無仮設 H_0': $\gamma=0$ を考えると，すでに述べたように，$(a, c, \theta_0, \theta)\in\Theta$ は識別できない。しかし Saikkonen and Luukkonen (1988) に従って，まず識別されないパラメターをまず既知としてラグランジュ乗数テストを行ない，(a, c, θ_0, θ) をいろいろ動かして，最大値を Θ から選んで，それを最終的な検定統計量とする。これにより，S_1 はラグランジュ乗数テストと見なせる。

6. 3　3次の検定

(30) で求められた S_1 は $\theta_0\neq 0$ の対立仮説に対し感応的でないかもしれない。この点を $F(\cdot)$ の近似を 3 次関数で行なうことで改良する。条件 1 の (i) が $s=1$ として成立すると仮定して，

$$T_3(z)=g_1 z+g_3 z^3,\ g_3=\frac{1}{6}\left[\frac{d^3F(z)}{dz^3}\right]_{z=0} \tag{31}$$

という近似を考える。(31) を (24) の $F(\gamma(a'w_t-c))$ に代入すると，

$$y_t+\pi_0+\pi' w_t+\phi_0(a'w_w-c)+\phi' w_t(a'w_t-c)+\delta_0(a'w_w-c)^3+\delta' w_t(a'w_w-c)^3=\nu_t \tag{32}$$

という補助的なモデルを得る。ここで，$\delta_j=\theta_j\gamma^3 g_3, (j=0, 1, \cdots, p)$，$\delta=(\delta_1, \cdots, \delta_p)$ とする。(32) において $\phi_0=\delta_0=0$，$\phi=\delta=0$ を帰無仮説とすると，c が識別されないため問題が起こる。そこで，$(a'w_t-c)^3$ を展開して，項をまとめることで問題を回避する。具体的には，次の補助モデルを用いる。

$$y_t+\alpha_0+\alpha' w_t+\phi' w_t w'_t a+\delta_0(a'w_t)^3+\delta_0^*(a'w_t)^2+\delta' w_t(a'w_t)^3+\delta^{*\prime} w_t(a'w_t)^2=\nu_t \tag{33}$$

ここで，$\delta_0, \delta=0$ は $\delta_0^*, \delta^*=0$ を含意する。(25) から $k=2, 3$ に対して

$$(a'w_t)^k=\sum_{j=1}^{p} a_j y_{t-j}^k,$$

となり，(33) は

$$y_t+\beta_0+\beta' w_t+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\zeta_{ij}y_{t-i}y_{t-j}+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\psi_{ij}y_{t-i}y_{t-j}^2+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\kappa_{ij}y_{t-i}y_{t-j}^3=\nu_t \tag{34}$$

(34) での帰無仮説は，

$$H_0^{(3)}: \zeta_{ij}=0\ (i=1, \cdots, p;\ j=i, \cdots, p),\ \psi_{ij}=\kappa_{ij}=0\ (i, j=1, \cdots, p) \tag{35}$$

となる。

(20)　このテストは，Tsay (1986) の線形性の検定と同等である。

実際の検定手続きは，以下のようになる。

(i)　y_t を $\{1, y_{t-j}; j=1, \cdots, p\}$ の上に回帰し，残差 $\hat{\varepsilon}_t, (t=1, \cdots, T)$ を作る。また，$\mathrm{SSE}_0=\Sigma\,\hat{\varepsilon}_t^2$ と定義する。これは，前の節と同じ。

(ii)　$\hat{\varepsilon}_t$ を $\{1, y_{t-i}, y_{t-i}y_{t-j}; i=1, \cdots, p; j=i, \cdots, p; y_{t-i}y^k{}_{t-j}; i, j=1, \cdots, p; k=2, 3\}$ の上に回帰し，その残差を $\hat{\nu}_t, (t=1, \cdots, T)$ とし，$\mathrm{SSE}_2=\Sigma\,\hat{\nu}_t^2$ と定義する。

