「三田学会雑誌」88巻1号（1995年4月）

離散空間におけるコア，疑似競争価格及び ワルラス的配分の近似的最適性*

レオニッド　ハーヴィッツ(1),(2)
（ミネソタ大学）

1．本論文においては，全てのあるいは一部の財が分割不可能な場合に生じる問題を取り扱う。第1章はコアの性質を取り扱い，第2章においてはワルラス的（競争）配分の最適性に関する性質を扱う。第1章の目的は，コアと価格との関係がいかにして分割不可能財が存在するような交換経済の場合に（適当な修正を含めて）拡張されるかを論ずることにある。（選好が利己的な場合に）ワルラス的配分がコアに属するという命題(3)は通常の証明を見直すことにより，全ての財が分割不可能な場合にも追加的な仮定なしに成立することが確認できる。（例えば，Debreu and Scarf, 定理1，240ページ，あるいは Arrow and Hahn 8章，定理1，187ページを参照のこと。）［この事実は，ブロックすることの定義がブロックする結託の全ての成員について強い選好が成立するという事実に，大いに依っている。従って，特に，コア配分が，例えば，Koopmans 46ページ(4)のように定義されるパレート最適ではなく，**弱い**パレート最適（Arrow and Hahn や Varianの意味でのパレート効率的）であることのみを要求していることによっている。もし，‘強いコア’が Arrow and Hahn, 定義6, 196ページのように‘強くブロックされない’配分の集合として定義されるなら，ワルラス的配分が強いコアに属することを保証するためには，例えば局所非飽和のような追加的な仮定が必要である。］

---

* この論文は1993年7月，東京において開催された T. I. Tec / K. E. S. 数理経済学国際会議のために執筆されたものである。

（1） 離散（従って可算）空間におけるコアとワルラス的配分の関係を研究することはエッジワースの予想の“効果的決定可能性”に関する Alain A. Lewis 教授（University of California at Irvine）の研究及び彼との議論に端を発している。Lewis (1991) を参照のこと。この問題を財空間が連続的であるために起こる複雑性抜きに研究することは重要であると考えている。

（2） Marcel K. Richter 教授（University of Minnesota）の数多くの有益な示唆及び激励に感謝する。また，Robert M. Anderson 教授(University of California at Bereley）の多くの貴重な示唆（その全ては実現していないが）及び彼の未刊論文“Hurwicz（1991）と近似的コアの関係について”の内容を共有したことに謝意を表する。

（3） Debreu and Scarf, 240ページの中で，Shapley によるものとされている。

（4） 達成可能な配分が弱いパレート最適であるのは全ての成員に強く選好される達成可能な配分が存在しない場合である。パレート最適なのは全員にとって少なくとも同程度に選好されかつ，誰かに強く選好されるような達成可能な配分が存在しない時である。

本論文における興味，一漸近的なあるいは有限の経済において一，適当な意味で，コア配分が‘近似的に’ワルラス的であるという“部分的な逆”命題にある。特に，Andersonの1978年論文に含まれる2つの結果を離散空間の場合に拡張する問題を研究していく。Hildenbrand（1982, 850ページ）によって基本レンマ(5)と呼ばれたAndersonの定理1は，定理2のように漸近的にではなく，所与の固定された人口の下で成立する。Andersonの定理はいずれも選好関係が弱い意味で単調性を満たし，さらに‘自由可処分’の性質を持つことを仮定している；また財空間についても，有限次元のユークリッドであるとしている：すなわち，連続型である。

第5(ii)節に於いて‘混合型’の財空間を考える，すなわち，幾つかの財は分割可能であり，幾つかの財が（そのような財がない場合も含んで）分割不可能であるとする。従って連続型はその特別なケースである。弱い単調性の条件は，局所的な非飽和の条件に弱めることができることが証明される。従って，特に分割可能な財の一部について弱い単調性を仮定すれば十分である。このことはAndersonの結果を若干強めている。

第2章においては，離散的な財空間（すなわち，全ての財が分割不可能な場合に）ワルラス的配分がパレート最適性から乖離してしまう（このことは弱いパレート最適性が常に達成されることとは区別される）ことが議論される。強い単調性を持つ（完備な）選好，及び追加的な条件の下で乖離は $n-1$ 単位の財（但し n は主体の数）を越えないことが証明される。

第1章　離散財空間におけるコアと疑似競争価格

2． 離散空間における我々の結論はおおよそ，ある種の平均値の乖離に関してAndersonによって得られた限界値に1または2単位を加えるものとしてまとめられる。連続的な経済においては，Andersonの限界値は，経済主体の数が無限に増加するにしたがって（その間，初期保有量は有限にとどまる限り），0に近づく，従って，平均乖離も0に収束する。その一方，離散的な経済においては，限界値に新しく加わった1または2単位は漸近的にも無くならない。このことは，多数を含むコア配分の場合には重要ではないかもしれないが，少数のみを含む配分においては非常に重要である。

いずれの場合にも，平均値の距離に関する近さは，財空間において個人的には大きな乖離を隠し持つ事があり得る，このことはHildenbrand　1974, 202ページによって指摘され，Mas-Colell,

（5）　Andersonの定理1はそれ以前に得られた結果，特にVind（1965）, Arrow and Hahn, 1971, 定理2, 189ページ, Dierker（1975）及び，Keiding（1974）による一般化を含んでいる。; Anderson 1978, 1483ページ，及び，Hildenbrand 1982, 850ページ，さらにHildenbrand and Kirman, 1988, 186-9ページを参照のこと。非常に関係した結果はMas-Colell, 1985, 275ページ命題 7.4.1及びAnderson, 1987 7ページ定理 3.2にある。また，乖離を最小化する価格の存在を証明したAnderson 1987, 8ページ定理 3.4を見よ。

1985, 277ページ及び Anderson, 1988, 364ページによって例示されている。

今後の参考のために，全ての財が分割可能な経済（即ち，財空間が R^k の場合）でかつ，選好が（弱い意味で）単調で自由可処分という2つの性質を持つ場合に，Anderson によって得られた関係を述べる。

Anderson の定理1においては：

$$\frac{1}{n}\sum_{a\in A}|p\cdot(f(a)-e(a))|\leq\frac{2M}{n}, \tag{1. i}$$

および

$$\frac{1}{n}\sum_{a\in A}|\inf\{p\cdot(x-e(a)): x>_a f(a)\}|\leq\frac{2M}{n}, \tag{1. ii}$$

Anderson の定理2においては：

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{a\in A(n)}|p_n\cdot(f_n(a)-e_n(a))|\right]\to 0 \tag{2. i}$$

および

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{a\in A}\inf\{p_n\cdot(x-e_n(a)): x>_a f_n(a)\}|\right]\to 0 \tag{2. ii}$$

［記号及び用語については，以下の3節を参照せよ。］

3．記号と仮定． ほとんどの記号は Anderson 1978 に従うが，本ノートを自己完結するためにここで再度述べておく。

k 種類の財と n 人の経済主体を考える。Ξ によって財空間を表す。Ξ が k 次元のユークリッド空間の時，（完全に）分割可能な財，あるいは連続的な場合と言う。Anderson の結果はこのケースを扱っている。Ξ が等距離の点からなる束（lattice）の場合に分割不可能な財と呼ぶ。点の間の距離が1に規準化されているとき，規準化された分割不可能な場合という。本論文は主に最後の場合を取り扱う。（もちろん，この規準化は一般性を失わない。以下の第5 (i) 節を参照のこと。）Z を全ての整数の集合とする；Z_+ を全ての非負の整数の集合とする。Z^k と Z^k_+ をそれぞれ対応する k 次の直積とする。規準化された分割不可能なケースには財空間は Z^k であり，各経済主体の消費集合は Z^k_+ であると仮定される。

