Title	収穫逓増と限界費用価格形成原理
Sub Title	Increasing returns and marginal cost pricing principle
Author	福岡, 正夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1995
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.88, No.3 (1995. 10) ,p.347(15)- 362(30)
JaLC DOI	10.14991/001.19951001-0015
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19951001-0015

「三田学会雑誌」88巻3号（1995年10月）

収穫逓増と限界費用価格形成原理

福　岡　正　夫

1

筆者は前稿[(1)]において，企業が規模に関する収穫逓増の事態をも含め，非凸の生産集合をもちうる場合の一般均衡モデルについて考察した。そのさい当該の企業はあらかじめ指定された特定の価格形成方式にしたがって生産者価格を決定するものと仮定し，関連文献の定石に倣ってそうした行動原理を生産集合境界上の各点にそれぞれ価格ベクトルを対応させる凸値，優半連続の価格対応として定式化した。

上記のような対応ルールのより具体的な内容としては，デュプイ以降ピグウやホテリングなどに連なるいわゆる限界費用価格形成原理（Marginal Cost Pricing Principle）が代表例とみなされることが多く，事実前稿でも筆者は暗にこの原理の適用を脳裡において推論を進めた。しかし，その末尾にも記したごとく，前稿のタイプのモデルを考える場合には，それが限界費用原理を想源としているにもかかわらず，実は議論のなかに費用の概念がいっさい現れないという問題点が生じてくる。というのは，その種の一般均衡モデルでは，各企業にとってどの財が生産物で，どの財が生産要素であるかがアプリオリには区別されておらず，その判定は均衡が成立したのちの生産ベクトルの成分の正負に俟つほかはないからである。元来，費用関数の概念が定義されるためには，あらかじめ企業ごとに産出物になる財と投入物になる財とが類別され，前者の数量のそれぞれの組合わせに対して費用の最小化が図られるのでなくてはならない。その手順を経ないで，たんにクラークの意味での法線錐を当該原理の定める価格とするやり方は，たしかに限界原理による価格形成ルール（Marginal Pricing Rule）には違いないが，これを限界**費用**原理による価格形成ルール（Marginal *Cost* Pricing Rule）と呼ぶのは厳密には当を得ていないであろう[(2)]。

（1）　福岡正夫「収穫逓増と一般均衡理論」，『三田学会雑誌』1995年1月号。

（2）　もっともここでいう限界原理も，限界代替率ないしは限界変形率による価格決定にはなっているから，広い意味では限界機会費用原理と呼べるかもしれない。

そこで本稿では，新たにこの論点を考慮に入れ，上記の要領で当初から財の集合が分割されているモデルをつくった上で，あらためて限界原理による価格形成ルールが文字どおりの限界費用原理によるそれと一致するための条件と論理を究明しておくことにした。そのような問題に関連して，事前に産出財と投入財とを区別し，限界費用の概念が明確に定義できるモデルをとり扱ったのは，ディールカー=ゲネリー=ノイエファイント[(3)]をもって嚆矢とする。ついで彼らの議論はボニソー[(4)]によってより精密化され一般化されたが，本稿での筆者の考察がとりわけ負うているのは，さらにそれらに続いて現れたボニソー=コルネー[(5)]およびコルネー[(6)]の二つの業績である。前者は産出財の数量に明示的に非負の制約を加え，したがって限界費用価格形成原理を不等式の形で定式化した上で，どのような条件が限界原理をして限界費用原理たらしめるかを精確に証明した。他方後者は，産出財の自由処分をも考慮に入れることで，産出量には非負の制約を課さず，限界費用原理を等式で定式化して，同種の条件が限界原理と限界費用原理を相互に同値たらしめることを明らかにした。以下に記録するところは，これら二つの成果をまとめて共通の枠組みのなかに統合し，いっそう見やすい形に整理しなおした一つの覚え書にすぎないものである。ただその作業を遂行するにあたっては，局所的に多少の補足改善を図り趣向を凝らしたつもりであるので，そうした点に留意しつつお読みいただければ幸いである。

2

前稿と同様，経済には l 種の財 $(h=1, 2, \cdots, l)$ があり，各企業 $j\,(j=1, 2, \cdots, m)$ の技術的可能性は生産集合 Y_j によって与えられるものとする。Y_j はいうまでもなく R^l の部分集合で，その成分 $y_j=(y_{jh})$ は当該企業の実現可能な生産計画をあらわしている。最初に限界原理による価格形成ルールを考える場合にはあらかじめ財の集合を産出財と投入財に分割することはせず，企業 j にとってどの財 h も，もし $y_{jh}\leqq 0$ となれば投入財となり，$y_{jh}\geqq 0$ となれば産出財となりうる。そして生産集合は

仮定 P　Y_j は非空，閉，また $Y_j-R^l_+\subset Y_j$

(3) E. Dierker, R. Guesnerie and W. Neuefeind, "General Equilibrium When Some Firms Follow Special Pricing Rules", *Econometrica*, November 1985.

(4) Jean-Marc Bonnisseau, "On Two Existence Results of Equilibria in Economies with Increasing Returns", *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 17, Nos. 213, 1988.

(5) Jean-Marc Bonnisseau and Bernard Cornet, "Existence of Marginal Cost Pricing Equilibria: The Nonsmooth Case", *International Economic Review*, August 1990. とりわけその第3節および付録参照。

(6) Bernard Cornet, "Marginal Cost Pricing and Pareto Optimality", in Paul Champsaur *et al*. ed., *Essays in Honor of Edmond Malinvaud*, Vol. I, 1990. とりわけその第4節および第7節参照。

を満たすものと想定される。ここで $Y_j - R^l_+ \subset Y_j$ はいわゆる自由処分の可能性すなわち余分の生産物をコストなしで廃棄できる可能性を意味しており，この仮定のゆえに価格ベクトル p は非負になると考えられる。

すでに述べたように，非凸の生産集合をもつ企業は，それぞれ Y_j の境界上の y_j に対し，指定された価格対応ルール ϕ_j にしたがって価格をつけるわけであるが，そのようなルールとして y_j におけるクラークの意味での法線錐（normal cone）を用いるのが，前記限界原理による価格形成ルールである。いまこれを記号化して，点 y^*_j における Y_j への法線錐を $N_{Y_j}(y^*_j)$ で示すことにすれば，当該のルールは $\phi_j(y^*_j) = N_{Y_j}(y^*_j)$ としてあらわされるであろう。つまり企業 j にとって生産計画と価格の組 $(y^*_j, p^*) \in Y_j \times R^l_+$ が条件

$$\text{(MPR)} \qquad p^* \in N_{Y_j}(y^*_j)$$

を満たすときに，この企業は限界原理による価格形成ルールにしたがうというのである。

このように当面の目的にクラークの法線錐が用いられるのは，それが当該企業にとって利潤を最大化する上での必要条件と考えられるからである。事実，生産計画 y^*_j において利潤の最大値を実現する価格 p^* があるとすれば，それはかならず y^*_j におけるクラークの法線錐に含まれるのでなくてはならない。この点を理解するには，一時主題からは離れるが，クラークの法線錐の意味するところを多少掘り下げて考察しておくのが有益であろう。(7)

一番分かりやすい理解の仕方は，まず p^* を y^*_j で Y_j に垂直なベクトルを考えてみることである。一般に非ゼロのベクトル v が点 x において集合 C に垂直であるとは，$v = x - x'$ とするとき，点 x' が C のなかに一意的な最短距離の点 x をもつことである。あるいは同じことになるが，$v \in \perp_C(x)$ であるとは，x においてのみ C と接するような，x' を中心とする閉球が存在することであるといってもよい。そこでこれを目下の事例に適用して，p^* が y^*_j において Y_j に垂直なベクトルであることを $p^* \in \perp_{Y_j}(y^*_j)$ と書けば，それは $y^*_j + \varepsilon p^*$ を中心とし，$\varepsilon \| p^* \|$ を半径とする閉球 $B(y^*_j + \varepsilon p^*, \varepsilon \| p^* \|)$ が y^*_j においてのみ Y_j と接するような $\varepsilon > 0$ が存在することとして述べることができよう。（図1参照。）

