Title	小さな独裁者, 大きな独裁者 : 2つの選択の問題がある場合の分権的な決定の可能性
Sub Title	Small dictators and the grand dictator : the possibility of decentralized social choice when paired issues are simultaneously considered
Author	広川, みどり
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1995
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.88, No.1 (1995. 4) ,p.62- 74
JaLC DOI	10.14991/001.19950401-0062
Abstract	
Notes	小特集 : The First Decentralization Conference in Japan
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19950401-0062

「三田学会雑誌」88巻1号（1995年4月）

小さな独裁者，大きな独裁者

──2つの選択の問題がある場合の分権的な決定の可能性──[1]

広川　みどり

1．序

本論は，複数の決定の問題があるときに，問題ごとに異なる選択のルールを適用することが可能かどうかについて考察する。

われわれの出発点は Arrow［1963］の一般不可能性定理である。それによれば，個人の選好に基づいた社会的選択を行うとき，社会的選択のルールがいくつかの妥当な公理を満たすならば，そのルールは独裁的なものにならざるをえない。

この帰結は，適切に個人の意思を反映した社会的選択のルールが存在しない，という意味で深刻なものとして受けとめられてきた。しかし，次の2つの点を考えると，その深刻さの度合いは減少するようにみえる。

ひとつは，独裁者についての観察可能性である。Arrow［1963］の定義によれば，独裁者（dictator）とは，ありとあらゆる選好の組（プロファイル）に対し，常に自分の選好と社会的な帰結とが一致する個人のことをいう。すなわち，多くの選好プロファイルとそれに対する帰結とを見渡してはじめて，誰かが独裁者であることが観察できる。

しかし，実際になんらかの決定をするときに顕現する選好プロファイルはひとつか，たかだか2，3個であろう。たとえば，ひとつの決定事項に対して，個人が全く正反対の選好を表明することはあまりみられない。そういった状況においては，独裁者が存在したとしても，だれかひとりの選好が社会的な帰結と一致したということが，その顕現した2，3のケースについて観察されるだけであろう。ましてや表明された各人の選好が互いに似かよったものであるときには，独裁者の存在は

（1） 論文の作成にあたり，金子守，鈴村興太郎，須賀晃一，中村慎助，長名寛明の諸教授から有益なコメントをいただいたことを感謝する。また，本論文は，慶應義塾大学で1994年11月に行われた The First Decentralization Conference in Japan での報告をもとに作成したものである。貴重な機会を与えてくださった慶應義塾大学経済学部，および，長名寛明，西條辰義，中村慎助，松島斉の諸教授に感謝する。

それほど深刻なものには思えないであろう。

もうひとつは，Arrow [1963] の定理がひとつの選択の問題についての選択を対象としている，という点である。ところが，通常，われわれは，多くの選択の問題に直面している。たとえば，ゴミ処理場の立地点の選択，公園の立地点の選択，委員会のメンバーを誰にするかの選択，などである。こういうときに，各々の選択の問題について独裁者が存在したとしても，それは深刻な問題には思えないだろう。

これらに対するひとつの反論として，以下が考えられるだろう。それは，ありとあらゆる選択肢の集合 X を考え，個別の選択は選択肢の部分集合 $X' \subset X$ からおこなわれると考える，というものである。こう考えれば，Arrow の意味での独裁者は，さまざまな選択の問題に対して自分の思い通りの選択肢を社会的に実現させることができることになる。このときには，X に対して表明された選好プロファイルがひとつだけであっても，さまざまな個別の選択の問題に対し，さまざまな選好が観察できる可能性がある。たとえば，委員会のメンバーの選択については全員の選好が一致し，ゴミ処理場の立地点についての選択のさいには意見がわかれる，ということがありうるであろう。そして，ありとあらゆる選択の問題に対し，常にある個人の意見と社会的な帰結とが一致していることが観察できるだろう。このことは，選択の問題の異なる様々な選択状況において，つねに決定を意のままにする主体が存在することを意味し，深刻な事態にみえる。

しかし，このような場合，各々の選択の状況における選択ルールは，ひとつの大きな社会的選択のルールから導出されたものである。これは，すべての選択の問題に対し同一のルールが適用されることを意味するわけで，非現実的に思われる。

それでは，おのおのの選択の問題に対して，異なる，個別の社会的選択のルールを適用することを許すとしたら，独裁者の力のおよぶ範囲を，各々の選択の問題についてだけのものとして，局所的なものにとどめることができるだろうか？　これが，本論文におけるわれわれの問題関心である。

この問題を考えるために，この論文では次のような 4 つの設定をおく。

第一に，社会成員は複数の選択の問題に直面しているものとする。ここでは簡単化のために，選択の問題が 2 個のケースを取り上げる。

第二に，それぞれの選択の問題に対して，異なる社会的選択のルールを適用することを許すものとする。たとえば，委員会のメンバーの選出については多数決を用い，公園の立地点の選択については識者の意見を尊重するルールを用いる，といった具合に，である。

第三に，それぞれの選択の問題についての選択のルールは，他の選択の問題での選択の帰結に依存しうるものとする。たとえば，公園をどこにつくるかの選択のルールは，ゴミ処理場の立地点に依存するかもしれない。つまり，ゴミ処理場の近辺の人々に公園の立地点を選ぶ際の優先権を与える，といったことまで，考察の対象とするのである。このように考えると，ひとつの問題について選択を行なうときには，社会成員は，当該の選択の問題における選択肢の集合と他の選択の問題で