(iii)　検定統計量

$$S_2=\frac{T(\mathrm{SSE}_0-\mathrm{SSE}_2)}{\mathrm{SSE}_0} \tag{36}$$

を計算する。

(36)の S_2 が大きいほど棄却されやすくなる。なお，S_2 は $\chi^2_{\frac{1}{2}p(p+1)+2p^2}$ に従う。

6. 4　一次の検定手続きの改良

一次と三次の検定手続きを比べると，後者は $2p^2$ 自由度が大きい。この点を改良する。(34)の ζ や ψ は θ_0 の関数とみなす。(29)において三次の項を考慮して

$$y_t+\alpha_0+\alpha' w_t+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\phi_{ij}y_{t-i}y_{t-j}+\sum_{j=1}^{p}\psi_j y_{t-j}^3=\eta_t^* \tag{37}$$

を得る。ここで，帰無仮説を

$$H_0^{(4)}: \phi_{ij}=0\,(i=1, \cdots, p; j=i, \cdots, p),\ \psi_j=0\,(j=1, \cdots, p) \tag{38}$$

とする。検定手続きも，これまでと同様であり，(ii)での回帰の対象が異なるだけで，検定統計量も

$$S_3=\frac{T(\mathrm{SSE}_0-\mathrm{SSE}_3)}{\mathrm{SSE}_0} \tag{36}$$

となり，これが $\chi^2_{\frac{1}{2}p(p+1)+p}$ に従うことを利用する。

6. 5　計　　測

計測は，実質GNP，実質固定資本形成，実質家計消費支出，鉱工業生産指数の原系列を対数変換したものに季節階差を施したものと，実質GNP，実質固定資本形成，実質家計消費支出，鉱工業生産指数の季節調整済み系列を対数変換したのち，1階階差をとったものについて行なった。期間については，1970年代初期の構造変化前（1956年1期から1970年4期），石油ショック後（1974年1期から1991年4期），全期間（1956年1期から1991年4期）の三つのケースを考える。[21] また，STARモデルは1次モデル，3次モデル，1次モデルの改良版をそれぞれ試した。ラグ次数については1から5まで動かし，p-値の最小な次数の結果を表9-表11に示す。最小なp-値をとるのは，適切な次

(21)　1971年1期から73年4期を含めると，極端に強い影響がでるために除いた。

数の選択時に検定力が最大になるとの考えによる。[22] 各表の上段は原系列の季節階差データに対応し，下段は季節調整済み系列の階差データに対応する。

表 9　STAR モデルによる線形性の検定（1 次モデル）

	IIP85	I85	GNP85	CH85
構造変化	0.000225*	0.000875*	0.078008	0.085654
の前	0.000137*	0.021912	0.021593	0.022728
構造変化	0.000040*	0.011421	0.005103*	0.000005*
の後	0.000146*	0.000945*	0.016395	0.001410*
全期間	0.000106*	0.000009*	0.019733	0.002766*
	0.000020*	0.033305	0.011439	0.002144*

表10　STAR モデルによる線形性の検定（3 次モデル）

	IIP85	I85	GNP85	CH85
構造変化	0.003498*	0.011225	0.103063	0.116278
の前	0.000817*	0.073265	0.000434*	0.004144*
構造変化	0.000224*	0.057200	0.067939	0.000023*
の後	0.000007*	0.001809*	0.140562	0.018796
全期間	0.000019*	0.000145*	0.000524*	0.000016*
	0.000057*	0.007851*	0.000045*	0.000994*

表11　STAR モデルによる線形性の検定（1 次モデルの改良版）

	IIP85	I85	GNP85	CH85
構造変化	0.000641*	0.003917*	0.077252	0.072846
の前	0.000180*	0.042192	0.002009*	0.005547*
構造変化	0.000037*	0.001748*	0.024946	0.000014*
の後	0.000591*	0.000551*	0.043533	0.004924*
全期間	0.000052*	0.000045*	0.008371*	0.000010*
	0.000020*	0.018961	0.000889*	0.000324*

結果をみると，いくつかの系列について非線形性が確認される。特に鉱工業生産指数は季節性の処理方法によらず，強い非線形性を示す（線形性が棄却された）。また，消費支出，固定資本形成に石油ショック後に概ね非線形性が観測される。なお全期間での計測で非線形が観測されるのは，1970年代の構造変化が非線形性としてあらわれるためだと思われる。