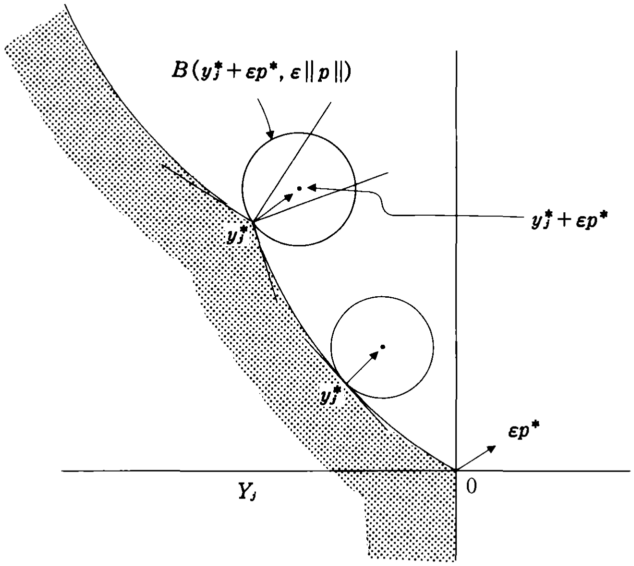
ところが，この垂直ベクトルの条件

$$\exists\, \varepsilon > 0 \qquad \operatorname{int} B(y^*_j + \varepsilon p^*, \varepsilon \| p^* \|) \cap Y_j = \emptyset$$

は，y^*_j が2次関数 $p^* y_j - \rho \| y_j - y^*_j \|^2$ を Y_j の上で最大化していることに等しいのである。この点は，上記の関数の等高面を $p^* y_j - \rho \| y_j - y^*_j \|^2 = \alpha$ として，これを略式に2次元の事例で計算してみれば，等高線が

（7） 以下の説明については F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, 1983, pp.11-12, また Cornet, *op, cit.*, pp. 17-19 参照。

図　1



$$\text{中心}\quad \left(y_{1j}^*+\frac{p_1^*}{2\rho},\ y_{2j}^*+\frac{p_2^*}{2\rho}\right)$$

$$\text{半径}\quad \sqrt{\frac{p_1^{*2}+p_2^{*2}}{4\rho^2}+\frac{p^*y_j^*-\alpha}{\rho}}$$

の円として導かれることからすぐ分かる。点 y_j^* においては $p^*y_j^*=\alpha$ となるから，$(p^*y_j^*-\alpha)/\rho$ の項は消え，したがって $\varepsilon=1/2\rho$ とすれば，y_j^* を通る等高面が前記の球面となるのである。

こうして p^* が垂直ベクトルであるとは，p^* が集合

$$\perp_{Y_j}(y_j^*)=\{p^*\in R^l \mid \exists\,\rho>0,\ \forall\, y_j\in Y_j,\ p^*y_j^*\geqq p^*y_j-\rho\|y_j-y_j^*\|^2\}$$

に含まれることにほかならない。つまり $p^*\in\perp_{Y_j}(y_j^*)$ は，y_j^* が p^* の下で，$-\rho\|y_j-y_j^*\|^2$ の分だけ "perturb" された利潤 p^*y_j を Y_j 上で最大化することを意味するのである。この条件はまた，y_j^* が非線形の価格で評価された2次関数 $(p^*-\rho(y_j-y_j^*))(y_j-y_j^*)$ を最大化すると解することもできるであろう。

クラークの法線錐はこの垂直ベクトルの概念を一般化したもので，後者を用いて極限垂直ベクトルの集合を

$$\hat{N}_{Y_j}(y_j^*)=\{p^*\in R^l \mid \exists\,\{y_j^\nu\}\subset Y_j,\ \{y_j^\nu\}\to y_j^*,\ \exists\,\{p^\nu\}\subset R_+^l,\ \{p^\nu\}\to p^*,\ \text{and}\ \forall\,\nu,\ p^\nu\in\perp_{Y_j}(y_j^\nu)\}$$

と定義すれば，その閉凸包として

$$N_{Y_j}(y_j^*)=\overline{\mathrm{co}}\ \hat{N}_{Y_j}(y_j^*)$$

のように定義される。換言すれば，それは $\hat{N}_{Y_j}(y_j^*)$ を含む R^l の最小の閉凸部分集合であり，極限ベクトルのあいだをすべて埋めつくして，一般には $\hat{N}_{Y_j}(y_j^*)$ の満たさない凸性を recover したも

のと考えればよいであろう。Y_j が非凸の場合，このように $\perp_{Y_j}(y_j^*)$ や $\hat{N}_{Y_j}(y_j^*)$ を拡張することが要請される理由については，すぐあとで言及することになろう。

ところでクラークの法線錐のもう一つの定義法は，接錐（tangent cone）の概念を利用したものである。[8] ここで y_j^* における Y_j への接錐 $T_{Y_j}(y_j^*)$ とは，それぞれ y_j^* および0に収束する列 $\{y_j^\nu\}\subset Y_j$ および $\{t^\nu\}\subset(0,+\infty)$ に対し，v に収束する列 $\{v^\nu\}$ が存在して，ν を十分大きくすれば $y_j^\nu+t^\nu v^\nu\in Y_j$ となるようなすべてのベクトル v の集合である。そのように接錐が定義されれば，クラークの法線錐はその極錐として

$$N_{Y_j}(y_j^*)=(T_{Y_j}(y_j^*))^\circ=\{p^*\mid p^*y_j\leqq 0\quad \text{for all } y_j\in T_{Y_j}(y_j^*)\}$$

のように定義される。この $N_{Y_j}(y_j^*)$ と $T_{Y_j}(y_j^*)$ の関係を分かりやすく図示したものが，つぎの図2aおよび2bである。そこでは $N_{Y_j}(y_j^*)$ が一重の矢印で，$T_{Y_j}(y_j^*)$ が二重の矢印で示してある。と

図　2a

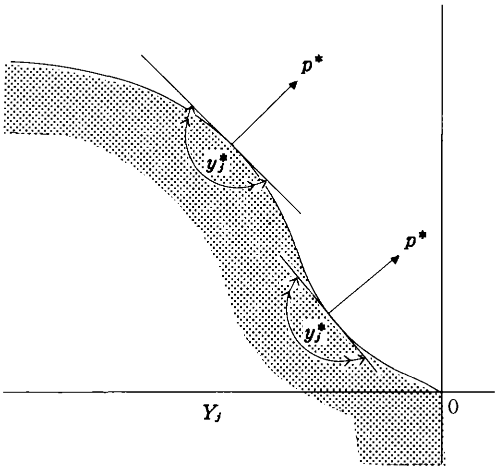
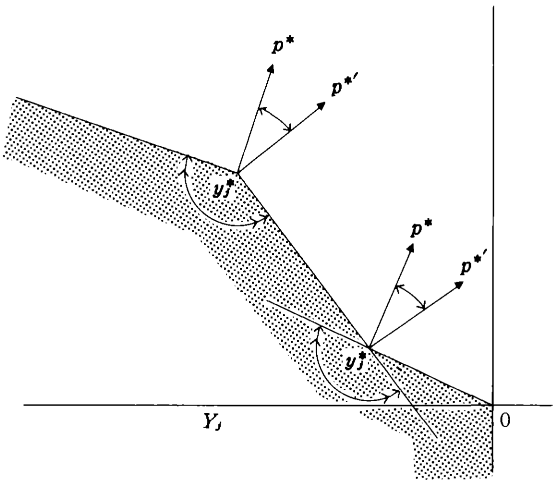