の結果とを考慮しながら，選択をおこなうことになる。そこで，当該の選択の問題における選択肢の集合と他の選択の問題からの選択肢とのペアを**選択状況**と呼ぶことにする。

第四に，ここでは，個別の問題は個別に扱うものとする。すなわち，ここでは，社会的選択のルールについての要請は，各々の選択状況におけるルールについてのみ課すものとする。その各々の選択状況におけるルールを**局所的選択関数**と呼び，局所的選択関数には**局所的パレート**と **LIIA** との2つの要請を課すものとする。ただし，局所的パレートとは，個別の選択状況におけるパレート性を意味し，LIIA とは個別の選択状況における IIA（無関係選択対象からの独立性）を意味するものとする。このとき，もしも各々の選択の問題での選択肢が3つ以上であれば，Arrow［1963］の定理から，各々の選択状況に独裁者が存在する。われわれはその個人を**小さな独裁者**と呼ぶ。

以上の設定のもとで，われわれは以下の帰結を示す。

第一に，個々の局所的選択関数から導かれる順序が整合的なものであるためには，各々の選択状況に生じた小さな独裁者たちが共通の個人でなければならない。これは，あるひとりの個人が，どの選択状況においても自分の意見を社会的な帰結として実現させることを意味する。したがって，すべての問題についての決定方法が，たとえ，みかけは異なっていたとしても，実質的には同一の独裁的ルールになってしまうわけである。われわれは，その共通の独裁者を**大きな独裁者**と呼ぶ。

この帰結は，Gibbard［1974］の権利についての議論を応用することによって得られる。この大きな独裁者は，全体の選択肢についての Arrow の独裁者とは異なっている。

異なった問題に対して個別の社会的選択関数を考えるといった分権的なアプローチは，Barbera, Sonnenschein & Zhou［1991], Barbera, Gul & Stacchetti［1993］らが voting by committees の概念を用いて行なっている。ただし，彼らの議論は戦略的操作可能性（manipulability）についてのものである。

第二に，それぞれの問題についての選択肢がそれぞれ2個しかなく，個別の選択状況に Arrow［1963］の定理が適用できない場合にも，小さな独裁者と大きな独裁者とが存在する場合がある。この部分の証明において，局所的パレートの性質が強力に働き，局所的な決定権を得た個人が大きな独裁者へと変化していく様子が見られる。われわれは，その現象を，Sen［1976］の**パレート伝染病**にちなんで，**局所的パレート伝染病**と呼ぶことにする。

以上の2つの帰結は否定的な結論であったが，つぎに，われわれは肯定的な結論も述べる。

第三に，各々の問題についての選択のさいに，その当該の問題についての選好が他の問題の決定に依存しない個人を考えると，大きな独裁者は存在しないことを示す。すなわち，個人の選好を分離型に制限することで，肯定的な結論を得る。

論文の構成は以下の通りである。第2節では，基本的なモデルを提示し，社会的順序が非循環であるとき大きな独裁者が存在することを示す。第3節では，各問題についての選択肢がそれぞれ2個しかなく，個別の選択状況に Arrow［1963］の定理が適用できない場合にも，第2節の帰結は頑

健であることを示す。第4節では，選好の制限の問題を考える。

2．小さな独裁者，大きな独裁者

いま n 人 $(2 \leqq n < \infty)$ の個人が複数の**選択の問題**（issue）に直面しているものとする。ここでは単純化のため選択の問題は2つであるとする。[(2)] そして，第 j 番目 $(j=1,2)$ の選択の問題における選択肢の集合を X_j とする。ただし，$3 \leqq \# X_j$, $X_1 \cap X_2 = \phi$ であるとする。[(3)] ここから自然な形として，社会的な選択肢は $X \equiv X_1 \times X_2$ の要素 $x=(x_1, x_2)$ としてあらわされる。

X 上の弱順序の集合を $\boldsymbol{R}$ とする。[(4)] 個人 i の選好は X 上の二項関係 $R_i \in \boldsymbol{R}$ によってあらわされるものとする。

次に局所的な選好順序を定義するために，選択肢のうちの第 j 要素以外の部分を $x_{-j} \in X_{-j}$ に固定したときの R_i の X_j 上への射影を $R_i(x_{-j})$ とあらわし，その集合を $\boldsymbol{R}(x_{-j})$ とあらわす。[(5)]

$x, y \in X$ に対し，$x R_i y$ で，x を少なくとも y と同程度に好ましいということを表現し，$x_{-j} \in X_{-j}$, $x_j, y_j \in X_j$ に対し，$x_j R_i(x_{-j}) y_j$ で，選択肢のうちの第 j 要素以外の部分が $x_{-j} \in X_{-j}$ であったときに，x_j を少なくとも y_j と同程度に好ましいということを表現するものとする。

さらに，R_i の非対称部分を P_i，対称部分を I_i とあらわす。[(6)]

社会的な順序についても個人の選好順序と同様に，$R \in \boldsymbol{R}$, $R(x_{-j}) \in \boldsymbol{R}(x_{-j})$ などとあらわし，同様の意味を持つものとする。