これまで時系列の非線形性を扱ってきた。データは非線形モデルを示唆するものの，それが極限閉軌道をもつ非線形景気循環理論に対応するものかどうかはわからない。次の節では極限閉軌道の存在の現実的可能性を探る。

(22)　ラグ最大次数の 5 は，計測前に AR モデルをあてはめたときの AIC を考慮して決定した。

7．非線形景気循環理論の実証

すでに3節で見たように，極限閉軌道をもつ連続型力学系を離散的時系列によって推定するには，指数ARモデルが適当である。この節では日本経済のデータを使って，指数ARモデルを推定しその結果を検討する。

さて指数ARモデルは

$$X_t=(\phi_1+\pi_1 e^{-X_{t-1}^2})X_{t-1}+(\phi_2+\pi_2 e^{-X_{t-1}^2})X_{t-2}+\varepsilon_t$$

という形をしている。われわれは，ε_t が各時点独立に同一の正規分布に従うと仮定する。上の指数ARモデルは

$$X_t=(\phi_1+\pi_1 e^{-X_{t-1}^2})X_{t-1}+(\phi_2+\pi_2 e^{-X_{t-1}^2})X_{t-2}+\varepsilon_t \tag{39}$$

のように一般化することができる。この一般化モデルを厳密に最尤推定しようとすると非常に複雑になる。そこで，われわれは非線形最小自乗法によって推定することにしよう。ただし，γ が未知のままでは計算量が多くなるため，実際には $\gamma=1$ を仮定して推定せざるを得なかった。[23]

計測は，実質GDP，実質GNP，実質固定資本形成，鉱工業生産指数の原系列を対数変換したものに季節階差を施したものと，実質GDP，実質GNP，実質固定資本形成，鉱工業生産指数の季節調整済み系列を対数変換したのち1階階差をとったものについて行なった。期間については，1970年代初期の構造変化前，石油ショック後，全期間の3ケースを考える。ただし，各系列とも標本平均がゼロになるように計測前に補正化をおこなった。結果は表12に示す通りである。表にある係数の推定値の右となりの括弧でかこまれた数値は各係数の限界有意水準（marginal significance level）である。

表12からすぐ分かるように，一部をのぞいてフィットはよくない。また係数が有意と思われるケースも少ない。さらに有意と思われる，GNPと消費支出の全期間通じての計測については，ゼロの近傍ではそれぞれ近似的に

$$X_t=0.9288\,X_{t-1}-0.0181\,X_{t-2}+\varepsilon_t \tag{40}$$

$$X_t=0.9915\,X_{t-1}-0.01075\,X_{t-2}+\varepsilon_t \tag{41}$$

に従う。(40)の固有根が0.90885と0.01996，(41)の固有根が0.8677と0.1238でともに絶対値が1より小さく，二つともゼロの近傍で安定である。よってシミュレーションをするまでもなく，推定した指数ARモデルが極限閉軌道を持ち得ないことがわかる。

結局日本経済の時系列データに関する限り，極限閉軌道として景気循環を表現するモデルの妥当性は確認されない。これは指数ARモデル(39)において $\gamma=1$ とおいて推定したなどの理由による