$|r|$ は実数 r の絶対値である。x が実座標が x^i であるような k 次限のベクトルである時，記号 $\|x\|$ は x のノルムを表す。より明示的に，$\|x\|_\infty=\max\{|x^i|: 1\leqq i\leqq k\}$，一方，$\|x\|_1=\sum_{i=1,\cdots k}|x^i|$ とする。全ての座標が1であるような R^k のベクトルを $u=(1,\cdots 1)$ で表す。二つのベクトル p と x の内積を $p\cdot x$ で書く。

R^k におけるベクトルの不等号を次のように書く：$x\geqq y$ は全ての i について $x^i\geqq y^i$; $x\gg y$ は全

ての i について $x^i > y^i$; $x > y$ は $x \geqq y$ であるが $x=y$ ではないことを意味する。強い選好を $>$ で表す。これは非負の整数象限 Z^k_+, 即ち非負整数の k 次の集合上の二項関係であり，次の 2 つの性質を持つものと仮定される：(i) **（弱い）単調性**：$x \gg y$ ならば $x > y$, (ii) **自由可処分**：$x \gg y$ かつ $y > z$ ならば $x > z$ である。連続性や凸性は仮定されておらず，推移性も弱められていることは注意されるべきである。このような選好関係全ての集合を P で表す。

（有限の）**経済主体の集合**を A で書き，A の主体の数を $\# A = n$ で表す。A に属する**経済主体 a の選好関係**を $>_a$ で表す。**経済主体 a の初期保有量**を $e(a)$ で表す。$e(a) \in Z^k_+$ と仮定する。分割不可能財を持つ**交換経済**とは写像 $\varepsilon : A \rightarrow P \times Z^k_+$ のことである。（上式において，記号×は集合の直積を表す。）**配分**とは $\sum f(a) = \sum e(a)$ となる写像 $f : A \rightarrow Z^k_+$ のことである，ただし，和は A の全ての要素についてである。

結託とは A の非空な部分集合である。結託 S が**配分 g を通じて配分 f を改善する**とは，(1) g は S について実現可能である，即ち，$\sum g(a) = \sum e(a)$, 但し，和はいずれも S の要素についてである，さらに (2) S のすべてのメンバーは g の対応する成分を f の対応する成分より強く選好する。即ち，全て S のに属する a について $g(a) >_a f(a)$ であることである。**配分 f が結託 S によってブロックされる**とは配分 g が存在して S が g を通じて f を改善することである。交換経済 ε の**コア**とはどんな結託にもブロックされない ε の配分全体の集合のことである。**価格**（ベクトル）p とは R^k_+ の要素で各座標の和が 1 に規準化されたものである；即ち，$\sum_{h=1,\cdots k} p_h = 1$, あるいは $\|p\|_1 = 1$ である。（価格は有理数である必要はないことに注意せよ；価格は任意の実数でかまわない。）**価格の集合**を $\varDelta$ で書く。従って $\varDelta = \{p \in R^k_+ : \|p\|_1 = 1\}$ である。

k 種類の財と n 人の経済主体を持つ経済 ε において，$M = M(\varepsilon) = \sup\{\|e(a_1) + \cdots + e(a_k)\|_\infty : a_1, \cdots a_k \in A\} = \sup_Q \{\|e_Q\|_\infty : A \supseteq Q, \# Q = k\}$ 但し e_Q は A の部分集合 Q に属する主体の初期保有量の和である。［多くの場合，演算子 sup は有限集合上に適用され，その場合には max の事となる；同様のことが inf と min についてもいえる。］例えば，（Hildenbrand and Kirman のように）すべての個人保有量が，$b = \sup\{e(a) : a \in A\}$ と書く時，有限区間 $[0, b]$ に制限されるならば，$M = kb$ である。(6)

4．定理 1'. X を n 人の主体と k 種類の規準化された分割不可能な財を持つ有限の交換経済 ε とする。f をコア $C(\varepsilon)$ に属する配分とすると，$\varDelta$ に属する価格 p が存在し，

(6) より陽表的には：$k < \infty$ 種類の財を考える。$e^j(a)$ を個人 a の j 番目の財の保有量とし，$e(a) = \langle e^1(a), \cdots e^k(a) \rangle$ と書く。$b = \sup\{e^j(a) : a \in A, j \in \{1, \cdots, k\}\}$ となる有限の $b > 0$ が存在すると仮定しよう，従って，全ての $j \in \{1, \cdots, k\}$ と $a \in A$ について $0 \leqq e^j(a) \leqq b$ となる。k は有限であるから，A が有限であるときには必然的にこのような b は存在する。この場合には $b = e^{j^*}(a^*)$ となるような個人 a^* と財 j^* が存在する。従って，この場合には，$M = \max\{\sum_{r \in \{1, \cdots, k\}} e^j(a_r) : \{a_1, \cdots, a_k\} \subset A\} = kb$ である。

$$\frac{1}{n}\sum_{a\in A}|p\cdot(f(a)-e(a))|\leqq(2M/n)+2 \tag{1. i'}$$

および

$$\frac{1}{n}\sum_{a\in A}|\inf\{p\cdot(x-e(a)):x>_a f(a)\}|\leqq(2M/n)+2 \tag{1. ii'}$$

である。

注意.　プライム記号 (') は本ノートの命題（ないし時には，他のもの）を Anderson の1978年の論文の対応物と区別している。分割不可能財の場合の我々の定理 1' は分割可能財の場合の Anderson の定理 1 と異なり，不等式の右辺に整数部分が加えられている。

証明.　証明はほとんど全てが Anderson に従う。必然的に，以下で定義される 2 つの集合を分離する超平面によって価格 p を定義する。それから，この価格を用いて，定理の不等号が成立することを証明する。

ステップ 1.　分離されるべき 2 つの集合は，それぞれ Π と W と書くが，次のように定義される。定理の中で指定されたコアの配分を f とし，財空間の中に集合を

$$\gamma(a)=\{x-e(a)\in Z^k:x>_a f(a)\}$$

と定義する，即ち，$\gamma(a)$ は主体 a によってコア配分 $f(a)$ の成分より強く選好される純取引量全体の集合である。次に，$\gamma(a)$ に原点をつけ加える事によって，拡張する；こうして財空間の集合を

$$\phi(a)=\{0\}\cup\gamma(a)$$

と定義する。次に Π を

$$\Pi=\sum_{a\in A}\phi(a)$$

と定義する(7)。今後の参考のために明らかではあるが，Π は Z^k の部分集合であることに注意しておく。

次に，$W=\{w\in R^k:w\ll -z'\}$ と定義する，但し，$z'=Mu=M(1,\cdots,1)=(M,\cdots,M)$ である(8)。明らかに，W は凸集合であるが，Π はそうではない。分離を可能にするために，W が Π の凸包，$con\,\Pi$ と書くが，と互いに素である事を示す；即ち，

$$W\cap con\,\Pi=\emptyset \tag{1}$$

(7)　Anderson は $\Phi=\frac{1}{n}\sum_{a\in A}\phi(a)$ を用いている。

(8)　Anderson は $z=(M/n)u$ を用いている。

である。

(1) の証明

(1) が偽であり従ってベクトル $x \in W \cap con\,\Pi$ が存在すると仮定しよう。$x \in con\,\Pi$ であるから，[Debreu (1959)，24ページ，1.9 (15) によって]

$$x = \sum_{a \in A} r(a)$$

但し，全ての A の要素 a に対して $r(a) \in con\,\phi(a)$ と書くことができる；しかしながら (Shapley-Folkman の定理によって) 多くとも k 人の主体 $a_1, \cdots, a_q$ 但し $q \leqq k$ を除いて $r(a) \in \phi(a)$ となる。$\{a_1, \cdots, a_q\} = Q$ と書く，従って $\# Q \leqq k$ であり，$r^*(\cdot)$ を Q に属する a については $r^*(a) = 0$ とし，$A \backslash Q$ に属する a については $r^*(a) = r(a)$ と定義する。ここで

$$y' = \sum_{a \in A} r^*(a) = \sum_{a \in A \backslash Q} r(a) r(a) + (0 + \cdots + 0)$$