ここでは，おのおのの選択の問題についての選択ルールは選択の問題 j ごとに異なったものであってよいし，また，他の選択の問題での選択の結果 x_{-j} に依存したものであってもよい。そこで，われわれは (X_j, x_{-j}) を選択状況と呼び，選択状況 (X_j, x_{-j}) における**局所的な社会的選択関数**を

$$f(\cdot | X_j, x_{-j}) : \boldsymbol{R}(x_{-j})^n \to \boldsymbol{R}(x_{-j})$$

とおく。この $f(\cdot | X_j, x_{-j})$ は，次の意味での**局所的パレート**, **LIIA** を満たすものとする。

局所的パレート：$\forall x_j, y_j \in X_j : [\forall i \in N,\ x_j P_i(x_{-j}) y_j] \Rightarrow x_j P(x_{-j}) y_j.$

（2） 本論文の命題はすべて，選択の問題の数が3以上のケースに拡張できる。証明は，Hirokawa [1994] を参照されたい。

（3） $\# X_j$ は X_j の要素の数をあらわす。$X_1 \cap X_2 = \phi$ という仮定は，形式的には仮定しなくてもかまわないが，2つの問題が異なる状況を考えたいために置いてある。

（4） 順序とは，反射性（reflexivity），完備性（completeness），推移性（transitivity），を満たすような二項関係をいう。反射性とは，任意の $x \in X$ に対して xRx が成立することをいい，完備性とは，任意の $x, y \in X$ に対して xRy または yRx が成立することをいう。また，推移性とは，任意の $x, y, z \in X$ に対して，もしも xRy および yRz が成立するときに，xRz が成立することをいう。

（5） $j=1$ のとき $-j=2$，$j=2$ のとき $-j=1$ であるとする。

（6） xPy は xRy かつ not yRx，xIy は xRy かつ yRx によって定義される。

LIIA (Local Independence of Irrelevant Alternatives)：

$$\forall x_j, y_j \in X_j,\ \forall (R_1(x_{-j}), \cdots, R_n(x_{-j})),\ (R_1'(x_{-j}), \cdots, R_n'(x_{-j})) \in \boldsymbol{R}(x_{-j})^n:$$
$$[\forall i \in N,\ x_j R_i(x_{-j}) y_j \Leftrightarrow x_j R_i'(x_{-j})\ y_j]$$
$$\Rightarrow [x_j R(x_{-j}) y_j \Leftrightarrow x_j R'(x_{-j})\ y_j].$$

これらの定義において，局所的パレートは，個別の選択状況におけるパレート性を意味し，LIIA とは個別の選択状況における IIA（無関係選択対象からの独立性）を意味する。そのため，このとき，Arrow の一般不可能性定理によって，以下が成立する。

定理（Arrow）：局所的パレート, LIIA を満たす $f(\cdot|X_j, x_{-j})$ は**独裁的**（dictatorial）である。すなわち，

$$\exists i \in N,\ \forall (R_1(x_{-j}), \cdots, R_n(x_{-j})) \in \boldsymbol{R}(x_{-j})^n,\ \forall x_j, y_j \in X_j,$$
$$x_j P_i(x_{-j}) y_j \Rightarrow x_j P(x_{-j})\ y_j.$$

ここで選択状況 (X_j, x_{-j}) における独裁者を $d(X_j, x_{-j})$ とあらわす。上の定理によって出現した独裁者は局所的に独裁的な力を持っていると考えられるので，われわれは彼を**小さな独裁者**（small dictator）と呼ぶ。

われわれは，この小さな独裁者が，すべての選択状況に共通であり，その意味で**大きな独裁者**（grand dictator）になってしまうことを示す。

命題 1：　任意の j に対して $\# X_j \geqq 3$ であるとする。局所的パレート, LIIA が満たされているものとする。このとき，大きな独裁者が出現するか，または社会的順序に循環が生ずる。

証明：　社会的順序の循環を認めないときに，大きな独裁者が出現しないとすると矛盾が生じることを示す。

大きな独裁者が生じないとすると，つぎの 2 つの可能性が考えられる。ひとつは，ひとつの選択の問題についての小さな独裁者たちが異なるケースであり，もうひとつは，異なる選択の問題についての小さな独裁者たちが異なるケースである。すなわち，ある選択の問題 X_j に対して $d(X_j, \cdot)$ が異なるケースと，異なる選択の問題 X_j, X_k に対して $d(X_j, \cdot)$ と $d(X_k, \cdot)$ とが異なるケースとが考えられる。

そこで，いま， 4 つの選択肢 $(a_1, a_2), (a_1, b_2), (b_1, a_2), (b_1, b_2)$ および，小さな独裁者 $d_1 = d(X_1, a_2)$, $d_2 = d(X_1, b_2)$, $d_3 = d(X_2, a_1)$, $d_4 = d(X_2, b_1)$ を考えると，上に述べた 2 つのケースは，一般性を失うことなく，d_1 から d_4 のうちの一組が異なる個人であるとすることで同時に取り扱うことができる。