(23) 最尤推定量が非線形最小自乗推定量に漸近的に等しくなることを示すことができる。付録を参照のこと。

ものではなく，明らかに減衰振動しているように見える日本経済の時系列データのためだといえよう。

表12　指数 AR モデルの推定結果

	IIP85		I85		GNP85		CH85	
構造変化前	$R^2=$	0.752130	$R^2=$	0.674615	$R^2=$	0.411242	$R^2=$	0.220875
	$DW=$	0.960987	$DW=$	1.685456	$DW=$	2.065246	$DW=$	1.952591
ϕ_1	11.4492	(0.1498)	-18.6669	(0.2276)	-68.3041	(0.5118)	-140.1108	(0.4045)
π_1	-10.6176	(0.1826)	19.6405	(0.2087)	69.0001	(0.5079)	140.6247	(0.4030)
ϕ_2	-11.8317	(0.1494)	18.8815	(0.2279)	70.4417	(0.5118)	143.3897	(0.4045)
π_2	11.8465	(0.1492)	-19.0349	(0.2284)	-70.4502	(0.5118)	-143.3872	(0.4045)
構造変化後	$R^2=$	0.829823	$R^2=$	0.789990	$R^2=$	0.457929	$R^2=$	0.556559
	$DW=$	2.007003	$DW=$	1.969415	$DW=$	1.828408	$DW=$	1.956434
ϕ_1	-72.4816	(0.4753)	5.2852	(0.9386)	-800.7740	(0.4556)	332.4827	(0.4097)
π_1	74.0512	(0.4662)	-4.2553	(0.9507)	801.5353	(0.4553)	-331.8674	(0.4107)
ϕ_2	-20.3376	(0.8587)	-29.9852	(0.7041)	412.2568	(0.7720)	-192.8842	(0.6767)
π_2	19.7262	(0.8630)	29.8976	(0.7054)	-412.1875	(0.7720)	192.8565	(0.6768)
全期間	$R^2=$	0.831844	$R^2=$	0.8365	$R^2=$	0.771848	$R^2=$	0.686047
	$DW=$	0.828402	$DW=$	1.681308	$DW=$	1.994472	$DW=$	2.208971
ϕ_1	3.0427	(0.5422)	6.7781	(0.2336)	-58.8889	(0.0250)	-143.0533	(0.0006)
π_1	-2.1288	(0.6721)	-5.8920	(0.3016)	59.8177	(0.0230)	144.0448	(0.0006)
ϕ_2	-3.1169	(0.5450)	-6.8646	(0.2333)	60.7290	(0.0250)	146.3940	(0.0006)
π_2	3.1319	(0.5455)	6.8915	(0.2319)	-60.7471	(0.0250)	-146.5015	(0.0006)

8．結　　論

この論文では，経済時系列の非線形性の有無を検証し，さらに既存の内生的景気循環理論の妥当性をデータから明らかにしようとした。

単位根の検定に関しては，山本 (1988) などの既存の研究が明らかにしているように，国民総生産ならびに，国民総支出の構成項目の多くについて，単位根の存在が認められる。
もちろん，日本経済が1970年代前半に大きな構造変化を経験していること，t 値型の検定力の低さを考えると，この結論は慎重に扱う必要がある。

Neftci モデルによる検定については，鉱工業生産指数を含めていくつかの時系列について非線形であるとの帰無仮説を棄却することができなかった。言い換えると，非線形の可能性を残した。ただし，原系列の対数変換に季節階差を施したものと，季節調整済み系列の対数変換データに 1 階階差を施したもので結果が大きく異なる。これは，後者の微小な変動の激しさに基づくと思われる。Neftci モデルのように極端に情報を切り捨てた系列を扱う場合，季節調整フィルターの選択がどの程度結果に影響するかを確かめるのは今後の課題とする。

STAR モデルを用いた検定でもいくつかの時系列に関して，非線形性を示唆する結果を得た。特に鉱工業生産指数と家計消費支出については構造変化後と全期間について非線形性が確認されたといってよい。また，GNP についても非線形性が全期間について観察された。ただし，1970年代前半の構造変化が非線形性としてとらえられている可能性があり，この結論は慎重に扱うべきであ

る。

指数 AR モデルのあてはめによる極限閉軌道の存在について，今回の計測は否定的である。原因として，全体的に減衰振動にみえるデータ，微小変動が多くのデータで顕著に観察されること，指数 AR モデルの選択，などが疑われる。極限閉軌道をもち定常性を満足する代替的なモデルがないため，現状では指数 AR モデルを使わざるを得ない。他の国についての計測については今後の課題としたい。

結論として，日本経済の時系列データに関して，非線形景気循環モデルの妥当性が，直接検証された訳ではないが，そうしたモデルを構築する意義を再確認するのに十分な結果は得られた。
ただし，1970年代前半の構造変化を境にデータを分割したことによる標本サイズの低下の効果を考慮する必要がある。