を考えよう。

最後の式は y' が Π に属していることを示している。なぜなら，作り方によって，すべての A に属する a について，従って全ての $A \backslash Q$ に属する a について $r(a) \in \phi(a)$，またすべての A に属する a について，従って全ての Q に属する a について $0 \in \phi(a)$ であるからである。

一方，$x = \sum_{a \in A \backslash Q} r(a) + \sum_{a \in A} r(a)$ でありまた $y' = \sum_{a \in A \backslash Q} r(a)$ であるから，$y' = x - \sum_{a \in A} r(a)$ が得られる。

いま，$\phi(a) \geqq -e(a)$，故に，$con\,\phi(a) \geqq -e(a)$ であり，また [$a \in Q$ に対して，$r(a) \in con\,\phi(a)$ であるから] 全ての Q に属する a に対して $-r(a) \leqq e(a)$ である。

このことから次式の最初の不等号を得る；

$$y' \leqq x + \sum_{a \in A} e(a) \leqq x + z' \ll 0$$

一方，2番目の不等号は z' 及び M の定義および $\# Q \leqq k$ という事実により，3番目の不等号は $x \in W$，すなわち $x \ll -z'$ という前提による。

従って，y' は R^k_- および Π 従って Z^k の両方に属することが得られた。従って，y' は Z^k_- に属する。矛盾を得るためには

$$\Pi \cap Z^k{}_- = \emptyset \qquad [*]$$

を示せば十分である。

[*] の証明

[*] に反して，$G' \ll 0$，かつ $G' \in \Pi$ となり，両方の集合に属するベクトル G' が存在するとしよう。$G' \in \Pi$ であるから，ϕ の選択子 g が存在して，$g : A \to Z^k$，全ての A に属する a について $g(a) \in \phi(a)$，および，$G' = \sum_{a \in A} g(a)$ となる。

ここで我々はベクトル G' の存在が，与えられたコア配分 f をブロックする結託 B の存在を保証することを示すことができる。コア配分はブロックされ得ないので，この矛盾が Π と Z^k_- が互いに素である，従って $con\,\Pi$ と Wが互いに素であることの証明となる。結託 B は $g(a)\neq 0$ となる A の全ての主体の集合とする。(9)

a_1 を結託 B の任意のメンバーとする。このとき，改善する配分 h' を

$$h'(a_1)=g(a_1)+e(a_1)-G'$$

とし

$$h'(a)=g(a)+e(a)\quad \text{for all } a \text{ in } B\backslash\{a_1\}$$

と定義しよう。(10) g は ϕ の選択子であり（従って $g(a_1)\geqq -e(a_1)$ であり）G' は Z^k_- に属するから $-G'\in Z^k_-$ であることから，全ての B の要素 a に対して $h'(a)$ は Z^k_- であることに注意しよう。

B 上で g は γ の選択子であるから，（γ，ϕ，および g の定義から）

$$g(a)+e(a)>_a f(a)\quad \text{for all } a \text{ in } B$$

が得られる。

従って，a_1 以外の B の全てのメンバーについて $h'(a)$ は $f(a)$ より強く選好される。しかし，$-G'\gg 0$ であるから，自由可処分の仮定から $h'(a_1)>_{a_1}f(a_1)$ である。従って，h' は B に関して実現可能であるならば f を改善する，すなわち

$$\sum_{a\in B}h'(a)=\sum_{a\in B}e(a)$$

が成立するならばである。

しかしながら，これは成立する，なぜなら（ $B\backslash\{a_1\}$ を B^* と書くことによって），

$$\begin{aligned}\sum_{a\in B}h'(a)&=h'(a_1)+\sum_{a\in B^*}h'(a)\\&=g(a_1)+e(a_1)-G'+\sum_{a\in B^*}(g(a)+e(a))\\&=\sum_{a\in B}(g(a)+e(a))-G'\\&=\sum_{a\in B}(g(a)+e(a))-\sum_{a\in B}g(a)\\&=\sum_{a\in B}e(a)\end{aligned}$$

だからである。（最後の等号は G' と B の定義による。）それゆえ f は B によってブロックされ，こ

(9) B が非空であることを証明するために，逆に全ての A の a に対して $g(a)=0$ とする。従って，$\sum_A g(a)=0$，ゆえに $G'=\inf\sum_A g(a)=0$ であるが，これは前提 $G'\ll 0$ により不可能である。

(10) Anderson の証明の対応部分においては G' は結託のメンバーに等しく分配される。しかしながらこれは財の分数部分を生じる可能性があり，分割不可能な財空間の場合には不適当である。

のことは f がコアに属することに矛盾する。これゆえ Π と Z^{ε}_{-} は互いに素であり；即ち [*] は真である。

しかしながらもし (1) が偽ならば [*] も偽であることが証明されている。[*] は真であることが示されたので，(1) は真であり；即ち，$con\,\Pi$ と W は互いに素である。

[(1) の証明終わり]

$con\,\Pi$ と W は有限次限のユークリッド空間における互いに素な凸集合であるから，$con\,\Pi$ と W を分離する，従って Π と W を分離する超平面が存在する。W の性質からこの超平面は成分の和が 1 になる非負の k ベクトル，すなわち価格ベクトル $p \in \Delta$ によって決定されるとみなすことができる。それゆえ，実数 α が存在して全ての $z \in \Pi$ に関して $p\cdot z \geqq \alpha$ かつ全ての $w \in W$ に関して $p\cdot w \leqq \alpha$ となる，よって

$$\inf p\cdot\Pi \geqq \sup p\cdot W \tag{1*}$$

となる。

ステップ 2． この節では証明の第 2 段階で用いられる不等式を導出する。

ステップ 1 の最後で見たように，$\inf p\cdot\Pi \geqq \sup p\cdot W$ である。しかしながら，$\sup p\cdot W = -pz' = -p\cdot Mu = -Mp\cdot u = -M$ である，（なぜなら $\|p\|_1 = 1$ である。）従って (1*) より

$$\inf p\cdot\Pi \geqq -M \tag{2}$$

である。

$f(a)+u \gg f(a)$ であるから弱い単調性から $f(a)+u >_a f(a)$ である；それゆえ，$\gamma(a)$ の定義から

$$f(a)+u-e(a) \in \gamma(a) \quad \text{for all } a \in A$$

である。[11] それゆえ

$$\inf p\cdot\gamma(a) \leqq p\cdot(f(a)+u-e(a)) \leqq p\cdot(f(a)-e(a))+1 \ \text{ for all } a \in A \tag{5'.1}$$