さて，4人の小さな独裁者 d_1, d_2, d_3, d_4 の選好が $(a_1, a_2)\,P_{d_1}(b_1, a_2), (b_1, b_2)\,P_{d_2}(a_1, b_2), (a_1, b_2)\,P_{d_3}(a_1, a_2), (b_1, a_2)\,P_{d_4}(b_1, b_2)$ であったとする。ここで，もしも d_1 から d_4 のすべての個人が同一の個人であればこのような選好を持ち得ないことに注意しよう。

このとき，小さな独裁者の定義より，$a_1 P(a_2)\,b_1, b_1 P(b_2)\,a_1,\ b_2 P(a_1)\,a_2, a_2 P(b_1)\,b_2$ が従うが，これは次のような社会的順序の循環を意味する[(7)]：

$$(a_1, a_2)\,P(b_1, a_2)\,P(b_1, b_2)\,P(a_1, b_2)\,P(a_1, a_2)$$

以上から，社会的順序の循環を認めないときには，大きな独裁者が存在することが示された。//

注意 1：　命題1で得られた大きな独裁者は，Arrowの意味での独裁者（A-独裁者）とは異なる。A-独裁者の概念は以下で与えられる：

定義（A-独裁者）

ある個人 $i \in N$ が Arrowの意味での独裁者（A-独裁者）である。

$$\Leftrightarrow\quad \forall (R_1, \cdots, R_n) \in \boldsymbol{R}^n,\ \forall x, y \in X : x\,P_i\,y \Rightarrow x\,Py$$

A-独裁者が大きな独裁者となることは定義からすぐに得られる。逆に，大きな独裁者はA-独裁者にはならない。それを示すために，次の例を考える。いま，4つの選択肢 $(a_1, a_2), (a_1, b_2), (b_1, a_2), (b_1, b_2) \in X$ に対し，大きな独裁者 i の選好が次のようなものであったとする：

$$\forall x \in X - \{(a_1, a_2), (a_1, b_2), (b_1, a_2), (b_1, b_2)\}:$$
$$(a_1, a_2)\,P_i(b_1, b_2)\,P_i(a_1, b_2)\,P_i(b_1, a_2)\,P_i\,x.$$

このとき，社会的順序 $(b_1, b_2)\,P(a_1, a_2)\,P(a_1, b_2)\,P(b_1, a_2)\,P\,x$ は，個人 i が大きな独裁者であることと矛盾しない。実際，個人 i が大きな独裁者であることと個人 i の選好とから $a_2 P(a_1)\,b_2, b_2 P(b_1)\,a_2,\ a_1 P(a_2)\,b_1,\ b_1 P(b_2)\,a_1$ が従うが，これは上の社会的順序と矛盾しないため，$(a_1, a_2)\,P_i(b_1, b_2)$ かつ $(b_1, b_2)\,P(a_1, a_2)$ となる。これは，個人 i がA-独裁者ではないことを意味する。

注意 2：　個々の選択状況において，個人の選好と社会的選択の間に局所的なパレートの性質を課しているが，ここから全体的に帰結される社会的な順序を考えると，個人の選択肢に関する選好が全員共通のものであっても，社会的順序はその選好順序に一致しないことに注意しよう。これは，注意1であげた例において，大きな独裁者が持っていた選好を，他のすべての個人が有していると考えれば，直ちに導かれる帰結である。

注意 3：　命題1は各選択状況における個人の選好になんら制限をおいていない。すなわち，$f(\cdot\,|X_j, x_{-j})$ の定義域は非限定であった。しかし，このような各々の選択状況における定義域の

（7）$(a_1, a_2)\,P(b_1, a_2)\,P(b_1, b_2)\,P(a_1, b_2)\,P(a_1, a_2)$ とは，$(a_1, a_2)\,P(b_1, a_2)$, $(b_1, a_2)\,P(b_1, b_2)$, $(b_1, b_2)\,P(a_1, b_2)$, $(a_1, b_2)\,P(a_1, a_2)$ が全て成り立つことを表す。

非限定性と，選択肢全体にわたる選好の非限定性とは異なることに注意しよう。命題1では選択肢全体にわたる選好の非限定性を前提にしている。

3．局所的パレート伝染病

命題1では，各選択状況での小さな独裁者が，もしも異なっていれば，それぞれが独裁権を発揮する結果，社会的順序が循環してしまうことを示した。そのさい，証明の中では，小さな独裁者の存在は，Arrow の定理によってすでに得られたものとして扱っていた。それでは，Arrow の定理が適用できない $\# X_j=2$ となるような選択の問題 があったときにはどうなるだろうか？

本節では，この場合にも大きな独裁者が存在することを示す。命題2では，少なくともひとつの選択の問題の要素が3以上ならば，そこに小さな独裁者が存在し，その独裁権と局所的パレートとから，大きな独裁者が存在することが示される。さらに命題3では，個人の数が2で強選好しか認めないときには，両方の選択の問題の要素が2のときにも，局所的パレートが強力に働き，小さな独裁者が出現し，大きな独裁者になることが示される。これは，Arrow の定理においてパレート性が強力に働き，局所的な独裁者が大域的な独裁者になる様子に似ている。Sen ［1976］はその現象を**パレート伝染病**（Paretian Epidemic）と呼んだが，ここではそれにちなんで，その様子を**局所的パレート伝染病**（L-Paretian Epidemic）と呼ぶことにする。