付　　録

単位根検定の実際

ここでは，トレンドを含む系列に関しての t 値型の検定の実際を考える。$\{y_t\}$ をデータ，Δ で階差を表わすものとする。さて，トレンド t と定数項を含む場合の，パラメトリックな検定は

$$\Delta y_t = \mu + \beta t + \alpha_0 y_{t-1} + \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \Delta y_{t-k} + u_t \tag{42}$$

という回帰モデルを想定する。ただし，u_t は i. i. d. に従う。Dickey and Fuller の検定統計量のうち t 値は

$$\frac{\alpha_0 - 1}{SSE}$$

で与えられる。ただし，SSE は推定値の標準誤差，T は標本の大きさである。なお，この統計量は，特殊な分布に従うため，通常は Dickey and Fuller (1979) がモンテカルロ法で求めた表をもとに，左片側検定を行なう。

一方，Stock and Watson の検定量のパラメトリックな検定量は，以下のようになる。まず，

$$y_t = \mu + \beta t + u_t \tag{43}$$

を考え，y_t をトレンド t に回帰した残差を x_t とおき，

$$x_t = \nu + \alpha_0 x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{44}$$

を最小自乗法で推定する。その残差を z_t とし，

$$z_t = \eta + \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k z_{t-k} + w_t \tag{45}$$

を再び最小自乗法で推定する。ここでの推定値 $\hat{\alpha}_k$ から

$$\zeta_t = z_t - \sum_{k=1}^{\ell} \hat{a}_k z_{t-k} \tag{46}$$

を計算する。これを AR(1) モデル

$$\zeta_t = \lambda + \gamma \zeta_{t-1} + v_t \tag{47}$$

に当てはめ，推定値 $\hat{\gamma}$ を得る。Stock and Watson の検定統計量 q_f^τ はこの $\hat{\gamma}$ を用いて，

$$q_f^\tau = T \times (\hat{\gamma} - 1) \tag{48}$$

と書かれる。この統計量も特殊な分布に従うため，Stock and Watson (1988) にある表を参考に検定を行なう。

Neftci モデルにおける初期確率の導出

条件付確率の考え方により

$$\pi_{ij}(t) = P(I_t = i, I_{t-1} = j) \quad (i = 1, 0, j = 1, 0) \tag{49}$$

とおくと，

$$\begin{pmatrix} \pi_{11}(t) \\ \pi_{00}(t) \\ \pi_{10}(t) \\ \pi_{01}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & \lambda_{10} & 0 \\ 0 & \lambda_{00} & 0 & \lambda_{01} \\ 0 & (1-\lambda_{00}) & 0 & (1-\lambda_{01}) \\ (1-\lambda_{11}) & 0 & (1-\lambda_{10}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{11}(t-1) \\ \pi_{00}(t-1) \\ \pi_{10}(t-1) \\ \pi_{01}(t-1) \end{pmatrix} \tag{50}$$

が成立する。これを簡単に $\Pi(t) = \Lambda \Pi(t-1)$ と書くことにする。

一方，われわれは定常過程を考えているから，$\Pi(t)$ は一定のはずである。よって，初期確率を求める方程式

$$\Pi = \Lambda \Pi \tag{51}$$

を得る。Λ のランクは 3 であり，実際には

$$\Sigma \pi_{ij} = 1 \tag{52}$$

と連立して解をもとめる。

解は

$$\begin{aligned} \pi_{11} &= (1-\lambda_{00})\lambda_{10}/D \\ \pi_{00} &= (1-\lambda_{11})\lambda_{01}/D \\ \pi_{01} &= \pi_{10} = (1-\lambda_{00})(1-\lambda_{11})/D \end{aligned} \tag{53}$$

ここで，

$$D = (1-\lambda_{11})(1-\lambda_{00}+\lambda_{01}) + (1-\lambda_{00})(1-\lambda_{11}+\lambda_{10}) \tag{54}$$