である。しかしながら

$$\phi(a) = \{0\} \cup \gamma(a)$$

であるから，

$$\inf p\cdot\phi(a) \leqq \inf p\cdot\gamma(a)$$

である。これと (5'.1) より，

$$\inf p\cdot\phi(a) \leqq p\cdot(f(a)-e(a))+1 \ \text{ for all } a \in A \tag{4'}$$

となる。[12]

---

(11) この点が分割不可能な財と分割可能な財の決定的な差異である。分割可能な財の場合には正の整数だけでなく，任意の正の θ に対して $f(a)+e(a)+\theta u \in \phi(a)$ である。

(12) 分割可能な場合には θ を 0 に近づけることにより，Anderson は (4') に対応する式を右辺の 1 なしに得ており，これを (4) 式と呼ぶことにする。

以下では

$$S=\{a\in A : p\cdot(f(a)-e(a))<0\} \tag{7}$$

で定義される主体の集合を考えていく。S は A の部分集合であるから (4') の不等号から

$$\sum_{a\in S}[p\cdot(f(a)-e(a))+1] \geqq \sum_{a\in S}\inf p\cdot\phi(a) \tag{8}$$

がいえる。$\sum_{a\in S}\inf p\cdot\phi(a)\geqq\sum_{a\in A}\inf p\cdot\phi(a)=\inf p\cdot\Pi$ であるから，不等式 (8) と (2) は

$$\sum_{a\in S}[p\cdot(f(a)-e(a))+1] \geqq \inf p\cdot\Pi \geqq -M \tag{7.2}$$

を意味する。従って，

$$\sum_{a\in S}[p\cdot(f(a)-e(a))+1] \geqq -M \tag{10.1}$$

及び，

$$\#S+\sum_{a\in S}p\cdot(f(a)-e(a)) \geqq -M \tag{10.2}$$

すなわち，

$$-\sum_{a\in S}p\cdot(f(a)-e(a))\leqq M+\#S \tag{10.3}$$

である。しかしながら，S の定義式 (7) より，(10. 3) 式の左辺の和は S が非空ならば負であり S が空集合ならば 0 である。従って，(10. 3) 式は，

$$\left|\sum_{a\in S}p\cdot(f(a)-e(a))\right| \leqq M+\#S \tag{10.4}$$

と同値であり，この不等式は S が空であるかどうかに関わらず成立する。

ステップ 3． 本節では定理 1' の不等式 (1. i') を証明する。

コア配分 f の実現可能性から，

$$\sum_{a\in A}p\cdot(f(a)-e(a))=p\cdot\left(\sum_{a\in A}f(a)-\sum_{a\in A}e(a)\right)=0 \tag{13}$$

が得られる。(13) 式および，S の定義式 (7) を用いると，

$$\sum_{a\in A}|p\cdot(f(a)-e(a))|=2\sum_{a\in A}|p\cdot(f(a)-e(a))| \tag{14}$$

である。

従って (10. 4) より，

$$\sum_{a\in A}|p\cdot(f(a)-e(a))|\leqq 2(M+\#S)\leqq 2(M+n) \tag{14.2}$$

である。ただし，２番目の不等号は，（S は A の部分集合であるから）$\# S \leqq A = n$ という事実により，S が空であるかどうかに関わらず成立する。

n で割ることによって，

$$\frac{1}{n}\sum_{a\in A}|p\cdot(f(a)-e(a))| \leqq 2(M/n)+2 \tag{15}$$

即ち，定理 1' の不等式 (1. i') を得ることができる。（S が空集合の時 (15) の左辺は 0 になる。）

ステップ４．　この節では定理 1' の不等式 (1. ii') を証明する。

$$d(a) = \inf p\cdot\gamma(a)$$

と定義しよう。すると，(5'. 1) の不等式は

$$d(a) \leqq p\cdot(f(a)-e(a))+1 \quad \text{for all } a\in A \tag{5'. 2}$$

となる。また，$\phi(a)=\{0\}\cup\gamma(a)$ であるから

$$d(a) \geqq \inf p\cdot\phi(a) \quad \text{for all } a\in A \tag{6}$$

となる。((5*. 1) 式を参照せよ。)

(1. ii') 式の証明はステップ２で得られた結果を用いる。我々の記号を用いると (1. ii') の不等式の左辺は $\sum_{a\in A}|d(a)|$ となる。

$$A^* = \{a\in A : d(a)>0\}$$

$$A^{**} = \{a\in A : d(a)>0\}$$

と定義する。すると，

$$\sum_{a\in A}|d(a)| = \sum_{a\in A^*} d(a) - \sum_{a\in A^{**}} d(a) \tag{16}$$

となる。(5'. 2) を用いて，(16) 式の右辺の第１項目の和に関しては

$$\begin{aligned}\sum_{a\in A^*} d(a) &\leqq \sum_{a\in A^*}[p\cdot(f(a)-e(a))+1]\\ &= \# A^* + \sum_{a\in A^*} p\cdot(f(a)-e(a))\end{aligned} \tag{17}$$

となる。２つの集合 $A_1^* = A^*\cap(A\backslash S)$ 及び $A_2^* = A^*\cap S$ と関数 $\psi(a) = p\cdot(f(a)-e(a))$ を定義する。この時，

$$\begin{aligned}\sum_{A^*} p\cdot(f(a)-e(a)) &= \sum_{A^*}\psi(a) = \sum_{A_1^*}\psi(a) + \sum_{A_2^*}\psi(a)\\ &= \sum_{A_1^*}\psi(a) - \left|\sum_{A_2^*}\psi(a)\right| \leqq \sum_{A_1^*}\psi(a)\\ &= \sum_{A\backslash S}\psi(a) = -\sum_{S}\psi(a) \leqq M + \# S\end{aligned}$$

である。ただし，最後の不等号は (10.4) により成立し，その前の不等号は (13) による。

それゆえ，

$$\sum_{A} p\cdot(f(a)-e(a)) \leqq M+\# S \leqq M+n \tag{18}$$

であり，(17) より，

$$\sum_{a\in A} d(a) \leqq \# A+(M+n)=M+2n \tag{21}$$

である。

(16) 式の右辺の 2 項目の和に関しては，

$$\sum_{a\in A^{**}} d(a) \geqq \sum_{a\in A^{**}} \inf p\cdot\phi(a) \geqq \sum_{a\in A^{**}} \inf p\cdot\phi(a)=\inf p\cdot\Pi \geqq -M \tag{22.1}$$

である。但し最初の不等号は (6) により，最後の不等号は (2) による。すなわち，

$$-\sum_{A^{**}} d(a)=\sum_{A^{**}} |d(a)| \leqq M \tag{22.2}$$

が成立する。(16), (21), (22.2) より，

$$\sum_{a\in A} |d(a)| \leqq (M+2n)+M=2M+2n \tag{23}$$

が成立する。n で割ることによって最後に，

$$\frac{1}{n}\sum_{a\in A} |d(a)| \leqq 2(M/2n)+2 \tag{24}$$

即ち，定理 1' の不等式 (1. ii') を得ることができ，これによって定理 1' の証明が完結した。

一般化[(13)] 前記の証明において離散型のケースが連続型の場合と異なるのはただ 1 つの点である：連続型の場合には，任意の正の θ に対して財ベクトル $f(a)+\theta u$ が主体 a の消費集合（R^k_+ と仮定される。）に属しており，離散型の場合には θ が正の整数の場合のみに成立することである。なぜなら，消費集合が（前記の定理 1' において規準化されたように）Z^k_+ であるからである。別の判定基準を許すために，そして一より重要なことは一Anderson の結果と上記の定理 1' の両方を 1 つの定理として含むために，以下のように考えよう。$C(a)$ を主体 a の消費集合とする。$\beta=\inf\{\theta:\theta$ は非負実数で任意の $a\in A$ と任意の x について $x\in C(a)$ ならば $\theta x\in C(a)\}$ と定義する。Anderson のケースでは $\beta=0$ であり，（規準化された）離散型の場合には $\beta=1$ である。一般化された結