図　2b



くに注意すべきはいわゆる "inward kink" が生じる図2bの右の y_j^* の場合で，その点では垂直ベクトルの錐は $\{0\}$ になってしまうが，クラークの法線錐は $\{\lambda p^*+\mu p^{*\prime}\mid\lambda\geqq 0,\ \mu\geqq 0\}$ として定義され，y_j^* を sustain する所期の役割を果たすことができる。これは前記の接錐の定義から，生産集合が非凸で kink をもつとしても，接錐はそれが図のように「収縮」した形のものとなり，凸となるからである。[9]

（8） Clarke, *op. cit.*, p. 11 参照。

（9） ゲネリーはその先駆的論文（Roger Guesnerie, "Pareto Optimality in Non-Convex Economies", *Econometrica*, January 1975）において，同種の目的にデュボヴィツキー＝ミリューリンに負ういわゆるインテリアー・ディスプレースメントの錐（cone of interior displacement）を用いたが，それが一般性を欠く理由もやはり同じ点に見出される。デュボヴィツキー＝ミリューリンの錐は y_j^* における Y_j の「局所的」な形態を線形化し拡大して考えたもので，形式的には

$$K_{Y_j}(y_j^*)=\{p\in R^l\mid \exists\eta>0,\quad \varepsilon>0,\quad \forall t\in(0,\eta],\{y_j^*\}+tB(y_j^*,\varepsilon)\subset Y_j\}$$

3

ここで本論に戻って，つぎに限界費用原理による価格形成ルールを定式化することにしよう。そのためには前述したように，新たに各企業ごとに投入物となる財と産出物となる財を事前に区別しておくことが必要となる。つまりそれぞれの j について財の集合 $\{1, 2, \cdots, l\}$ をあらかじめ二つの非空部分集合 I_j と O_j に分割し，$y_j \in Y_j$ において $h \in I_j$ なら $y_{jh} \leqq 0$，また $h \in O_j$ なら $y_{jh} \geqq 0$ と定めるのである。以下では記号の方便として

$$R^{I_j} = \{v \in R^l \mid v_h = 0 \quad \text{if} \quad h \notin I_j\}$$

$$R^{O_j} = \{v \in R^l \mid v_h = 0 \quad \text{if} \quad h \notin O_j\}$$

と定義し，一般に $x \in R^l$ のようなすべてのベクトル x について x の R^{I_j} への射影を x_{I_j}，R^{O_j} への射影を x_{O_j} と書くことにする。たとえば x_{I_j} では $h \in I_j$ なら $(x_{I_j})_h = x_h$，$h \notin I_j$ なら $(x_{I_j})_h = 0$ となっており，x_{O_j} についても同様である。

さてこのように記号を定めれば，目下のモデル構成に必要な等産出量集合と費用関数の概念がそれぞれつぎのように定義できることになろう。すなわちすべての $(w, b_j) \in R_+^{I_j} \times R_+^{O_j}$ について

$$Y_j(b_j) = \{-y_{jI_j} \mid y_j \in Y_j \quad \text{such that} \quad y_{jO_j} = b_j\}$$

$$c_j(w, b_j) = \inf \{wa_j \mid a_j \in Y_j(b_j)\} \quad \text{if} \quad Y_j(b_j) \notin \emptyset$$

のようであり，ここで a_j と b_j はそれぞれ企業 j の投入ベクトルと産出ベクトルを，また w は要素価格ベクトルをあらわしている。これらはすべて l 次元ベクトルであり，先述したように該当しない箇所の成分にはすべて 0 が含まれていることに注意されたい。

上記の生産集合と等産出量集合，費用関数については，それぞれつぎの

仮定 P′ Y_j は非空かつ閉，$Y_j(b_j)$ はすべての $b_j \in R_+^{O_j}$ について非空，閉かつ凸で，また $b_j \geqq b_j'$ となるようなすべての $b_j, b_j' \in R_+^{O_j}$ について $Y_j(b_j) \subset Y_j(b_j') + R_+^{I_j}$。$c_j(w, \cdot)$ はす

↘ のように定義される。これを名前の示すようにそのまま原点に移して $K_{Y_j}(0)$ とし，それへの法線ベクトルが y_j^* を sustain する価格であると考えるのである。

図 2a の場合また図 2b の左の y_j^* の場合は，$K_{Y_j}(0)$ は $K_{Y_j}(y_j^*)$ を $T_{Y_j}(0)$ に移したものの内部と一致するから，それへの法線ベクトルの集合はクラークの法線錐と一致する。しかし図 2b の右の y_j^* の場合はこれとは異なり，$K_{Y_j}(0)$ は上記の要領で移動させた生産集合そのものの内部となるが，$T_{Y_j}(0)$ はそれが「収縮」して $K_{Y_j}(0)$ の負の complement にあたるものとなる。したがって $K_{Y_j}(0)$ への法線ベクトルは 0 ベクトルしか存在しないが，$T_{Y_j}(0)$ にはクラークの法線錐が対応するのである。

なお上記の点の平易な説明としては，M. Ali Khan and R. Vohra, "An Extension of the Second Welfare Theorem to Economies with Nonconvexities and Public Goods", *Quarterly Journal of Economics*, May 1987, p. 230 を参照されたい。

べての所与の $w\in R^{I_j}_{+}$ について微分可能で，$\nabla_{O_j} c_j(\cdot,\cdot)$ は連続。[10]
が満たされているものとする。

これらの等産出量集合と費用関数を前提とするとき，限界費用原理による価格形成ルールを $\phi_j(y_j^*)=MCP_{Y_j}(y_j^*)$ で書くとすれば，$p^*\in MCP_{Y_j}(y_j^*)$ であるとは，(y_j^*, p^*) あるいは (a_j^*, b_j^*, p^*) がつぎの二条件を満たすことである。

$$\text{(MCPR)}\quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & p_{I_j}^* a_j^* = c_j(p_{I_j}^*, b_j^*) \\ \text{(ii)} & p_{O_j}^* \leqq \nabla_{O_j} c_j(p_{I_j}^*, b_j^*),\quad (p_{O_j}^* - \nabla_{O_j} c_j(p_{I_j}^*, b_j^*))\, b_j^* = 0 \end{array}$$ [11]

すなわち要素価格 $p_h^*=w_h^*, h\in I_j$ が与えられれば，企業 j はまず所定の産出量 $y_{jh}^*=b_{jh}^*, h\in O_j$ について費用を最小にするように投入量の組合わせ $-y_{ih}^*=a_{jh}^*, h\in I_j$ を決定し，ついでその結果限界費用が定まれば，プラスの b_{jh}^* についてはそれに一致するように，またゼロの b_{jh}^* についてはそれを越えないように，生産物価格 $p_h^*, h\in O_j$ を定めるというのがそれである。

本稿の主要な目的は，前にも述べたごとく，この（MCPR）と前節の（MPR）との関係を解明することにあり，以下での議論の手順としてはまずつぎの第 4 節で上記の仮定 P′ の下に (MPR) ⇒ (MCPR) つまり $N_{Y_j}(y_j^*)\subset MCP_{Y_j}(y_j^*)$ という主張が成り立つことを明らかにし，さらにそのつぎの第 5 節では若干仮定を強化した上で，逆に (MCPR) ⇒ (MPR) つまり $MCP_{Y_j}(y_j^*)\subset N_{Y_j}(y_j^*)$ という主張もまた成り立つことを示したい。

ただその作業にとりかかるに先立って，一つだけ意を用いておかねばならない点がある。それは（MPR）が定義された前節では Y_j が仮定 P を満たすものとされ，したがって自由処分の可能性が認められているのに対して，（MCPR）が定義されている本節においては $y_{jI_j}\in R^{I_j}_{-}$, $y_{jO_j}\in R^{O_j}_{+}$ とされるがゆえに $Y_j\subset R^{I_j}_{-}+R^{O_j}_{+}$ となり，O_j に属する財の自由処分はいっさい認められていないという点である。両ルールの関連を追求しようとする目下の視点からすれば，この点については後者の Y_j を，$h\in O_j$ のような財 h の自由処分をも考慮に入れることによってさらに拡張し，二つの舞