である。

指数 AR モデルの推定

まず，一般的な指数 AR モデル，

$$X_t=(\phi_1+\pi_1 e^{-\gamma X_{t-1}^2})X_{t-1}+(\phi_2+\pi_2 e^{-\gamma X_{t-1}^2})X_{t-2}+\varepsilon_t \tag{55}$$

を考える。[24] 観察されたデータを $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_T$ とする。ε_t の分散を σ^2 と書くことにすると，パラメター $\phi_1, \phi_2, \pi_1, \pi_2, \gamma, \sigma^2$ を持つ(55)の尤度は，

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \cdots, x_T \mid \phi_1, \phi_2, \pi_1, \pi_2, \gamma, \sigma^2) &= P(x_1, x_2 \mid \phi_1, \phi_2, \pi_1, \pi_2, \gamma, \sigma^2) \\ &\quad \times P(x_3, \cdots, x_T \mid x_1, x_2, \phi_1, \phi_2, \pi_1, \pi_2, \gamma, \sigma^2) \end{aligned} \tag{56}$$

と書ける。ここで，

$$P(x_1, x_2 \mid \phi_1, \phi_2, \pi_1, \pi_2, \gamma, \sigma^2)$$

は初期値 x_1, x_2 の分布，

$$P(x_3, \cdots, x_T \mid x_1, x_2, \phi_1, \phi_2, \pi_1, \pi_2, \gamma, \sigma^2)$$

は初期値 x_1, x_2 が与えられたときの $x_3, \cdots, x_T$ の条件付分布である。

(55)より

$$\varepsilon_t=x_t-\sum_{i=1}^{2}\{\phi_i+e^{-\gamma X_{t-1}^2}\}x_{t-i} \tag{57}$$

であり，これを $(x_3, \cdots, x_T)$ から $(\varepsilon_3, \cdots, \varepsilon_T)$ への変換とみるとき，そのヤコビアンは若干の計算の後，1であることが分かる。よって，(56)の第二項は

$$\begin{aligned} &P(x_3, \cdots, x_T \mid x_1, x_2, \phi_1, \phi_2, \pi_1, \pi_2, \gamma, \sigma^2) \\ &\quad =P(\varepsilon_3, \cdots, \varepsilon_T \mid x_1, x_2, \phi_1, \phi_2, \pi_1, \pi_2, \gamma, \sigma^2) \\ &\quad =\prod_{i=3}^{T} P(\varepsilon_i \mid x_{i-1}, x_{i-2}, \phi_1, \phi_2, \pi_1, \pi_2, \gamma, \sigma^2) \\ &\quad =\prod_{i=3}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x_i-\sum_{k=1}^{2}\{\phi_k+e^{-\gamma X_{t-1}^2}\}x_{i-k}\right]^2\right\} \end{aligned} \tag{58}$$

と変形できる。これから，(55)の対数尤度は

$$\begin{aligned} \ell(x_1, \cdots, x_T \mid \phi_1, \phi_2, \pi_1, \pi_2, \gamma, \sigma^2) &= \log P(x_1, x_2 \mid \phi_1, \phi_2, \pi_1, \pi_2, \gamma, \sigma^2) \\ &\quad -\frac{T-2}{2}\log 2\pi-\frac{T-2}{2}\log \sigma^2 \\ &\quad -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=3}^{T}\left[x_i-\sum_{k=1}^{2}\{\phi_k+e^{-\gamma x_{t-1}^2}\}x_{i-k}\right]^2, \end{aligned} \tag{59}$$

と求められる。さて，(59)の第1項は他の項の $\frac{1}{T}$ のオーダーでしか対数尤度に貢献しないか，標本の大きさ T が十分大きいときこれを無視してもよい。

ここで(59)の第1項を無視すると，最尤推定値 $(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \hat{\gamma}, \hat{\sigma}^2)$ において，

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2}=0$$

(24) この部分は尾崎 (1989) に多くを負う。

であり，$\hat{\sigma}^2$ は

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{T-2}\sum_{i=3}^{T}\left[x_i-\sum_{k=1}^{2}\{\phi_k+e^{-\gamma X_{t-1}^2}\}x_{i-k}\right]^2 \tag{60}$$