命題2： 任意の j に対して $\# X_j=2$，かつ，ある j に対して $\# X_j \geqq 3$ であるとする。また局所的パレート，LIIA が満たされているものとする。このとき，大きな独裁者が出現するか，または社会的順序に循環が生ずる。

証明： すべての $j=1, 2$ に対して $\# X_j \geqq 3$ であるときには命題1より証明は完了する。そこで，いま，一般性を失うことなく，$\# X_1 \geqq 3, \# X_2=2$ であるとし，証明を行なう。このとき，Arrow の定理により，任意の $x_2 \in X_2$ について，(X_1, x_2) に小さな独裁者が存在する。

はじめに，1番目の選択の問題における小さな独裁者たちが共通であること，すなわち，任意の $x_2 \in X_2$ に対し，$d(X_1, x_2)$ が共通であることを示す。

そのため，ある $a_2, b_2 \in X_2$ に対し，$d(X_1, a_2) \neq d(X_1, b_2)$ であったとして矛盾を導くことにする。なお，$d(X_1, a_2)=d_1, d(X_1, b_2)=d_2$ と置く。

いま，4つの選択肢 $(a_1, a_2), (a_1, b_2), (b_1, a_2), (b_1, b_2)$ に対して，2人の小さな独裁者 d_1, d_2 の選好が $(a_1, a_2)\, P_{d_1} (b_1, a_2), (b_1, b_2)\, P_{d_2} (a_1, b_2)$ であるとし，全員の選好が $(a_1, b_2)\, P_i (a_1, a_2), (b_1, a_2)\, P_i (b_1, b_2)$ であるとする。ここで，もしも $d_1=d_2$ であれば，このような選好は持ち得ないことに注意しよう。このとき，小さな独裁者の定義および局所的パレートより，$a_1\, P(a_2)\, b_1$，$b_1\, P(b_2)\, a_1$，b_2

$P(a_1)\,a_2$, $a_2\,P(b_1)\,b_2$ が従うが，これは次のような社会的順序の循環を意味する：

$$(a_1, a_2)\,P(b_1, a_2)\,P(b_1, b_2)\,P(a_1, b_2)\,P(a_1, a_2).$$

以上から，社会的順序の循環を認めないときには，第1番目の選択の問題における小さな独裁者たちが共通であることが示された。以下では，一般性を失うことなく，その個人が個人1であるとする。

われわれは次に，第2番目の選択の問題についても，任意の $x_1 \in X_1$ に対して，選択状況 (X_2, x_1) に小さな独裁者が出現することを示す。そのため，ある選択状況 (X_2, a_1) に小さな独裁者が存在しないものとし矛盾を導く。

個人1が (X_2, a_1) での独裁者でないことから，ある a_2, b_2 に対し，次のような，ある局所的選好プロファイル $(R_1(a_1), \cdots, R_n(a_1))$ と，社会的な順序とを考えることができる：

$$a_2\,P_1(a_1)\,b_2 \text{ かつ } b_2\,R(a_1)\,a_2$$

このとき，局所的 パレートにより，ある i に対して $b_2\,R_i(a_1)\,a_2$ となっている。そこで，このときのプロファイルにおいて，$a_2\,P_i(a_1)\,b_2$ の選好を持つ個人の集合を I, $b_2\,R_i(a_1)\,a_2$ の選好を持つ個人の集合を I' とする。もちろん，$1 \in I$ である。

いま，4つの選択肢 $(a_1, a_2), (a_1, b_2), (b_1, a_2), (b_1, b_2)$ に対して，次のようなプロファイルを考えよう：

$$\forall i \in I,\ (a_1, a_2)\,P_i(b_1, a_2)\,P_i(b_1, b_2)\,P_i(a_1, b_2),$$
$$\forall i \in I',\ (b_1, a_2)\,P_i(b_1, b_2)\,P_i(a_1, b_2)\,R_i(a_1, a_2).$$

これは，上で与えた局所的選好プロファイル $(R_1(a_1), \cdots, R_n(a_1))$ を含んでいるので，$b_2\,R(a_1)\,a_2$ となる。また，第1番目の選択の問題における小さな独裁者が個人 $1 \in I$ であることから，$a_1\,P(a_2)\,b_1$, $b_1\,P(b_2)\,a_1$ となる。さらに，局所的パレートの性質により，$a_2\,P(b_1)\,b_2$ が成り立つ。これらは次のような社会的順序の循環を意味する：

$$(a_1, a_2)\,P(b_1, a_2)\,P(b_1, b_2)\,P(a_1, b_2)\,R(a_1, a_2).$$

したがって，第2番目の選択の問題についても，任意の $x_1 \in X_1$ に対して，選択状況 (X_2, x_1) に小さな独裁者が出現することが示された。

以上より，すべての選択状況 (X_j, x_{-j}) に小さな独裁者が存在することが示された。それらがすべて同一になり，大きな独裁者となることは，命題1と同様に示される。//

命題2は，$n=2$ かつ個人の選好が強選好の場合には，より強い定理に拡張することが出来る。それが命題3である。

命題3： $n=2$, $X = X_1 \times X_2$, 任意の $j=1, 2$ に対して $\# X_j = 2$ とする。いま，個人の選好順序および局所的な社会的順序を強い順序のクラスに限定する。ここで，局所的パレートが満たされてい