---

(10) ここで $\nabla_{O_j}c_j(w, b_j)$ は w を固定したときの $c_j(w_j,\cdot)$ の b_j における勾配

$$\left(\frac{\partial c_j(w, b_j)}{\partial b_{j1}},\ \frac{\partial c_j(w, b_j)}{\partial b_{j2}},\ \cdots\cdots,\ \frac{\partial c_j(w, b_j)}{\partial b_{jl}}\right)$$

をあらわし，$h\in O_j$ 以外の成分はすべて 0 である。

また目下の考察のように $b_j\in R^{O_j}_{+}$ としている場合には，$\nabla_{O_j}c_j(w, b_j)$ は，$b_{jh}=0$ であればつねに $u_h\geqq 0$ であるようなすべての $u\in R^{O_j}$ について

$$\nabla_{O_j}c_j(w, b_j)\cdot u = \lim_{t\to 0+}[c_j(w, b_j+tu)-c_j(w, b_j)]/t$$

を満たす一意のベクトルであるとされている。それが $c_j(w_j,\cdot)$ の微分可能性の意味するところである。

(11) (ii) はすべての h について

$$p_h^*\leqq \frac{\partial c_j(p_{I_j}^*, b_j^*)}{\partial b_{jh}},\ \text{もし}\ b_{jh}^*>0\ \text{なら}\ p_h^*=\frac{\partial c_j(p_{I_j}^*, b_j^*)}{\partial b_{jh}}$$

ということである。

台のあいだに「連絡路」をつけておくのが望ましいであろう。また経済学的な見地からしても，ある財の生産が不必要な副産物を伴うような場合，それを廃棄できる方途を容認しておくほうがいっそう理に叶っているとも考えられよう。そこで次節以下の議論のためには，ボニソー=コルネーの示唆に倣って Y_j の “free-disposal hull” $\tilde{Y}_j = Y_j - R^l_+$ を導入し，この $\tilde{Y}_j$ を関係究明の共通の場として利用するのが適切であるように思われる。けだしこうしてつくられた $\tilde{Y}_j$ は，明らかに第2節の仮定Pを満たすからである。

ところでこのように Y_j を $\tilde{Y}_j$ に拡大した場合には，すべての $(w, b_j) \in R^{I_j}_+ \times R^{O_j}$ について[12]新しい等産出量集合と費用関数が前の $Y_j(b_j)$, $c_j(w, b_j)$ に照応して

$$\tilde{Y}_j(b_j) = \{-y_{jI_j} \mid y_j \in \tilde{Y}_j \quad \text{such that} \quad y_{jO_j} = b_j\}$$

$$\tilde{c}_j(w, b_j) = \inf\{wa_j \mid a_j \in \tilde{Y}_j(b_j)\} \quad \text{if} \quad \tilde{Y}_j(b_j) \notin \emptyset$$

のように定義される。そして $y^*_j \in \partial \tilde{Y}_j$ に対して $p^* \in MCP_{\tilde{Y}_j}(y^*_j)$ であるとは，$a^*_j = -y^*_{jI_j}$, $b^*_j = y^*_{jI_j}$ および p^* が

(i) $p^*_{I_j} a^*_j = \tilde{c}_j(p^*_{I_j}, b^*_j)$

(ii) $p^*_{O_j} \leqq \nabla_{O_j} \tilde{c}_j(p^*_{I_j}, b^*_j)$, $(p^*_{O_j} - \nabla_{O_j} \tilde{c}_j(p^*_{I_j}, b^*_j))\, b^*_j = 0$

を満たすことである。

ここでのちの推論に援用する二三の命題をあらかじめ導いておくことにしよう。まず任意の $b_j \in R^{O_j}$ についてその負の成分を 0 に置き換えたベクトルすなわち $\max(0, b_{jh})$ から成るベクトルを b_{j+} で記せば，

(a) $\tilde{Y}_j(b_j) = Y_j(b_{j+}) + R^{I_j}_+$ である。事実 $a_j \in \tilde{Y}_j(b_j)$ をとり，$y_j = -a_j + b_j \in \tilde{Y}_j$ とすれば，$y_j' \geqq y_j$ となるような $y_j' \in Y_j$ が存在する。そこで $a_j' = -y'_{jI_j}$, $b_j' = y'_{jO_j}$ とすれば，$b_j' \geqq 0$, $b_j' \geqq b_j$ であるから，当然 $b_j' = b_{j+}$ となり，仮定P′から $Y_j(b_j') \subset Y_j(b_{j+}) + R^{I_j}_+$ となる。ところが $y_j' \geqq y_j$ から $a_j' \leqq a_j$ であるから，$a_j \in Y_j(b_{j+}) + R^{I_j}_+$ であり，よって $\tilde{Y}_j(b_j) \subset Y_j(b_{j+}) + R^{I_j}_+$ である。他方 $a_j \in Y_j(b_{j+}) + R^{I_j}_+$ とすれば，$Y_j(b_{j+})$ から $a_j' \leqq a_j$ となるような a_j' がとれ，$-a_j + b_j \in \{-a_j' + b_{j+}\} - R^l_+ \subset Y_j - R^l_+ = \tilde{Y}_j$ となる。ゆえに $a_j \in \tilde{Y}_j(b_j)$ であり，$Y_j(b_{j+}) + R^{I_j}_+ \subset \tilde{Y}_j(b_j)$ がいえたことになる。

(b) $\tilde{c}_j(w, b_j) = c_j(w, b_{j+})$ となることがいえる。事実，定義といま証明した (a) から $\tilde{c}_j(w, b_j) = \inf\{wa_j \mid a_j \in \tilde{Y}_j(b_j)\} = \inf\{wa_j \mid a_j \in Y_j(b_{j+}) + R^{I_j}_+\}$ であるから，当然 $\tilde{c}_j(w, b_j) = \inf\{wa_j \mid a_j \in Y_j(b_{j+})\}$ であるが，右辺は定義によって $c_j(w, b_{j+})$ にほかならない。

(c) R^{O_j} から $R^{I_j}_+$ への対応 $b_j \to \tilde{Y}_j(b_j)$ は劣半連続である。いまもし $\tilde{Y}_j(\cdot)$ が点 $b_j \in R^{O_j}$ で劣半連続ではなかったとすれば，$a_j \in \tilde{Y}_j(b_j)$, $\varepsilon > 0$, および b_j に収束する点列 $\{b^\nu_j\} \subset R^{O_j}$ があって，どんな a^ν_j を $\tilde{Y}_j(b^\nu_j)$ から選んでも，$\{a^\nu_j\}$ は a_j に近づかず，すべての ν について集合 $\tilde{Y}_j(b^\nu_j)$ と球 $B(a_j, \varepsilon)$ は共通部分をもちえないことになる。ところが仮定P′から $Y_j(b_j)$ はすべての $b_j \in R^{O_j}_+$ に

(12) ここではもはや $b_j \in R^{O_j}_+$ ではなく $b_j \in R^{O_j}$ とされている点に注意されたい。

ついて非空の凸集合であり，また上に (a) として証明したところから $\tilde{Y}_j(b_j)=Y_j(b_{j+})+R^{l_j}_+$ であるから，$\tilde{Y}_j(b_j^\nu)$ もまた非空の凸集合である。そして $B(a_j,\varepsilon)$ は当然非空，凸であるから，ここでこれら二つの集合に凸集合の分離定理が使えて，すべての ν について非ゼロのベクトル w^ν とスカラ c が存在し，

$$w^\nu a_j \geqq c \quad \text{for all } a_j\in \tilde{Y}_j(b_j^\nu)$$

$$w^\nu v_j \leqq c \quad \text{for all } v_j\in B(a_j,\varepsilon)$$

となる。したがって

$$\sup w^\nu B(a_j,\varepsilon) \leqq \inf w^\nu \tilde{Y}_j(b_j^\nu)$$

が成立し，さらに $\tilde{Y}_j$ のつくり方から $\tilde{Y}_j(b_j^\nu)=\tilde{Y}_j(b_j^\nu)+R^{l_j}_+$ であるところから $w^\nu\geqq 0$ である。