として与えられる。この時

$$\ell=\frac{T-2}{2}\log 2\pi-\frac{T-2}{2}\log\hat{\sigma}^2-\frac{T-2}{2} \tag{61}$$

となる。結局，最尤推定値は

$$\sum_{i=3}^{T}\left[x_i-\sum_{k=1}^{2}\{\phi_k+e^{-\gamma X_{t-1}^2}\}x_{i-k}\right]^2 \tag{62}$$

を最小にすることに帰着される。

参 考 文 献

Akaike, H. (1980) Seasonal Adjustment by a Bayesian Modeling, *Journal of Time Series Analysis*, 1, 1-13.

Banerjee, A., Lumsdaine, R.L. and Stock, J.H. (1990) Recursive and Sequential Tests of the Unit Root and Trend Break Hypotheses: Theory and International Evidence, NBER Working Paper No. 3510.

Barro, R.J. (1976) Rational Expectations and the Role of Monetary Plicy, *Journal of Monetary Economics*, 2, 1-32.

Barro, R.J. (1989) *Modern Business Cycle Theory*, Cambridgem, Massachusetts, MIT Press.

Beaudry, P. and Koop, G. (1993) Do recessions change output?, *Journal of Monetary Economics*, 31, 149-63.

Benassy, J.P. (1984) A Non-Walrasian Model of the Business Cycle, *Journal of Economic Behavior and Organization*, 5 77-89.

Benhabib, J (1992) *Cycles and Chaos in Ecnomic Equilibrium*, Princeton, NJ, Princeton University Press.

Beveridge, S. and Nelson, C.R. (1981) A New Approach to Decomposition of Economic Time Series into Permanent and Transitory Components with Particular Attention to Measurement of the 'Business Cycles', *Journal of Monetary Economics*, 7, 151-74.

Blatt, J.M. (1978) On the Econometric Approach to Business Cylcle Modeling, *Oxford Economic Papers*, 20, 292-300.

Boldrin, M. and Woodford, M. (1990) Equilibrium Models Displaying Endogenous Fulctuations and Chaos, *Journal of Monetary Economics*, 25, 189-222.

Burns, A.F. and Mitchell, W.C. (1946) *Measuring Business Cycles*, New York, NBER.

Brock, W.A., Hsieh, D.A. and LeBaron, B. (1991) *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability*, MIT Press.

Cochrane, J.H. (1991) A Critique of the Application of Unit Root Tests, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 15, 275-284.

Dickey, D.A. and Fuller, W.A. (1979) Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root, *Journal of American Statistical Association*, 74, 489-93.

Dickey, D.A. and Fuller, W.A. (1981) Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root, *Econometrica*, 49, 1057-72.

Falk, B. (1986) Further Evidence on the Asymmetric Behavior of Econoic Time Series over the Business Cycles, Journal of Political Economy, 94, 1096-109.

Frisch, R (1933) Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics, in *Economic Essays in Honor of Gustav Cassel*, Allen & Unwin.

Goodwin, R.M. (1951) The Nonlinear Accelerator and the Persistence of Business Cycles, *Econometrica*, 19, 1-17.

Grandmont, J.M. (1985) On Endogenous Competitive Cycles, *Econometrica*, 53, 995-1045.

Hamilton, J.D. (1989) A New Approach to the Economic Analysis of Non-Stationary Time Series and the Business Cycle, *Econometrica*, 57, 357-384.

Hickman, B.G. (1972) *Econometric Models of Cyclical Behaviour*, Princeton University Press, NJ (2 vols).

Hicks, J.R. (1950) *A Contribution to the Theory of the Trade Cycle*, Oxford University Press, Oxford.

Kaldor, N, (1940) A Model of the Trade Cycle, *Economic Journal*, 50, 78-92.

Kitagawa, G. and Gersch, W. (1984) A Smoothness Priors — State Space Modeling of Time Series with Trend and Seasonality, *Journal of American Statistical Association*, 79, 379-89.

Kydland, F.E. and Prescott, B.C. (1982) Time to Build and Aggregate Fluctuations, *Econometrica*, 50, 1345-70.