るものとすると，大きな独裁者が出現するか，または社会的順序に循環が生ずる。

証明：　$X_1=\{a_1, b_1\}$, $X_2=\{a_2, b_2\}$ とする。社会的順序に循環をみとめないときに，大きな独裁者が存在することを示す。

ステップ1　ある選択状況 (X_j, x_{-j}) に小さな独裁者が存在する。

いかなる選択状況にも小さな独裁者が存在しないものとし，矛盾を導く。

まず，強い順序の仮定の下では，非独裁かつ局所的パレートを満たす局所的な社会的選択関数 $f(\cdot|X_1, x_2), x_2=a_2, b_2$ としては，つぎの(1)，(2)の2つのタイプだけが考えられることに注意しよう(8)：

(1)　$a_1 P_1(x_2) b_1$　かつ　$a_1 P_2(x_2) b_1$ のとき，$a_1 P(x_2) b_1$,
　　　それ以外のとき，$b_1 P(x_2) a_1$,

(2)　$b_1 P_1(x_2) a_1$　かつ　$b_1 P_2(x_2) a_1$ のとき，$b_1 P(x_2) a_1$,
　　　それ以外のとき，$a_1 P(x_2) b_1$.

はじめに，$f(\cdot|X_1, a_2)$ と $f(\cdot|X_1, b_2)$ とが同じタイプであることを示す。そのため，一般性を失うことなく，$f(\cdot|X_1, a_2)$ が(1)のタイプのときに $f(\cdot|X_1, b_2)$ が(2)のタイプであるとすると矛盾することを示す。

いま，個人の選好が次のように与えられるとする：

$$(a_1, a_2) P_1 (a_1, b_2) P_1 (b_1, b_2) P_1 (b_1, a_2),$$

$$(b_1, b_2) P_2 (b_1, a_2) P_2 (a_1, a_2) P_2 (a_1, b_2).$$

このとき，$f(\cdot|X_1, a_2)$ が(1)のタイプであることから，$b_1 P(a_2) a_1$ が成り立ち，$f(\cdot|X_1, b_2)$ が(2)のタイプであることから，$a_1 P(b_2) b_1$ が成り立つ。また，局所的パレートより，$a_2 P(a_1) b_2$, $b_2 P(b_1) a_2$ が成り立つ。これらは次のような社会的順序の循環を意味する：

$$(a_1, a_2) P (a_1, b_2) P (b_1, b_2) P (b_1, a_2) P (a_1, a_2).$$

したがって，$f(\cdot|X_1, a_2)$ と $f(\cdot|X_1, b_2)$ とが同じタイプであることが示された。以後は一般性を失うことなく，それらがタイプ(1)であるとする。

同様に，$f(\cdot|X_2, x_1)$ についても同様に考えると，次の2つのケースが考えられる：

(3)　$a_2 P_1(x_1) b_2$　かつ　$a_2 P_2(x_1) b_2$ のとき，$a_2 P(x_1) b_2$,

---

(8)　局所的パレートより，$i=1, 2$ に対して $a_1 P_i(x_2) b_1$ であるときには $a_1 P(x_2) b_1$ が成り立ち，$i=1, 2$ に対して $b_1 P_i(x_2) a_1$ であるときには $b_1 P(x_2) a_1$ が成り立つ。さらに，小さな独裁者が存在しないことから，$a_1 P_1(x_2) b_1$ かつ $b_1 P_2(x_2) a_1$ であるときに $b_1 P(x_2) a_1$ が成り立つとすると，$b_1 P_1(x_2) a_1$ かつ $a_1 P_2(x_2) b_1$ に対しても $b_1 P(x_2) a_1$ が成り立つことになる。また，$a_1 P_1(x_2) b_1$ かつ $b_1 P_2(x_2) a_1$ であるときに $a_1 P(x_2) b_1$ が成り立つとすると，$b_1 P_1(x_2) a_1$ かつ $a_1 P_2(x_2) b_1$ に対しても $a_1 P(x_2) b_1$ が成り立つことになる。

それ以外のとき，$b_2 P(x_1) a_2$,

(4)　$b_2 P_1(x_1) a_2$　かつ　$b_2 P_2(x_1) a_2$ のとき，$b_2 P(x_1) a_2$,

それ以外のとき，$a_2 P(x_1) b_2$.

上で述べた帰結と同様に，$f(\cdot | X_2, a_1)$ と $f(\cdot | X_2, b_2)$ とが同じタイプであることもわかる。そこで，一般性を失うことなく，それらがタイプ(3)であるとする。そして，これらのもとで次のプロファイルを考える：

$$(a_1, a_2) P_1 (b_1, a_2) P_1 (b_1, b_2) P_1 (a_1, b_2),$$

$$(a_1, b_2) P_2 (a_1, a_2) P_2 (b_1, a_2) P_2 (b_1, b_2).$$

このとき，$f(\cdot | X_1, b_2)$ が(1)のタイプであることと，$f(\cdot | X_2, a_1)$ が(3)のタイプであることとから，$b_1 P(b_2) a_1$, $b_2 P(a_1) a_2$ となる。また，局所的パレートより，$a_1 P(a_2) b_1$, $a_2 P(b_1) b_2$ が成り立つ。これらは次のような社会的順序の循環を意味する：

$$(a_1, a_2) P (b_1, a_2) P (b_1, b_2) P (a_1, b_2) P (a_1, a_2).$$

ステップ1より，社会的順序に循環を生じせしめないためには，少なくともひとつの選択状況に小さい独裁者が存在することが必要である。いま，一般性を失うことなく，その選択状況を(X_1, a_2)とし，小さな独裁者を1としよう。