ところで $\|h\|\leqq\varepsilon$ のような a_j+h については，当然 $w^\nu(a_j+h)\leqq \sup w^\nu B(a_j,\varepsilon)$ となっている。そこでそのような h として $\|h\|=\varepsilon$ で，しかも w^ν と方向が一致するものを選び，w^ν の長さを $\|w^\nu\|=1$ と基準化すれば，$w^\nu h=\varepsilon$ となるから，$w^\nu a_j+\varepsilon=\sup w^\nu B(a_j,\varepsilon)$ となり，他方また費用関数の定義から $\tilde{c}_j(w^\nu,b_j^\nu)=\inf w^\nu\ \tilde{Y}_j(b_j^\nu)$ となる。よってこれらを上の不等式に用いることにより

$$w^\nu a_j+\varepsilon \leqq \tilde{c}_j(w^\nu,b_j^\nu)$$

を得る。同様に費用関数の定義と $a_j\in\tilde{Y}_j(b_j)$ であることから，$\tilde{c}_j(w^\nu,b_j)\leqq w^\nu a_j$ であるから，両辺に ε を足して $\tilde{c}_j(w^\nu,b_j)+\varepsilon\leqq w^\nu a_j+\varepsilon$ となり，これと上の不等式から

$$\tilde{c}_j(w^\nu,b_j)+\varepsilon\leqq\tilde{c}_j(w^\nu,b_j^\nu)$$

が成り立つ。いまこの式に平均値の定理を用いれば

$$\varepsilon\leqq\tilde{c}_j(w^\nu,b_j^\nu)-\tilde{c}_j(w^\nu,b_j)=\nabla_{o_j}\tilde{c}_j(w^\nu,\lambda b_j^\nu+(1-\lambda)\,b_j)(b_j^\nu-b_j)$$

となる $\lambda\in\,]0,1[$ が存在することになり，ここで $\nu\to\infty$ とすれば $b_j^\nu\to b_j$，したがって $\varepsilon\leqq 0$ とならざるをえない。これは明らかに $\varepsilon>0$ と矛盾する。

4

上記のところに立脚して，本節ではいよいよつぎの定理の成立を示すことにしたい。

定　理　仮定 P′ の下においては，任意の $y_j^*\in\partial\tilde{Y}_j$ に対して $N_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)\subset MCP_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ となる。また $p^*\in N_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ とすれば，$p^*\in MCP_{Y_j}(y_j^{**})$ を満たし，かつ $y_j^{**}\geqq y_j^*$, $p^*y_j^{**}=p^*y_j^*$ となるような $y_j^{**}\in Y_j$ がかならず存在する。

証　明

定理前半部の証明のステップとしては，まず $p^*\in\perp_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ ならかならず $p^*\in MCP_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ とな

ることを示し，ついでこの主張を利用して $p^*\in \hat{N}_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ ならやはり $p^*\in MCP_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ となることを示す。これらの議論が確立すれば，あとは $MCP_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ が凸集合となることを示せばよい。なぜなら $N_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ は定義によって $\hat{N}_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ の凸包にほかならないからである。

そこで $p^*\in \perp_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ から出発して，$a_j^*=-y_{jI_j}^*$, $b_j^*=y_{jO_j}^*$ と書くことにしよう。いま任意の a_j を $\tilde{Y}_j(y_j^*)$ からとり，すべての $t\in[0,1]$ について $a_j(t)=t\,a_j+(1-t)\,a_j^*$ とすれば，仮定P′の $Y_j(b_j^*)$ の凸性から $\tilde{Y}_j(b_j^*)$ も凸となるから，$a_j(t)\in \tilde{Y}_j(b_j^*)$ である。ゆえに $y_j(t)=-a_j(t)+b_j^*$ とすれば，$p^*\in \perp_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ であるところから

$$
\begin{aligned}
p^*(y_j^*-y_j(t)) &= p_{I_j}^*(-a_j^*+a_j(t))\\
&\geqq -\rho\|y_j(t)-y_j^*\|^2=-\rho\|a_j(t)-a_j^*\|^2=-\rho t^2\|a_j-a_j^*\|^2
\end{aligned}
$$

となり，そこで $t\to 0$ とすることにより

$$p_{I_j}^*a_j^*\leqq p_{I_j}^*a_j$$

となる。よって費用関数の定義から $p_{I_j}^*a_j^*=\tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*)$ となり，$p^*\in MCP_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ であることの条件 (i) が成り立ったことになる。

他方，条件 (ii) もまた満たされることをいうためには，つぎの補題を用いるのでなくてはならない。

補　題　任意の $v\in R^{O_j}$，すべての $\rho>0$ について，$(0, a_j^*)$ に収束する $\{t^\nu, a_j^\nu\}\subset(0,+\infty)\times R_+^{I_j}$ で，すべての ν について条件

$$a_j^\nu\in \tilde{Y}_j(b_j^*+t^\nu v)$$

$$p_{I_j}^\nu a_j^\nu=\tilde{c}_j(p_{I_j}^\nu, b_j^*+t^\nu v)$$

$$\text{ここで}\quad p_{I_j}^\nu=p_{I_j}^*+\rho(a_j^\nu-a_j^*)\geqq 0$$

を満たすようなものが存在する。

補題の証明

前節の末尾に示したように $\tilde{Y}_j(\cdot)$ は劣半連続であるから，当然0に収束する正の実数の列 $\{t^\nu\}$ で，すべての ν について $\tilde{Y}_j(b_j^*+t^\nu v)\neq\emptyset$ となるものが存在する。そこでいま $a_j^*, b_j^*, p_{I_j}^*, v\in R^{O_j}$ を所与とし，a を変数とするつぎの最小値問題 $Q_j(\tau)$ をすべての $\tau\geqq 0$ について考えてみるとする。

Minimize

$$q_j(a)=p_{I_j}^*\,a+\frac{\rho}{2}\|a-a_j^*\|^2$$

subject to

$$a\in \tilde{Y}_j(b_j^*+\tau v)$$

$\tilde{Y}_j(b_j^*+\tau v)$ は非空，閉，凸であり，また $q_j(\cdot)$ は正定符号の2次関数であるから，問題 $Q_j(t^\nu)$ はすべての ν について一意解 a_j^ν をもつ。問題のつくり方から，それが $a_j^\nu\in \tilde{Y}_j(b_j^*+t^\nu v)$ を満たし

ていることはいうまでもない。そして1階の必要条件は

$$\nabla q_j(a_j^\nu)(a_j^\nu - a) \leqq 0 \quad \text{for every} \quad a \in \tilde{Y}_j(b_j^* + t^\nu v)$$

であり，ここで $\nabla q_j(a_j^\nu) = p_{I_j}^* + \rho(a_j^\nu - a_j^*)$ であるから，それを $p_{I_j}^\nu$ とすれば

$$p_{I_j}^\nu a_j^\nu \leqq p_{I_j}^\nu a \quad \text{for every} \quad a \in \tilde{Y}_j(b_j^* + t^\nu v)$$

を得る。よって費用関数の定義から

$$p_{I_j}^\nu a_j^\nu = \tilde{c}_j(p_{I_j}^\nu, b_j^* + t^\nu v)$$

となり，これは証明すべき命題そのものにほかならない。前にもいったように $\tilde{Y}_j$ は仮定Pを満たすから，$\nabla q_j(a_j^\nu) \geqq 0$ であり，したがって $p_{I_j}^* + \rho(a_j^\nu - a_j^*) \geqq 0$ となることも明らかである。