(13) 本節の結果の多くは Marcel K. Richter 教授の示唆に負う。彼はまた Anderson の結論を得るためには，消費集合が非負実数全体の中で稠密（例えば非負の有理数）であれば十分であることを指摘した。この事実は本質的な差が，連続対可算ではなく，稠密対離散であることを明らかにした。（このことは Anderson の証明において，$\theta=1/m$（m は正の整数）とし，m を無限に発散させることによっても確認される。

論は，定理1' およびその証明において整数の部分を β に置き換えたものである。特に，(4') 式は

$$\inf p\cdot\phi(a) \leqq p\cdot(f(a)-e(a))+\beta \qquad (4'')$$

となる。同様に，(5') および (7.2) 式においても1の代わりに β を置き換えればよい。こうして，いわば，定理1'' と呼べる結論が得られ，両式の左辺は定理1' と同様であり，(1.i') および (1.ii') の右辺は $(2M/n)+2\beta$ となる。Anderson の定理1は $\beta=0$ のスペシャルケースであり，定理1' は $\beta=1$ のケースである。さらに次のような拡張が得られる：(i) 種々の財で異なる単位を許す場合，および (ii) 全てとは限らず幾つかの財が完全に分割可能である（即ち，実数全体と仮定できる）ケースである。

5．定理（i）．異なる財の不均等な単位．全ての財が分割不能．

ここでは z' を $z^{\wedge}=M\cdot(u_1,\cdots,u_k)$ でおきかえる。ただし，$u^{\wedge}=(u_1,\cdots,u_k)$ で u_j は財 j の分割不可能な単位である。[第4節においては，単位は規準化されており，全ての $j=1,\cdots,k$ に対して $u_j=1$ であった。] もし，規準化を行わなければ，我々はステップ2の (2) 式以下の議論において u の代わりに $u^{\wedge}$ を用いるように議論を修正しなければならない。結果として，(5'.1) の右辺の整数1の代わりに $u^{\wedge\wedge}=p\cdot u^{\wedge}$ 即ち，u_j の平均を用いることになる。[規準化の下では $u^{\wedge\wedge}=1$ である。] (8), (7.2), (10.1) 式においても同様に変更させなければならない。更に，(10.1) 式以下においては，$\#S$ の項には $u^{\wedge\wedge}$ を掛けなければならず，(14.2) 式の右辺は $2(M+nu^{\wedge\wedge})$ となり，従って (15) の右辺の整数2にはやはり $u^{\wedge\wedge}$ を掛けなければならない。結果として，いわば (15^^) 式において，定理1' の最初の不等式が一般化される。同様の変更は定理2' の2番目の不等式にもなされなければならない，すなわち，整数2の代わりに $2u^{\wedge\wedge}$ を用いる。

5．定理（ii）．混合ケース：幾つかの財が分割可能

この節においては少なくとも1種類の財が分割可能であり（即ち，その水準が任意の非負の**実数**となりえ，）任意種類（0, 1, あるいはそれ以上）の分割不可能財（その水準は任意の**整数**）である。分割可能な財を $Y_1, Y_2, \cdots, Y_3$, $s\geqq 1$ と書き，分割不可能な財を X で表すことにする。従って財空間は $Z^h\times R^s$ 但し，$h=0,1,\cdots$ は分割不可能な財の数である。この定式化は Anderson (1978) をスペシャルケース（X のないケース）として含むことに注意する。各主体の消費集合は，財空間内の非負点の全体である，即ち，$Z^h_+\times R^s_+$ に等しいと仮定する。我々は，引き続き，経済主体の集合（A と書く）は有限であり，保有量は非負である，即ち，任意の $a\in A$ に対して $e(a)\in Z^h_+\times R^s_+$ であると仮定する。

任意の A に属する a に対して，選好関係 $>_a$ に関する仮定は：(a) **Y に関する局所非飽和** (LNS-Y)，および (b) 自由可処分 (FD) である。

LNS-Y は任意の $a\in A$ と任意の $(x,y)\in Z^h\times R^s$，及び任意の $\varepsilon>0$ に対して，$y'\in R^s$ が存在

して$\|y'-y\|<\varepsilon$かつ$(x, y')>_a(x, y)$となる事である。

Yに関する弱い単調性（WM-Y）を次のように定義する：任意の$a \in A$，任意の$(x, y) \in Z^h \times R^s$，及び任意の$y' \in R^s$についてベクトル不等式$y' \gg y$ならば$(x; y')>_a(x; y)$である。さらに**$Y$の（非空な）部分集合に関して部分的な弱い単調性**（PWM-Y）を以下のように定義する：ベクトルyを2つの部分ベクトル$y=(y^*, y^{**})$に分割する，但し，y^*を（$s^*>0$次で）非空，y^{**}をs^{**}次元とする；次に，経済がPWM-Y性を持つというのは，任意の$a \in A$及び任意の適当な空間に属する$x, y^*, y^{*\prime}, y^{**}$に対して，$y^{*\prime} \gg y^*$ならば$(x; y^{*\prime}, y^{**})>_a(x; y^*, y^{**})$であることを意味するものとする。

LNS-YはWM-YやPWM-Yからでさえも導出されることに注意する。従って，特に，分割不可能な財がない場合には，仮定WM-YはAndersonの仮定と同一であり，また，$s>1$（即ち，分割可能な財が少なくとも2種類ある）場合には，PWM-YはWM-Yより非制限的である。従って，本節の結論はAndersonの結果をスペシャルケースとして含む一般化である。

また，分割可能財がただ1種（$s=1$）の場合には弱い単調性と強い単調性は同一であることに注意せよ。

自由可処分（FD）は上記の3節と同様に定義される。

第4節の証明を再検討すると，ステップ1及び，不等式(2)は現在の混合ケースにおいても成立し，(5*. 1)も同様である。[ここで$\gamma(a)$は$\gamma(a)=\{(x, y)-e(a) \in Z^h \times R^s : (x, y)>_a f(a)\}$として定義されるものと理解する。]

しかしながら，ステップ2の(2)式以降(5*. 1)及び(4')までの議論は変更されなければならない。

局所非飽和性（LNS）より，全てのaに対して，点列(x, y^ν)が存在して，$f(a)$に収束し，かつ$(x, y^\nu)>_a f(a)$ for all $\nu=1, 2, \cdots$, ad inf となる。従って，任意の$a \in A$及び全てのνについて，$(x, y^\nu)-e(a)$は$\gamma(a)$に属する。

従って，ステップ1で得られた値に固定されたpを用いて，

$$\inf p \cdot \gamma(a) \leqq p \cdot ((x, y^\nu)-e(a)) \leqq p \cdot (f(a)-e(a)) \qquad (5^\wedge. 1)$$

が得られる。

これから，(5*. 1)を用いて，

$$\inf p \cdot \phi(a) \leqq p \cdot (f(a)-e(a)) \quad a \in A \qquad (4^\wedge)$$