ステップ 2　ある選択状況(X_1, a_2)に小さな独裁者が存在するならば，選択状況(X_1, b_2)にも小さな独裁者が存在する。

いま，選択状況(X_1, b_2)に小さな独裁者は存在しないものとする。このとき，(X_1, b_2)についての局所的社会的選択関数として，前に挙げた(1)，(2)のタイプが考えられる。(1)のときには，次のようなプロファイルを考える：

$$(a_1, b_2) P_1 (a_1, a_2) P_1 (b_1, a_2) P_1 (b_1, b_2),$$

$$(b_1, a_2) P_2 (b_1, b_2) P_2 (a_1, b_2) P_2 (a_1, a_2).$$

このとき，局所的パレートにより，$b_2 P(a_1) a_2$, $a_2 P(b_1) b_2$ となる。また，$d(X_1, a_2)=1$ より，$a_1 P(a_2) b_1$ が成り立ち，(1)より $b_1 P(b_2) a_1$ が成り立つ。これらは次のような社会的順序の循環を意味する：

$$(a_1, a_2) P (b_1, a_2) P (b_1, b_2) P (a_1, b_2) P (a_1, a_2).$$

さらに，(2)のときにも同様に社会的順序の循環を導くことができる。[9]

以上により，(X_1, b_2)にも小さな独裁者が存在する。

$d(X_1, a_2)=d(X_1, b_2)$ となること，そして，それが大きな独裁者になることは，命題2と同じ手

(9)　次のようなプロファイルを考えればよい：$(b_1, b_2) P_1 (b_1, a_2) P_1 (a_1, a_2) P_1 (a_1, b_2)$, $(a_1, a_2) P_2 (a_1, b_2) P_2 (b_1, b_2) P_2 (b_1, a_2)$.

順によって証明できる。//

4．分権的な決定

これまでの命題の証明で「循環」を導くために用いられた論理は，個人がある問題について持つ選好が他の問題についての選好に依存していることがポイントであった。これは，ある問題について決定を行うときに，他の問題で決定しそうなことを考慮することを意味するわけで，多くの選択の問題があるときには，個人が多くのことを考慮に入れる能力をもつことを前提としている。しかし，通常は，個人はそれほど合理的ではないだろう。そこで，ここでは，個人の選好を，選択の問題ごとに外部性を持たないようなものに限定することを考える。そして，このときには，小さな独裁者は必ずしも大きな独裁者にはならないことを示す。この点を考えるために，次のような選好を考えよう。

分離型選好：　任意の x_j, y_j, x_{-j} について，もし $(x_j, x_{-j})\,R_i(y_j, x_{-j})$ が成立しているならば，あらゆる z_{-j} に対して以下が成り立つ：$(x_j, z_{-j})\,R_i(y_j, z_{-j})$

ここでは，選択の問題間の選好に制限を設けているわけで，ひとつひとつの選択の問題についての選好にはなんら制限を置いていないことに注意しよう。このとき，以下の命題が得られる。

命題 4：　すべての $j=1,2$ について $3\leqq \# X_j$ であるとし，局所的パレート，LIIA が満たされているものとする。このとき，各選択状況には小さな独裁者が存在するが，各個人が分離型選好をもつとき，大きな独裁者が出現しないようなルールが存在する。

証明：　Arrow の定理により，各選択状況には小さな独裁者が存在する。各個人の選好が分離型であるときには，もし，$x_j\,R_i(x_{-j})\,y_j$ であれば，任意の z_{-j} に対しても，$x_j\,R_i(z_{-j})\,y_j$ が成り立つため，各状況での選好を簡単に $x_j\,R_i\,y_j$ と表すことができる。いま，ある選択の問題 j において，$d(X_j, a_{-j})\neq d(X_j, b_{-j})$ となるような a_{-j}, b_{-j} が存在するならば証明は終わる。そこで，任意の選択の問題 j において，$d(X_j, x_{-j})$ がすべての x_{-j} に対して共通であるとする。また，選択の問題 j における小さい独裁者を d_j とする。

いま社会的な選択肢の順序づけとして，辞書式の並べ方を考える。すなわち，

$$(x_1, x_2)\,R\,(y_1, y_2) \Leftrightarrow [[x_j\,I_{d_j}\,y_j,\ j=1,2] \ \text{ or } \ [x_1\,P_{d_1}\,y_1] \ \text{ or } \ [x_1\,I_{d_1}\,y_1 \ \&\ x_2\,P_{d_2}\,y_2]]$$

このとき，$\boldsymbol{R}$ は弱順序であり，各選択状況での小さい独裁者 j が異なっていても循環は生じない。//

これより，多くの選択の問題があるときに，それらを同時に考慮するほどの合理性がない場合には，独裁者の力は小域的なものにとどまることがわかる。ところで，命題4の証明でもわかるように，ひとつの選択状況における小さな独裁者が，その力をひとつの選択の問題についてまで拡大する可能性はある。しかし，小さな独裁者の力の拡大はせいぜいそこまでであって，複数の選択の問題について独裁権を発揮することはできない。そして，このとき，分権的な決定，すなわち異なる問題にたいして異なる選択ルールを課すことが可能になるのである。