そこで最後に $\{a_j^\nu\}$ が a_j^* に収束することを示せば，補題は証了となる。そのためには $\{a_j^\nu\}$ が有界であることを考慮して，$\{a_j^\nu\}$ の部分列が a_j^0 に収束するとしたときに，$a_j^0 = a_j^*$ となることを示せばよい。事実 $\tilde{Y}_j(\cdot)$ は b_j^* で劣半連続であることが分かっているから，$a^\nu \in \tilde{Y}_j(b_j^* + t^\nu v)$ で a_j^* に収束するような点列 $\{a^\nu\}$ が存在する。明らかにどの ν についても $q_j(a_j^\nu) \leqq q_j(a^\nu)$ であるから，$t^\nu \to 0$ の極限においても $q_j(a_j^0) \leqq q_j(a_j^*)$ が成り立つ。ところが $a_j^0 \in \tilde{Y}_j(b_j^*)$ であるから，a_j^0 は $Q_j(0)$ の解であり，一方 a_j^* もその解であることを考えれば $q_j(a_j^0) = q_j(a_j^*)$ となるのでなければならない。しかも $Q_j(0)$ の解は一意であるから，結局 $a_j^0 = a_j^*$ となるのでなくてはならない。

ここで定理の証明に戻る。いま e_h を第 h 成分が1，他の成分がすべて0の l 次元ベクトルとし，上の補題で $v = e_h$ とすれば，補題の条件は

$$a_j^\nu \in \tilde{Y}_j(b_j^* + t^\nu e_h)$$

$$p_{I_j}^\nu a_j^\nu = \tilde{c}_j(p_{I_j}^\nu, b_j^* + t^\nu e_h)$$

$$\text{ここで} \quad p_{I_j}^\nu = p_{I_j}^* + \rho(a_j^\nu - a_j^*)$$

となる。ゆえに仮定の $p^* \in \perp_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ から，すべての $a_j \in \tilde{Y}_j(b_j^* + t^\nu e_h)$ について

$$\begin{aligned} p^* y_j^* &= p_{I_j}^*(-a_j^*) + p_{O_j}^* b_j^* \\ &\geqq p_{I_j}^*(-a_j) + p_{O_j}^*(b_j^* + t^\nu e_h) - \rho\| a_j - a_j^* \|^2 - \rho \| b_j^* - (b_j^* + t^\nu e_h) \|^2 \end{aligned}$$

が成り立ち，整頓して

$$p_{I_j}^* a_j - t^\nu p_h^* + \rho(t^\nu)^2 \geqq p_{I_j}^* a_j^* - \rho \| a_j^* - a_j \|^2$$

を得る。すると上式の a_j に a_j^ν を選び，補題の $p_{I_j}^\nu = p_{I_j}^* + \rho(a_j^\nu - a_j^*)$ すなわち $p_{I_j}^* = p_{I_j}^\nu - \rho(a_j^\nu - a_j^*)$ を代入して計算することにより

$$p_{I_j}^\nu a_j^\nu - t^\nu p_h^* + \rho(t^\nu)^2 \geqq p_{I_j}^\nu a_j^*$$

となる。ところが $a_j^* \in \tilde{Y}_j(b_j^*)$ であることと費用関数の定義から $\tilde{c}_j(p_{I_j}^\nu, b_j^*) \leqq p_{I_j}^\nu a_j^*$，また $a_j^\nu \in \tilde{Y}_j(b_j^* + t^\nu e_h)$ であることと補題の主張から $\tilde{c}_j(p_{I_j}^\nu, b_j^* + t^\nu e_h) = p_{I_j}^\nu a_j^\nu$ であるから，これらの関係を上の式に用いて

$$\tilde{c}_j(p_{I_j}^\nu, b_j^* + t^\nu e_h) - t^\nu p_h^* + \rho(t^\nu)^2 \geqq \tilde{c}_j(p_{I_j}^\nu, b_j^*),$$

ゆえに

$$\tilde{c}_j(p^\nu_{I_j}, b^*_j+t^\nu e_h)-\tilde{c}_j(p^\nu_{I_j}, b^*_j) \geqq t^\nu p^*_h-\rho(t^\nu)^2$$

が得られることになる。

さてここで $b^*_{jh} \geqq 0$ の場合と $b^*_{jh}<0$ の場合を分けて考えることにしよう。まず $b^*_{jh} \geqq 0$ の場合には，上式を書き換えて

$$p^*_h \leqq \frac{1}{t^\nu}[\tilde{c}_j(p^\nu_{I_j}, b^*_j+t^\nu e_h)-\tilde{c}_j(p^\nu_{I_j}, b^*_j)]+\rho t^\nu$$

とすれば，平均値の定理から

$$p^*_h \leqq \frac{\partial \tilde{c}_j(p^\nu_{I_j}, b^*_j+t^\nu\lambda^\nu e_h)}{\partial b_{jh}}+\rho t^\nu$$

となるような $\lambda^\nu \in]0,1[$ が存在し，$\partial\tilde{c}_j(\cdot,\cdot)/\partial b_{jh}$ は連続であるところから，$\nu\to\infty$ すなわち $t^\nu\to 0$ の極限を考えれば

$$p^*_h \leqq \frac{\partial \tilde{c}_j(p^*_{I_j}, b^*_j)}{\partial b_{jh}}$$

を得る。ここで $p^\nu_{I_j}$ が $p^*_{I_j}$ になるのは，補題から $p^\nu_{I_j}=p^*_{I_j}+\rho(a^\nu_j-a^*_j)$ で，$\nu\to\infty$ のときは $a^\nu_j\to a^*_j$ となるからである。また $b^*_{jh}>0$ のような h については，t^ν を十分小さくとるかぎり $v=-e_h$ としても同様の推論により逆向きの不等式が成立するから，結局プラスの b^*_{jh} については等式

$$p^*_h = \frac{\partial \tilde{c}_j(p^*_{I_j}, b^*_j)}{\partial b_{jh}}$$

が成り立ち，厳密な不等号があてはまるのは $b^*_{jh}=0$ の場合のみである。

つぎに $b^*_{jh}<0$ の場合については，同様に上の等式が成り立つが，p^*_h は 0 となる。事実 $\tilde{Y}_j$ の性質から十分小さい $t>0$ をとれば，$y^t_j=y^*_j+te_h$ もまた $\tilde{Y}_j$ に含まれる。よって $p^*\in\perp_{\tilde{Y}_j}(y^*_j)$ から $p^*y^*_j \geqq p^*y^t_j-\rho\|y^*_j-y^t_j\|^2$ となる $\rho>0$ が存在し，$-tp^*_h \geqq -\rho t^2$ すなわち $p^*_h \leqq \rho t$ となるから，$t\to 0$ の極限を考えれば，$p^*_h \leqq 0$ とならざるをえない。ところが $\tilde{Y}_j$ は仮定Pを満たすから，$p^*_h \geqq 0$ でもあり，結局当該の h については $p^*_h=0$ となるほかはない。

以上で $p^*\in\perp_{\tilde{Y}_j}(y^*_j)$ なら $p^*\in MCP_{\tilde{Y}_j}(y^*_j)$ となることが分かったので，ついで $p^*\in \hat{N}_{\tilde{Y}_j}(y^*_j)$ ならやはり $p^*\in MCP_{\tilde{Y}_j}(y^*_j)$ となることを示す。p^* が $\hat{N}_{\tilde{Y}_j}(y^*_j)$ の条件を満たしていれば，定義によりそれぞれ y^*_j, p^* に収束する点列 $\{y^\nu_j\}\subset\tilde{Y}_j, \{p^\nu\}\subset R^l_+$ があって，どの ν についても $p^\nu\in\perp_{\tilde{Y}_j}(y^\nu_j)$ となっている。すると p^ν はすでに証明したとおり，それぞれ y^ν_j において $MCP_{\tilde{Y}_j}(y^\nu_j)$ の条件を満たすから，$a^\nu_j=-y^\nu_{jI_j}, b^\nu_j=y^\nu_{jO_j}$ とすれば

$$\tilde{c}_j(p^\nu_{I_j}, b^\nu_j)=p^\nu_{I_j}a^\nu_j \leqq p^\nu_{I_j}a_j \quad \text{for every } a_j\in\tilde{Y}_j(b^\nu_j)$$

$$p^\nu_{O_j} \leqq \nabla_{O_j}\tilde{c}_j(p^\nu_{I_j}, b^\nu_j), \quad (p^\nu_{O_j}-\nabla_{O_j}\tilde{c}_j(p^\nu_{I_j}, b^\nu_j))\,b^\nu_j=0$$