を得られるが，これはAnderson, 1486ページ，11-12行の不等式と同じである。Andersonのそれ以降の証明を確認すると，(4^)及び不等式(2)だけが使われている事が分かる[(14)]。従ってAndersonの定理1及び2の不等式(1)と(2)がそれぞれ成立している。

(14) あるいは，この事実は，(8)式及び上記4節の数式を見，更に，(4')の代わりに(4^)が成立しているから，整数1あるいは$\#S$を取り除く事によって確認することができる。

こうして，Anderson の結果は混合ケースに拡張でき，さらに彼の弱い単調性の仮定は LNS に弱めることができる。この代替の可能性は，Koopmans（命題 4）による厚生経済学の第一基本定理を考えると，非常に自然である。

6．極限定理　離散型の場合の極限定理は，Anderson と全く同じように，$n=\#A$ となる n 番目の経済において，$M(n)$ を上記の上限 M としたときに，$M(n)/n$ を 0 に収束させる事によって得られる。(15) しかしながら，定理 1' の不等式の右辺の整数項のために，左辺はもはや 0 に収束しない。そのかわり，次式が成立する：

定理 2'

$$\limsup \left[\frac{1}{n}\sum_{a\in A(n)} |p_n\cdot(f_n(a)-e_n(a))|\right] \leqq 2 \tag{2.i'}$$

および，

$$\limsup \left[\frac{1}{n}\sum_{a\in A(n)} |\inf\{p_n\cdot(x-e_n(a)) : x >_a f_n(a)\}|\right] \leqq 2 \tag{2.ii'}$$

5 節で見たように上記の結果は連続型と分離型の両方を含むように一般化できる。定理 2" として，定理 2' の左辺を同一のまま，右辺の 2 を 2β に代えることによってである。

7．例　以下の例は，離散空間において，一般的には (5'.1) 式で整数 1 が除けない事を示している。

2 人の主体と，共に分割不可能な 2 種類の財がある。それぞれの主体は（整数点の束 (lattice) 上で）Leontief 型の選好を持ち，従って以下の形の効用関数

$$u_i(x_i, y_i) = \min(x_i, y_i) \qquad i=1,2$$

で表現できるとする。

それぞれの保有量は

$$e(1)=(2,0), \qquad e(2)=(0,2)$$

とする。

$u_1(e(1))=u_2(e(2))=0$ であることに注意する。ここで $f=\langle f(1); f(2)\rangle=\langle(1,1);(1,1)\rangle$ という配分を考える。すると，$u_1(f(1))=u_2(f(2))=1$ である。従って，f は個人合理的 (IR) である。さらに，唯一の（実現可能な）配分で主体 1 に強く選好されるのは $O_2=\langle(2,2);(0,0)\rangle$ だけであるが，O_2 は主体 2 にとって悪くなり，従って，O_2 は f にパレートの意味で優越しない。実際，全ての（実現可能な）配分がそうである。故に，f はパレート最適であり，かつ IR である。従って f はこの経済のコアに属する。[用語については，この後の注16を見よ。]

(15)　レプリカ経済の点列はこの制約を満たす。

Anderson の不等式 (!!) を確認するために以下の計算を行う：

$$f(1)-e(1)=(1,1)-(2,0)=(-1,1)$$

$$f(2)-e(2)=(1,1)-(0,2)=(1,-1)$$

$$\Gamma(1)=\{(x_1,y_1):(x_1,y_1)>_1 f(1)\}=\{(2,2)\}$$

$$\gamma(1)=\{z_1: z_1=(x_1,y_1)-e(1),(x_1,y_1)\in\Gamma(1)\}=\{(2,2)-(2,0)\}=\{(0,2)\}$$

$$\Gamma(2)=\{(x_2,y-2):(x_2,y_2)>_2 f(2)\}=\{(2,2)\}$$

$$\gamma(2)=\{z_2: z_2=(x_2,y_2)-e(2),(x_2,y_2)\in\Gamma(2)\}=\{(2,2)-(0,2)\}=\{(2,0)\}$$

$p_x+p_y=1$ および，$p_x\geqq 0, p_y\geqq 0$ となる $p=(p_x,p_y)$ と書く。すると $\inf p\cdot\gamma(1)=p\cdot(0,2)=2p_y$ かつ $\inf p\cdot\gamma(2)=p\cdot(2,0)=2p_x$ となる。

よって，主体 a に関する Anderson の不等式 (!!) は

$$\inf p\cdot\gamma(a)\leqq p\cdot[f(a)-e(a)] \qquad (!!)$$

となる。主体 1 について上式は

$$2p_y\leqq p\cdot(-1,1)=-p_x+p_y=-(1-p_y)+p_y=-1+2p_y$$

すなわち，$0\leqq -1$ となるが，これはすべての p について偽である。従って $a=1$ のとき，(!!) が成立するような価格ベクトル p は存在しない。事実，

$$\inf p\cdot\gamma(a)=p\cdot[f(1)-e(1)]+1$$

が成立し，本論文で得られたように，この方程式の右辺は，一般的には，左辺から得られる最小の上界であることが示される。主体 2 について，即ち $a=2$ のケースにも同様な事がいえる。

8．個別対平均　本ノートで述べられた結論は Anderson (1978) と同様に平均に関してである。しかしながら，我々の関心は（初歩的ではあるが）個別の主体に関する不等式であり，すなわち (5'.2) あるいはその一般的な形式である，任意の主体 $a\in A$ について

$$\inf p\cdot\{x-e(a):x>_a f(a)\}\leqq p\cdot(f(a)-e(a))+\beta \qquad (5''.2)$$

である。ただし，分割可能な場合には $\beta=0$ であり，（規準化された）分割不可能な場合には $\beta=1$ である。このことは，古典的な（強凸で微分可能な）Edgeworth の箱のケースにおいては，契約曲線上の点における限界代替率がワルラス的配分におけるものと異なる場合には，コア配分より強く選好される点の集合がコア配分を通る均衡価格の下に「はみ出す」ために，均衡価格で測ったコア配分の価値が同一の効用水準を達成するために必要な額よりも高いことに対応しているように見える。一方，両者の限界代替率が等しい場合には，支出の水準は最小化されている。

第 2 章　離散財空間における競争配分の近似的パレート最適性

9．　離散空間における（すなわち，全ての財が分割不可能な場合に）ワルラス的（即ち，競争）配

分のパレート最適性について似たような現象が見られる。利己的な選好を持つ交換経済においてワルラス的配分が**弱い意味で**パレート最適[16]（彼らの用語ではパレート**効率的**，ここではWPOと呼ぶ）であることのArrow and Hahn (1971) あるいはVarian (1984) による証明は離散空間においても正しい。しかし，次の例のように[17]ワルラス的配分はパレート最適であるとは限らない。

例　2者2財で，$e(1)=(1,0)$ かつ $(e(2)=(0,1)$ となる（Edgeworthの箱の）交換経済（$\# A=2$, $k=2$）を考える。従って 1×1 の箱の4つのコーナーだけが実現可能である。選好は非負整数の座標点の効用関数の値として定義される。主体1については，$u^1(x^1, y^1)=x^1+(4/3)y^1$ であり；主体2については，$u^2=x^2+y^2$ である。（ここで上付きの添字は主体を表す。べき上の意味ではない。）コアは2点 $e=\langle(1,0);(0,1)\rangle$ 及び $f=\langle(0,1);(1,0)\rangle$ からなるが，f だけがパレート最適である。（両者とも弱い意味でパレート最適である。）$p^*=(1/3, 2/3)$ となる対 (p^*, e) はワルラス的均衡でありワルラス的配分はパレート最適ではない。（f が均衡配分であるような別のワルラス的均衡も存在する。）