Long, J.B. and Plosser, C.I. (1983) Real Business Cycles, *Journal of Political Economy*, 91, 39-69.

Lucas, R.E. Jr. (1977) An Equlibrium Model of the Business Cycle, *Journal of Political Economy*, 83, 1113-44.

Lucas, R.E. Jr. (1977) Understanding Business Cycles, in *Stabilization of the domestic and international economy*, ed. Karl Brunner and Allan H. Meltzer, Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy 5: 7-29, Amsterdam, North-Holland.

Luukkonen, R., Saikkonen, P. and Teräsvirta (1988) Testing Linearity against Smooth Transition Autoregressive Models, *Biometrika*, 75, 491-99.

Neftci, S.N. (1984) Are Economic Time Series Symmetric over the Business Cycle?, *Journal of Political Economy*, 92, 307-28.

Nelson, C.R. and Plosser, C.I. (1982) Trends and Random Walks in Macroecnomic Time Series, *Journal of Monetary Economics*, 10, 139-62.

Nisio, M. (1960) On Polynomial Approximation for Strictly Stationary Processes, *Journal of Mathematics Society of Japan*, 12, 207-26.

Ozaki, T. (1985) Non-linear Time Series Models and Dynamical Systems, in *Handbook of Statistics*, 5, *(ed. E.J. Hannan, P.R. Krishnaiah, and M.M. Rao)*, North-Holland.

Pandit, S.M. and Wu, S.M. (1975) Unique Estimates of the Parameters of a Continuous Stationary Stochastic Process, *Biometrika*, 62, 497-501.

Petruccelli, J.D. (1990) A Comparison of Tests for SETAR-type Non-linearity in Time Series, *Journal of Forecasting*, 9, 25-36.

Phillips, P.C.B. (1987) Time Series Regression with Unit Roots, *Econometrica*, 55, 277-301.

Phillips, P.C.B. and Perron, P. (1988) Testing for a Unit Root in Time Series Regression, Biometrica, 75, 335-46.

Priestley, M.B (1981) *Spectral Analysis and Time Series*, Academic Press, London, (2 volumes).

Rose, A.K. (1986) Four Paradoxes in GNP, *Economic Letters*, 22, 137-41.

Saikkonen, P. & Luukkonen, R. (1988) Lagrange Multiplier Tests for Testitng Non-linearities in Time

Series Models, *Scandinavian Journal of Statistics*, 15, 55-68.
Sargent, T.J. (1987) *Macroeconomic Theory*, 2nd edn., Academic Press, New York.
Shepp, L.A., Slepian, D., and Wyner, A.D. (1980) On Prediction of Moving average Processes, *Bell System Technology Journal*, 59, 367-415.
Sims, C.A. (1988) Bayesian Skepticism on Unit Root Econometrics, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 463-74.
Stock, J.H. and Watson, M.W. (1986) Does GNP have a Unit Root?, *Economic Letters*, 22, 147-51.
Stock, J.H. and Watson, M.W. (1988) Testing for Common Trends, *Journal of American Statistical Association*, 83, 1097-107.
Tong, H. (1983) *Threshold Models in Non-linear Time Series Analysis*, Springer, New York.
Tsay, R.S. (1986) Nonlinearity Tests for Time Series, *Biometrika*, 73, 461-6.
Wasserfallen, W. (1986) Non-Stationarities in Macro-economic Time Series —Further Evidence and Implications, *Canadian Journal of Economics*, 19, 498-510.
北坂真一（1993）「日本経済における構造変化と景気変動 —Structral VAR Modelによる分析」『季刊理論経済学』，44巻，142-158.
国友直人・佐藤整尚（1994）経済時系列のおける非線形性と不均衡計量経済モデル，in 数理統計学の理論と応用（竹内啓他編），東京大学出版会.
山本拓（1988）『経済の時系列分析』，創文社.
吉川洋（1992）『日本経済とマクロ経済学』，東洋経済新報社.
尾崎統（1989）『時系列論』，放送大学テキスト.

（経済学部助教授）