である。そして $\tilde{Y}_j(\cdot)$ は b^*_j で劣半連続であるから，すべての $a\in\tilde{Y}_j(b^*_j)$ に対して $a^\nu\to a$ となる

ような点列 $\{a^\nu\}$ で，どの ν についても $a^\nu \in \tilde{Y}_j(b_j^\nu)$ となっているものがある。ゆえに

$$p_{I_j}^\nu a_j^\nu = \tilde{c}_j(p_{I_j}^\nu, b_j^\nu) \leqq p_{I_j}^\nu a^\nu$$

で，ここで $\nu \to \infty$ とすれば

$$p_{I_j}^* a_j^* \leqq p_{I_j}^* a \quad \text{for every } a \in \tilde{Y}_j(b_j^*)$$

となる。また前述の帰結から，$\nu \to \infty$ のとき

$$p_{O_j}^* \leqq \nabla_{O_j} \tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*), \quad (p_{O_j}^* - \nabla_{O_j} \tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*))\, b_j^* = 0$$

となることも明らかであろう。

これで定理の前半部を証了にするには，あと $MCP_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ を満たす p の集合が凸になることさえいえばよいことになった。そこでそのことを示すために，$MCP_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ の条件を満たす2組の価格を p^1, p^2 とし，すべての $\lambda \in [0, 1]$ について $p(\lambda) = \lambda p^1 + (1-\lambda) p^2$ と書くことにしよう。すると

$$p_{I_j}^1 a_j^* \leqq p_{I_j}^1 a_j \quad \text{for every } a_j \in \tilde{Y}_j(b_j^*)$$

$$p_{I_j}^2 a_j^* \leqq p_{I_j}^2 a_j \quad \text{for every } a_j \in \tilde{Y}_j(b_j^*)$$

が成り立っているわけであるから，

$$p_{I_j}(\lambda)\, a_j^* \leqq p_{I_j}(\lambda)\, a_j \quad \text{for every } a_j \in \tilde{Y}_j(b_j^*)$$

したがって

$$p_{I_j}(\lambda)\, a_j^* = \tilde{c}_j(p_{I_j}(\lambda), b_j^*)$$

となり，たしかに $p_{I_j}(\lambda)$ は $MCP_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ の第1条件を満たす。

つぎに前と同様，e_h を第 h 成分 $(h \in O_j)$ のみが1，他の成分が0の l 次元ベクトルとして，$\tilde{c}_j(\cdot, b_j^*)$ が凹関数であることを考慮すれば

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{c}_j(p_{I_j}(\lambda), b_j^*)}{\partial b_{jh}} &= \lim_{t \to 0_+} [\tilde{c}_j(p_{I_j}(\lambda), b_j^* + te_h) - \tilde{c}_j(p_{I_j}(\lambda), b_j^*)]/t \\
&\geqq \lambda \lim_{t \to 0_+} [\tilde{c}_j(p_{I_j}^1, b_j^* + te_h) - \tilde{c}_j(p_{I_j}^1, b_j^*)]/t \\
&\quad + (1-\lambda) \lim_{t \to 0_+} [\tilde{c}_j(p_{I_j}^2, b_j^* + te_h) - \tilde{c}_j(p_{I_j}^2, b_j^*)]/t \\
&= \lambda \frac{\partial \tilde{c}_j(p_{I_j}^1, b_j^*)}{\partial b_{jh}} + (1-\lambda) \frac{\partial \tilde{c}_j(p_{I_j}^2, b_j^*)}{\partial b_{jh}} \\
&\geqq \lambda p_{O_j}^1 + (1-\lambda) p_{O_j}^2 \\
&= p_{O_j}(\lambda)
\end{aligned}$$

となる。また $b_{jh}^* > 0$ のような h については $t \to 0_+$ の代りに $t \to 0_-$ の極限を考えることができるので，上式とは逆向きの不等号をもつ不等式もまた成り立ち，結局等式

$$\frac{\partial \tilde{c}_j(p_{I_j}(\lambda), b_j^*)}{\partial b_{jh}} = p_{O_j}(\lambda)$$

の満たされることが分かる。これで $p(\lambda)$ は $MCP_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ の第2条件をも満たすことが明らかとなった。

ここで定理の後半部の証明に移ることにしよう。この部分での推論の狙いは，$y_j^* \in \tilde{Y}_j$ において $p^* \in MCP_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ になっていれば，$\tilde{Y}_j$ をもとの Y_j に戻した場合にも同じ p^* がある $y_j^{**} \in \tilde{Y}_j$ において本来の MCP_{Y_j} の条件を満たすことを示す点にある。

推論に先立って，まずこれまでの議論を考慮すれば，$p^* \in MCP_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ であるための前記の条件はまた

(i) $p_{I_j}^* a_j^* = c_j(p_{I_j}^*, b_{j+}^*)$

(ii) $p_{O_j}^* \leqq \nabla_{O_j} c_j(p_{I_j}^*, b_{j+}^*)$, $(p_{O_j}^* - \nabla_{O_j} c_j(p_{I_j}^*, b_{j+}^*))\, b_{j+}^* = 0$

とも書けることに注意しておこう[13]。すると，前節で(a)として証明したところから $a_j^* \in \tilde{Y}_j(b_j^*) = Y_j(b_{j+}^*) + R_+^{I_j}$ であるから，$a_j^{**} \in Y_j(b_{j+}^*)$ のような a_j^{**} で，$a_j^{**} \leqq a_j^*$ となるものがある。そこで $-a_j^{**} + b_{j+}^* = y_j^{**}$ とすれば $y_j^{**} \in Y_j$ で，$-a_j^* + b_j^* = y_j^*$, $b_{j+}^* \geqq b_j^*$ であるところから，$y_j^{**} \geqq y_j^*$ である。ところが上に記したように $p_{I_j}^* a_j^* = c_j(p_{I_j}^*, b_{j+}^*)$ であり，$p_{I_j}^* a_j^{**} \leqq p_{I_j}^* a_j^*$ であるから，$p_{I_j}^* a_j^{**} \leqq c_j(p_{I_j}^*, b_{j+}^*)$ となる。他方 $a_j^{**} \in Y_j(b_{j+}^*)$ であるから，費用関数の定義から $c_j(p_{I_j}^*, b_{j+}^*) \leqq p_{I_j}^* a^{**}$ ともなり，結局 $p_{I_j}^* a_j^* = p_{I_j}^* a_j^{**}$ となって

$p_{I_j}^* a_j^{**} = c_j(p_{I_j}^*, b_{j+}^*)$

となることがいえる。そして y_j^{**} のつくり方から $b_j^{**} = b_{j+}^*$ であるから，上記のところから明らかに y_j^{**} において本来の MCP_{Y_j} の条件(i)(ii)がともに満たされることが分かる。

4

転じて本節では，逆方向の（MCPR）から（MPR）への議論を定型化しておくことにしよう。そのためには仮定P′の $c_j(w, \cdot)$ の微分可能性に関する部分をいささか強めて，

仮　定P″　Y_j は非空かつ閉，$Y_j(b)$ はすべての $b_j \in R_+^{O_j}$ について非空，閉かつ凸で，また $b_j \geqq b_j'$ となるすべての $b_j, b_j' \in R_+^{O_j}$ について $Y_j(b_j) \subset Y_j(b_j') + R_+^{I_j}$。$c_j(w, \cdot)$ はすべての $w \in R_+^{I_j}$ について2回連続微分可能で，$\nabla_{O_j} c_j(\cdot, \cdot)$ は連続。