しかしながら，一下記の定義1によって特定化される意味で一離散空間においては，ワルラス的配分は「近似的にパレート最適」であることが分かる。特に，下記の系1で示されるように，強い単調性を満たす選好を持つ2交換者経済（$n=2$）においては，所与のワルラス的（従って，弱い意味でパレート最適な）配分 $z^*=(z^{*1}, z^{*2})$ に対して，パレート最適な配分 $z^{**}=(z^{**1}, z^{**2})$，相異なる主体 i と j，および，財 r が存在して，$z^{**i}\sim_i z^{*i}$ および $z^{**j}-u(r)\lesssim_j z^{*j}$ となる。[ここで，$u(r)\in R^k$ は財空間のベクトルで r 座標が1で他は0である。記号 $\sim_i$ は主体 i にとって無差別であることを表す。]

こうして強い単調性を満たす選好を持つ2交換者の場合には，ワルラス的配分は，各々の交換者にとって満足度の（あるいは効用の）単位で，パレート最適な配分と最大1単位分しか差がないことがわかる。追加的な仮定（選好に関する下記の仮定(A)）を用いると，弱い単調性を持つ選好の場合にも同様の結果を得ることができる。（下記の命題2参照。）

---

(16)　この用語は広く用いられているが，誤解をさけるために区別を述べる。配分が**弱い意味でパレート最適**（WPO）であるとは，**全員**をより良くすることが不可能であることである。**パレート最適**（PO）であるとは他の誰をも悪くせずに**少なくとも1人**の個人をより良くすることが不可能な場合である。配分がパレート最適ならば必然的に弱い意味でパレート最適である。しかしながら，前記の例で見たように，配分は弱い意味でパレート最適であるが，パレート最適でないことがあり得る。

配分 z' が z'' に**パレートの意味で優越する**（PS）とは z' が実現可能であり z' においてある個人は z'' より選好しどの個人も悪くならない場合である。配分 z' が z'' に**強くパレートの意味で優越する**（SPS）とは z' が実現可能であり z' において全員が z'' より選好する場合である。従ってパレートの意味で優越する配分がない場合に z' はパレート最適であり；強くパレートの意味で優越する配分がない場合にそれは弱い意味でパレート最適である。

(17)　この例はKenneth Arrowによる1950年代に作られた（しかしながら，未刊であると思われる）ものの若干の修正である。（またQuirk and Saposnik, 1068 134ページを見よ。）

2人より多くの交換者がいる場合（$n \geqq 3$）には，他の条件を課すことによって，強い単調性を持つ選好の場合に命題3が得られる。命題3 (i) は仮定 (A) を用い，さらに，財の数 k が，n を主体の数としたとき，$n-1$ 以上であることを要求する。命題3 (ii) は系1を一般化し仮定 (A) を用いないが，$n=2$ のときには自動的に満たされる別の条件を課している。

定義1 (i). $u(r)$ を第 r 座標を1とし他の座標を0とする k ベクトルとする。

(ii) 配分 z が**近似的にパレート最適**であるとは，z が PO であるか，または，以下が成立することである：z にパレートの意味で優越するパレート最適な配分 $z^{\wedge}$ が存在して，任意の $i \in N$ に対して，$z^{\wedge i} >_i z^i$ ならば $z_i \gtrsim_i z^{\wedge i} - [u(r_1) + \cdots u(r_{n-1})]$ となる，但し，r_n は $\{1, \cdots, k\}$ に属するが，異なるとは限らない。（$z^{\wedge}$ は z にパレートの意味で優越するから $z^{\wedge j} >_j z^j$ でないなら必然的に $z^{\wedge j} \sim_j z^j$ となる。）

注意.　$n=2$ で $k \geqq 1$ の場合には，定義1は以下と同値である：z^* が PO であるか，または PO な配分 z^{**} が存在して，z^{**} は z^* に PS して，ある $i, j \in \{1, 2\}, j \neq i$ となる $r \in \{1, \cdots, k\}$ に対して，[1] $z^{*j} \sim_j z^{**j}$ および [2] $z^{*i} \gtrsim_i z^{**i} - u(r)$ となる。（z^* が PO でないときには z^{**} は z^* に PS するから，$z^{**} >_i z^*$ でなければならない。）

命題1.　主体の数を $n=2$ とし，財の数を $k \geqq 1$ とする。全ての財が（整数値に規準化された）分割不可能で，消費集合が Z_+^k であり，保有量は非負（整数値），（弱い）選好関係は，推移的で反射的かつ連結的（従って完備）で，さらに，強い単調性（SM）を満たすとする。

z^* を WPO な配分とする。この時，z^* は近似的にパレート最適である。

系1.　命題1の仮定の下で，任意のワルラス的配分は近似的にパレート最適である。

系1の証明.　ワルラス的配分は WPO である。(Arrow and Hahn または Varian の証明を見よ。) 従って，命題1より，近似的にパレート最適である。

注意.　以下で見るように系1は下記命題3 (ii) のスペシャルケースとして見ることができるであろう。

命題1の証明.　z^* は PO でないとしてかまわない。すると，（分割不可能性から）実現可能集合は有限であるから，z^* に PS する z^{**} が存在する。従って z^{**i} を z^{*i} より強く選好する i が存在する。故に，z^* は WPO であるから，i と異なる j について $z^{*j} \sim_j z^{**j}$ となり，[1] が成立する。（記号 $\sim_j$ は主体 j にとって無差別であることを表す。）次の段落で配分 $z^{***} = \langle z^{***i}, z^{***j} \rangle = \langle z^{**i} - u(r), z^{**j} + u(r) \rangle$ が実現可能であることを示す。ここで [2] が偽であるとしよう。すると強い単調性および z^{**i} が z^{*i} より強く選好されることから，z^{***} は z^* に強くパレートの意味で優越し，仮定に反して，WPO ではないことになる。

最後に，z^{***} が実現可能であることの証明が残っている。作り方からそれはバランスしており，従って z^{***} が個人にとって実現可能である事を示せばよい。z^{***j} は個人にとって実現可能な z^{**j} よりもベクトルの意味で大きいので，明らかに z^{***j} は個人にとって実現可能である。z^{***i} に関

しては，もし z^{**i} が非負で 0 でなければ個人にとって実現可能である。その場合，z^{**i} 少なくとも 1 つの座標，例えば r 番目，が 1 以上であり，それゆえ $z^{**i}-u(r)$ は非負であり，従って主体 i にとって実現可能である。仮に $z^{**i}=0$ であるとしよう。$z^{*i}\geq 0$ であるから，$z^{*i}\geq z^{**i}$ となるが，これは，z^{**i} が主体 i によって z^{*I} より強く選好されるから，強い単調性の仮定より不可能である。　Q.E.D.