5．結語的覚え書

本論文では異なる問題を個別のルールで決定することが可能であるかを考察し，否定的な結論と肯定的な結論とを得た。最後に，残された問題について述べる。

第一に，Arrow の社会的厚生関数を，いくつかの異なるルールをつなぎ合わせたものとして解釈できるかどうかについて。Blau［1957］の反例をみるに，Arrow の1951年度の枠組みは，異なる問題に異なる決定方法を適用することを考慮に入れているようにみえる。(10)

しかし，もしそうであるなら，異なる問題に関する選択肢の間にパレート性などの社会的選択の公理が課されていることになる。これは局所的な選択ルールの間にさらに要請を課すものであり，その点では，異なる問題を個別に扱うという状況は考慮されていない。本論文では異なる問題を個別に扱い，個別の問題に関する局所的な公理のみを採用している。Arrow と本論文との違いは，Arrow の独裁者と，ここでの大きな独裁者との，力の及ぼし方の違いをみると，より一層明らかになるだろう。Arrow の帰結においては，独裁者の選好順序がそのまま社会的順序になっているが，ここでは，大きな独裁者が個別の状況毎に自分の選好順序を社会的なものに反映させる結果，独裁者の選好順序は必ずしも（全体の）社会的順序とは一致しないのである。

第2に，命題の拡張の可能性について。本論文の帰結は，序文にも述べたように，社会的選択理論における，Gibbard［1974］の権利についての議論を応用することによって得られる。ところで，権利については，Gibbard［1974］以外にも様々な議論がなされている。それらを応用することで類似の命題を得ることは，十分に考えられるだろう。たとえば，権利の議論で，不可能性定理を得るのに，社会状態全体の集合が直積でなくてもかまわないことが知られている。本論文では社会状態全体の集合に直積構造を仮定しているが，それを仮定せずに類似の命題を得ることは，十分に考えられるだろう。実際，命題1については直積構造を仮定せずに類似の命題が得られる。(11) これらの

(10) この点については長名寛明教授に示唆をいただいた。ただし，Blau［1957］の反例は Arrow の定理［1951］の不成立を示したものであって，Arrow の定理の改訂版［1963］に対しては，反例自体は成立しない。ただ，以下に述べるように，その点からのみ，わたしが，Arrow の定理の改訂版［1963］において，異なるルールを考察の対象としていない，と判断したわけではない。

検討については今後の課題としたい。

参考文献

Arrow K. J. 1951, 1963 *Social Choice and Individual Values ; second edition,* Yale University Press.

Barbera S., H. Sonnenschein & L. Zhou 1991 "Voting by Committees", *Econometrica*, 59, 595-609.

Barbera S., F. Gul & E. Stacchetti 1993 "Generalized Median Voter Schemes and Committees", *Journal of Economic Theory,* 61, 262-289.

Blau, J. 1957 "The Existence of Social Welfare Functions", *Econometrica,* 25, 302-13.

Gibbard, A. 1974 "A Pareto-Consistent Libertarian Claim", *Journal of Economic Theory* 7, 388-410.

Hirokawa, M. 1994 "Small Dictator and Grand Dictator : A Possobility of Decentralized Social Choice", mimeo.

Sen, A 1976 "Liberty, Unanimity and Rights", *Econometrica*, 43, 217-245.

鈴村興太郎 1982『経済計画理論』，筑摩書房。

（法政大学経済学部助教授）

(11) 長名寛明教授からは，命題1について，直積構造を用いない形で記述した命題のノートをいただいた。選択状況の定義が異なることや，他の命題の記述とのバランスから，ここに定義と命題を述べるにとどめる。

X の部分集合族 $\boldsymbol{A}$ が次の条件を満たすとき「許容できる選択状況の集合」と呼ぶ：(1) $\cup\boldsymbol{A}=X$, (2) $\boldsymbol{A}$ の任意の元 A に対して $\#A\geqq 3$, (3) $\boldsymbol{A}$ の任意の2元 A, B に対して，$A\cap B=\phi$ あるいは $\#(A\cap B)=1$ のいずれか一方が成立する，(4) $\boldsymbol{A}$ の互いに異なる任意の元 A, B に対して以下の2条件 (4.1), (4.2) を満足する $\boldsymbol{A}/\{A, B\}$ の互いに異なる2元 C, D が存在する：(4.1) $A\cap B\neq\phi$ ならば，$B\cap C\neq\phi$ & $C\cap D\neq\phi$ & $D\cap A\neq\phi$, (4.2) $A\cap B=\phi$ ならば，$A\cap C\neq\phi$ & $C\cap B\neq\phi$ & $B\cap D\neq\phi$, & $D\cap A\neq\phi$. このとき，次の命題が成り立つ：**命題** 許容できる選択状況の集合 $\boldsymbol{A}$ が与えられたとき，$\boldsymbol{A}$ に属する任意の選択状況に対して局所的パレートとLIIAとを満足する社会的厚生関数に対して大きい独裁者が存在するか社会的順序に循環が生ずる。