とするのでなくてはならないが，その下ではつぎの定理が主張できる[14]。

定　理　仮定P″の下においては，任意の $y_j^* \in \partial Y_j$ に対して $MCP_{Y_j}(y_j^*) \subset N_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ となる。

(13)　とりわけ前節末尾に命題(b)として示したように $\tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*) = c_j(p_{I_j}^*, b_{j+}^*)$ となること，また定理前半部の証明で示したように $b_{jh}^* < 0$ の h については $p_h^* = 0$ となること，などに注意されたい。

(14)　以下の議論はとりわけ Cornet, *op. cit.*, pp. 43-44 に負う。

証　明

目下の設定では $y_j^* \in Y_j \subset R_-^{I_j} + R_+^{O_j}$ であるところから $b_j^* \in R_+^{O_j}$ したがって $b_j^* = b_{j+}^*$ であるから，Y_j を $\tilde{Y}_j$ に拡大しても，b_j^* では MCP_{Y_j} の条件が $MCP_{\tilde{Y}_j}$ の条件と一致している。よって $p^* \in MCP_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ とすれば，

$$
\begin{aligned}
p^* y_j^* &= p_{I_j}^*(-a_j^*) + p_{O_j}^* b_j^* \\
&= -c_j(p_{I_j}^*, b_j^*) + \nabla_{O_j} c_j(p_{I_j}^*, b_j^*)\, b_j^* \\
&= -\tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*) + \nabla_{O_j} \tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*)\, b_j^*
\end{aligned}
$$

となる。それに伴って b_j の領域も $R_+^{O_j}$ から R^{O_j} に拡大され，[15] 仮定P″の下ではそのような b_j でかつ $b_j \in B(b_j^*, \varepsilon)$ となるものすべてについて

$$\tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j) - \tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*) \geqq \nabla_{O_j} \tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*)(b_j - b_j^*) - \hat{\rho}\, \| b_j - b_j^* \|^2$$

を満たす実数 $\hat{\rho}>0$, $\varepsilon>0$ のあることが知られる。事実，仮定P″にもとづき，b_j^* において $\tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j)$ を展開すれば

$$
\begin{aligned}
\tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j) = {} & \tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*) + \nabla_{O_j} \tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*)(b_j - b_j^*) \\
& + \frac{1}{2} \nabla_{O_j}^2 \tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*)(b_j - b_j^*, b_j - b_j^*) \overset{(16)}{+} o(\| b_j - b_j^* \|^2)
\end{aligned}
$$

となるから，上記の不等式が成立するためには，

$$\frac{1}{2} \nabla_{O_j} \tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*)(b_j - b_j^*, b_j - b_j^*) + o(\| b_j - b_j^* \|^2) \geqq -\hat{\rho}\, \| b_j - b_j^* \|^2$$

となること，したがって

$$\left| \frac{1}{2} \nabla_{O_j} \tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*)(b_j - b_j^*, b_j - b_j^*) + o(\| b_j - b_j^* \|^2) \right| \leqq \hat{\rho}\, \| b_j - b_j^* \|^2$$

となること，[17] が示されればよいわけである。ところがこの式はつぎのような推論をつうじて成立することが分かる。まず

$$
\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2} \nabla_{O_j}^2 \tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*)(b_j - b_j^*, b_j - b_j^*) + o(\| b_j - b_j^* \|^2) \right| \\
& \qquad \leqq \left| \frac{1}{2} \nabla_{O_j}^2 \tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*)(b_j - b_j^*, b_j - b_j^*) \right| + \left| o(\| b_j - b_j^* \|^2) \right|
\end{aligned}
$$

であるが，右辺第1項については行列のオペレーター・ノルムを $\| \nabla_{O_j}^2 \tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*) \|$ とすることによって

---

(15)　前記の論文でコルネーが b_j については非負の制約を課していないのは，そのためである。

(16)　ここで $\nabla_{O_j}^2 \tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*)(x, x)$ は $x' \nabla_{O_j}^2 \tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*) x$ を意味している。

(17)　$|A| \leqq \hat{\rho}\, \| b_j - b_j^* \|^2$ がいえれば，(イ) $A \geqq 0$ の場合は $A \leqq \hat{\rho}\, \| b_j - b_j^* \|^2$ となるから，$-A \geqq -\hat{\rho}\, \| b_j - b_j^* \|^2$ したがって当然 $A \geqq -\hat{\rho}\, \| b_j - b_j^* \|^2$ がいえたことになり，また(ロ) $A<0$ の場合は $-A \leqq \hat{\rho}\, \| b_j - b_j^* \|^2$ となるから，やはり $A \geqq -\hat{\rho}\, \| b_j - b_j^* \|^2$ がいえたことになる。

$$\left|\frac{1}{2}\nabla_{O_j}^2 \tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*)(b_j-b_j^*, b_j-b_j^*)\right|$$
$$\leqq \frac{1}{2}\|\nabla_{O_j}^2 \tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*)\|\cdot\|b_j-b_j^*\|^2$$

となり，また第2項については高位の無限小の定理が使えて

$$\forall\delta>0,\quad \exists\varepsilon>0,\quad b_j\in B(b_j^*,\varepsilon)\Rightarrow\frac{|o(\|b_j-b_j^*\|^2)|}{\|b_j-b_j^*\|^2}\leqq\delta$$

したがって

$$|o(\|b_j-b_j^*\|^2)|\leqq\delta\|b_j-b_j^*\|^2$$

となる。よって

$$\frac{1}{2}\|\nabla_{O_j}^2 \tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*)\|+\delta=\hat{\rho}$$

とおけば，前記の式が成り立つのである。

以上の推論から，すべての $b_j\in B(b_j^*,\varepsilon)$ に対して

$$p^*y_j^*\geqq-\tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j)+\nabla_{O_j}\tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*)\,b_j-\hat{\rho}\|b_j-b_j^*\|^2$$

を満たすような $\hat{\rho}>0$, $\varepsilon>0$ のあることが示された。そこでそのような ε について $y_j\in\tilde{Y}_j\cap B(y_j^*,\varepsilon)$ となる y_j をとり，$a_j=-y_{jI_j}$, $b_j=y_{jO_j}$ とすれば，$a_j\in\tilde{Y}_j(b_j)$ したがって費用関数の定義から $\tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j)\leqq p_{I_j}^*a_j$ であること，また MCP_{Y_j} の条件から $p_{O_j}^*\leqq\nabla_{O_j}\tilde{c}_j(p_{I_j}^*, b_j^*)$ であることを考慮して

$$p^*y_j^*\geqq p_{I_j}^*(-a_j)+p_{O_j}^*b_j-\hat{\rho}\|b_j-b_j^*\|^2\geqq p^*y_j-\hat{\rho}\|y_j-y_j^*\|^2$$

を得る。

他方 $y_j\in\tilde{Y}_j$ であるが $y_j\notin B(y_j^*,\varepsilon)$ のような y_j については，$\|y_j-y_j^*\|/\varepsilon\geqq 1$ であるところから

$$p^*(y_j^*-y_j)\geqq-\|p^*\|\cdot\|y_j-y_j^*\|\geqq-\|p^*\|\cdot\|y_j-y_j^*\|\times\frac{\|y_j-y_j^*\|}{\varepsilon}=-\frac{\|p^*\|}{\varepsilon}\cdot\|y_j-y_j^*\|^2,$$

ゆえに

$$p^*y_j^*\geqq p^*y_j-\frac{\|p^*\|}{\varepsilon}\|y_j-y_j^*\|^2$$

となる。

よって $\rho=\max\{\hat{\rho},\frac{\|p^*\|}{\varepsilon}\}$ とすれば，そのような ρ について $\perp_{Y_j}(y_j^*)$ の条件式

$$p^*y_j^*\geqq p^*y_j-\rho\|y_j-y_j^*\|^2$$

が成立するのである。

このように $p^*\in\perp_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ となることが示されれば，$p^*\in N_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ となることは $\perp_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)\subset N_{\tilde{Y}_j}(y_j^*)$ であるところから自明である。

（名誉教授）