以下の命題 2 は，系 1 と関係しているが，下記の仮定が満たされているならば，選好が単に弱い単調性を満たせば，ワルラス的配分が近似的にパレート最適になることを示している。：

(A) 全ての消費者にとって，初期保有ベクトルがどこかの成分に 0 を持つベクトルより弱く選好される；形式的には，(A) は，任意の主体 $i\in\{1,2\}$ に対して，もし消費ベクトル z^i が 0 成分を持てば，$e(i)\succsim z^i$ となることである。

(明らかに，これは強い単調性の仮定を弱めるためにはかなり高い犠牲であるが，このケースは無意味ではない：これは Cobb-Douglas 選好の場合に満たされる。) 命題 2 は (A) を仮定しているため，系 1 と比較することはできない。

命題 2．　強い単調性の仮定を弱い単調性に代える以外は命題 1 の仮定を満たし，さらに仮定 (A) を課す。すると任意のワルラス的配分は近似的にパレート最適となる。

証明．　z^* はワルラス的であるから，WPO である。命題 1 の証明の最初のパラグラフは，弱い単調性の下でも，$u(r)$ を $u=(1,\cdots,1)$ (全ての成分が 1 のベクトル) におきかえ，さらに，z^{***} を $z\#=\langle z\#^i, z\#^j\rangle=\langle z^{**i}-u, z^{**j}+u\rangle$ に代える事によって成立する。最後に $z\#$ が実現可能であることを証明すればよい。この場合も $z\#^i$ の個人にとっての実現可能性だけが問題である。ここで，明らかに，$z\#^i$ は，$z^{**i}\gg 0$ であるならば，主体 i にとって実現可能である。しかしながら，もしそうでなければ，z^{**i} は 0 成分を持ち，従って (◦) $z^{**i}\precsim_i e(i)$ である。しかし，命題 1 の証明の最初のパラグラフで述べたように $z^{**i}\succ_i z^{*i}$ である。また z^* はワルラス的であるから，個人合理的 (IR) であり，それゆえ $z^{*i}\succsim_i e(i)$ である。ゆえに z^{**i} は z^{*i} より主体 i にとって強く選好される。これは (◦) に矛盾する。　Q.E.D.

命題 3．　(i) 主体の集合 $N=\{1,\cdots,n\}$ には少なくとも 2 人のメンバーがいる ($n\geq 2$) と仮定し，さらに財の数は $k\geq n-1$ であり，全ての財は (整数値に規準化された) 分割不可能財であり，消費集合は Z^k_+ であると仮定され，保有量は非負 (整数値) で，(弱い) 選好関係は推移的，反射的，かつ連結的 (従って完備)，及び，強い意味で単調 (SM)，ならびに仮定 (A) を満たすとする。すると全てのワルラス的配分は近似的にパレート最適である。

(ii) さらに，(A) を仮定しないと，z^{**} が z^* を PS するような PO な配分 z^{**} をワルラス的配分 z^* より強く選好する主体の数 m が $n/2$ 以上であるならば，任意のそのような主体 i とある財 r について $z^{*i}\succsim_i z^{**i}-u(r)$ である。

注意．　系 1 は命題 3 (ii) の $m=n/2$ であるようなスペシャルケースである。

命題 3 の証明. z^* をワルラス的配分としパレート最適な配分 z^{**} が z^* に PS するとする。一般性を失うことなく，[1] $z^{**1} >_1 z^{*1}$ とすることができる。

1．主張： $z\#^1 = z^{**1} - [u(r_2) + \cdots + u(r_n)]$ は主体 1 にとって実現可能である。

証明. 主張が偽であるとする。すなわち，z^{**1} において $n-1$ 単位より少ない財しかないとする。しかしながら，$k \geq n-1$ であるから，z^{**1} は少なくとも 1 つの 0 成分を持つ。それゆえ，(A) より $z^{**1} \lesssim_1 e(1)$ である。しかしながらワルラス的配分は個人合理的（IR）であるから，$e(1) \lesssim_1 z^{*1}$ が得られ，それゆえ $z^{**1} \gtrsim_1 z^{*1}$ である。しかし，これは [1] に矛盾する。

2．主張： $z\#^1 \lesssim_1 z^{*1}$

証明. そうでないとする。すると $z\#^1 >_1 z^{*1}$ である。次の配分を考えよう：

$$z\# = \langle z\#^1, z\#^2, \cdots, z\#^n \rangle$$

但し，$j > 1$ に対しては

$$[2] \qquad z\#^j = z^{**j} + u(r_j)$$

である。

すると，強い単調性と [2] から，$z\#$ は z^* に強くパレートの意味で優越する。しかし，z^{**} は z^* に PS する。それゆえ，$z\#$ は z^* に強くパレートの意味で優越し，従って z^* は WPO ではなく，前提に矛盾する。従って (i) の証明が終了する。

(ii) の証明. 今，$m \geq n-1$ とし，z^{**} を z^* より強く選好する $m-n$ 人の主体がそれぞれ 1 単位の財を z^{**} と z^* が無差別であるような主体に与える配分 $z\#\#$ を考える。

仮に，$m-n$ 人の主体のうちの 1 人，例えば主体 i，にとってある財を 1 単位与えることが実現不可能であったとする。すると，$z^{**i} = 0$ となる。しかしながら命題 1 のように，前提より，主体 1 は z^{**1} を z^{*1} より強く選好し，（ワルラス的配分が IR であることより）z^{*1} は主体 1 にとって $e(1)$ より望ましいか又は無差別である。しかし，$e(1)$ は非負で，それゆえ z^{**1} は 0 財ベクトルより強く選好されるが，これは矛盾である。従って $z\#\#$ は実現可能である。

ここで，仮に $z\#\#^1 \lesssim_1 z^{*1}$ であるとする。すると，以前と同様に，強い単調性から，$z\#\#$ は z^* より強くパレートの意味で優越し，それゆえ，z^* は WPO でないが，これは前提に矛盾する。（なぜならワルラス的配分は常に WPO であるからである。）これによって証明が終了する。

参 考 文 献

(1) R. M. Anderson, *An Elementary Core Equivalence Theorem*, Econometrica 46 (1978), 1483-1487.

(2) R. M. Anderson, *Gap-minimizing Prices and Quadratic Core Convergen*ce, Journal of Mathematical Economics 16 (1987), 1-15.

(3) R. M. Anderson, *The Second Welfare Theoem with Nonconvex Preferences*, Econometrica 56

(1988), 361-382.
(4) K. J. Arrow and F. H. Hahn, *General Competitive Analysis*, Holden-Day, San Francisco, 1971.
(5) G. Debreu, *Theory of Value*, Wiley, New York, 1959.
(6) G. Debreu and H. Scarf, *A Limit Theorem on the Core of an Economy*, International Economic Review 5 (1963), 235-246.
(7) E. Dierker, *Gains and Losses at Core Allocations*, Journal of Mathematical Economics 2 (1975), 119-128.
(8) W. Hildenbrand, *Core of an Economy*, Ch. 18 in the Handbook of Mathematical Economics II, K. J. Arrow and M. D. Intriligator, North-Holland, Amsterdam, 1982.
(9) W. Hildenbrand and A. P. Kirman, *Equilibrium Analysis. Variations on Theorems by Edgeworth and Walras*, North-Holland, Amsterdam, 1988.
(10) H. Keiding, *A Limit Theorem on the Cores of Large but Finite Economies*, preprint, April, 1974.
(11) T. C. Koopmans, *Three Essays on the State of Economic Sciencs*, McGraw-Hill, New York, 1957.
(12) A. A. Lewis, *On the Effective Content of Asymptotic Verifications of Edgeworth's Conjecture*, Mathematical Social Science 22 (1991), 275-324.
(13) A. Mas-Colell, *The Theory of General Economic Equilibrium*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
(14) J. Quirk and R. Saposnil, *Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics*, McGraw-Hill, New York, 1968.
(15) H. Varian, *Microeconomic Analysis. Second Edition*, Norton, New York, 1984.
(16) K. Vind, A *Theorem on the Core of an Economy*, The Review of Economic Studies 5, (1965), 165-177.

翻訳：**中 村 慎 助**
(経済学部助教授)